وزارة التربية

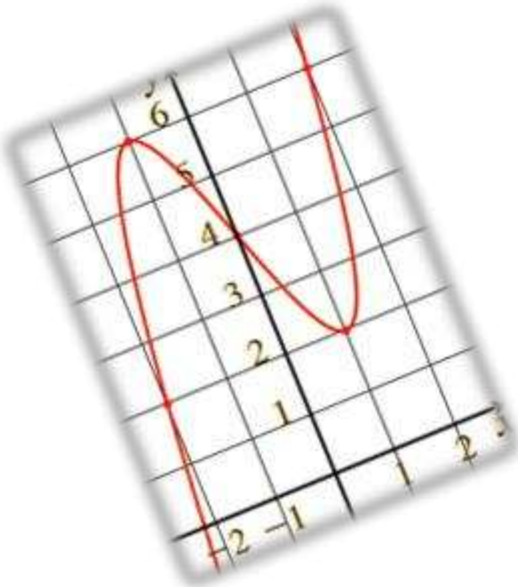
الإدارة العامة لمنطقة العاصمة التعليمية

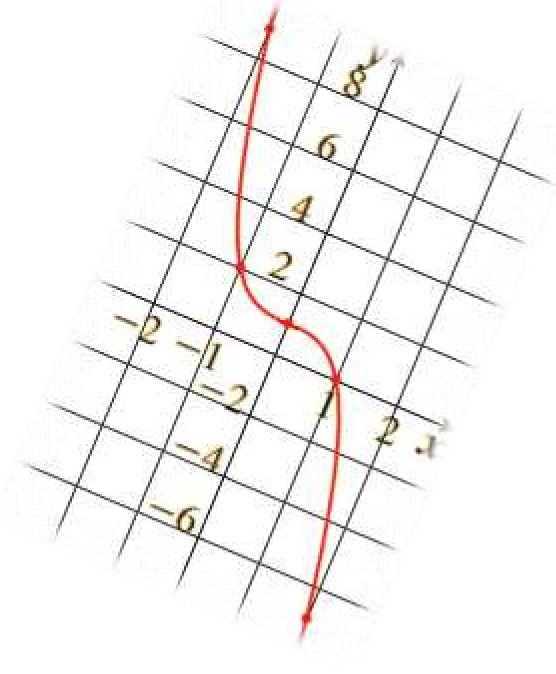
الفصل الدراسي الأول

العام الدراسي ٢٠١٧ – ٢٠١٨

رسم دوال كثيرات الحدود

للصف الثاني عشر علمي





إعداد وتقديم المعلمة: رحاب محمد رشاد الحمد

عرض الدرس..

خطوات دراسة تغير الدالة كثيرة الحدود ورسم بيانها..

تعلمت فيما سبق كيفية رسم منحنى تقريبي لبيان دالة كثيرة حدود معتمداً على سلوك نهاية الدالة، وفي البنود السابقة تعلمت تحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة وتحديد النقاط الحرجة والقيم العظمى أو الصغرى، وتم تحديد نقاط الانعطاف والفترات التي يكون فيها منحنى الدالة مقعراً لأعلى أو لأسفل.

وسنستفيد من كل هذه المعلومات لرسم بيان دالة كثيرة الحدود رسماً أكثر دقة.

1) عين مجال الدالة f.

مجال دالة كثيرة حدود هو $\mathbb{R}$ ولكنه يقتصر أحياناً على فترة من $\mathbb{R}$ خاصة في المسائل الحياتية.

2) أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة f.

3) عين النقاط الحرجة للدالة f.

4) كون جدولاً لدراسة اشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.

5) كون جدولاً لدراسة اشارة f'' وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت.

6) أوجد نقاطاً إضافية.

تساعد هذه النقاط على رسم بيان الدالة بدقة وأهم هذه النقاط، نقاط التقاطع مع أحد المحورين إن أمكن.

7) ارسم بيان الدالة f.

مثال (1)..

ادرس تغير الدالة f: $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x^3) = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f.

f دالة كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

نضع: $f'(x) = 0$

$$3(x-1)(x+1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1 \,,\; x = -1$$
$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 4 = 2 \;, \quad f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 = 6$$

$\therefore$ $(1,2),\ (-1,6)$ نقطتان حرجتان.

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'

$-\infty$ -1   1 ∞

الفترات	$(-\infty\,,-1)$	$(-1,\ 1)$	$(1\,,\infty)$
إشارة f'	+ + +	− − −	+ + +
سلوك الدالة f	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗

منحنى الدالة متزايد على كل من الفترة $(-\infty, -1)$ والفترة $(1, \infty)$

ومتناقص على الفترة $(-1,\ 1)$

يوجد قيمة عظمى محلية عند $x = -1$ وتساوي $f(-1) = 6$

يوجد قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ وتساوي $f(1) = 2$

نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

$$f''(x) = 6x \quad \rightarrow \quad f''(x) = 0$$
$$6x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$
$$f(0) = 4$$

$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ ∞

الفترات	$(-\infty\ ,0)$	$(0\ ,\infty)$
إشارة f''	$- - -$	$+ + +$
التقعر	$\cap$	$\cup$

منحنى الدالة مقعر للأسفل على الفترة $(-\infty, 0)$

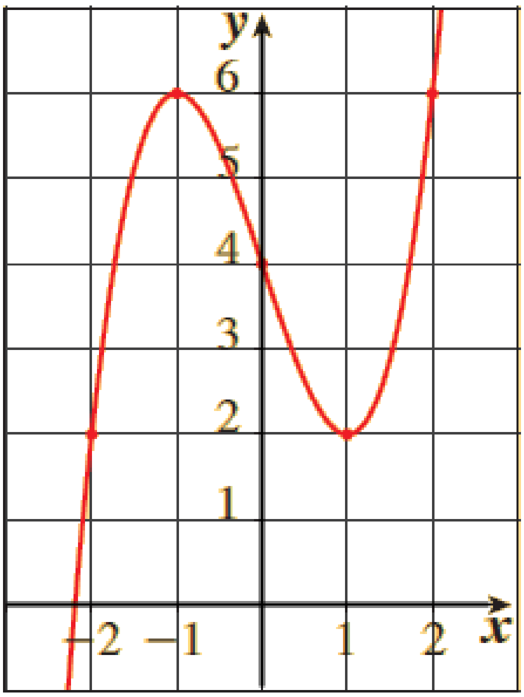
منحنى الدالة مقعر للأعلى على الفترة $(0, \infty)$

$(0,\ 4)$ نقطة انعطاف.

نقاط إضافية:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	6	4	2	6
	نقطة إضافية	نقطة عظمى محلية	نقطة انعطاف	نقطة صغرى محلية	نقطة إضافية

بيان الدالة f:



تطبيق (1)..

ادرس تغير الدالة f: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^3) = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f.

f دالة كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$$

نضع:

$$f'(x) = 0$$

$$3(x-1)(x-3) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1\,,\ x = 3$$

$$f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) - 4 = 0$$

$$f(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) - 4 = -4$$

$\therefore$ $(1,0),\ (3,-4)$ نقطتان حرجتان.

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'

$-\infty$ $\quad$ 1 $\quad$ 3 $\quad$ ∞

الفترات	$(-\infty\,,1)$	$(1,\ 3)$	$(3\,,\infty)$
إشارة f'	+ + +	− − −	+ + +
سلوك الدالة f	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗

منحنى الدالة متزايد على كل من الفترة $(-\infty, 1)$ والفترة $(3, \infty)$

ومتناقص على الفترة $(1\,, 3)$

يوجد قيمة عظمى محلية عند $x = 1$ وتساوي $f(1) = 0$

يوجد قيمة صغرى محلية عند $x = 3$ وتساوي $f(3) = -4$

نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$$

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 6(x-2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad \rightarrow \quad f(2) = -2$$

$-\infty \quad\quad 2 \quad\quad \infty$

الفترات	$(-\infty\ ,2)$	$(2\ ,\infty)$
إشارة f''	$- - -$	$+ + +$
التقعر	∩	∪

منحنى الدالة مقعر للأسفل على الفترة $(-\infty, 2)$

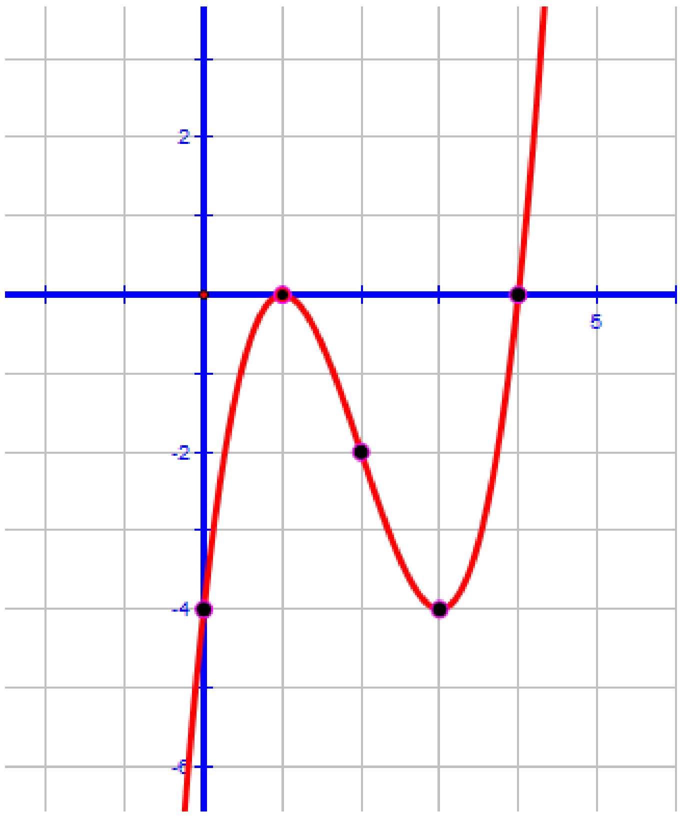
منحنى الدالة مقعر للأعلى على الفترة $(2, \infty)$

$(2, -2)$ نقطة انعطاف.

نقاط إضافية:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	0	-2	-4	0
	نقطة إضافية	نقطة عظمى محلية	نقطة انعطاف	نقطة صغرى محلية	نقطة إضافية

بيان الدالة f:



تطبيق (2)..

ادرس تغير الدالة f: $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة حدود مجاها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^3) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (-x^3) = -\infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f.

f دالة كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على مجاها.

$$f'(x) = -3x^2$$

نضع:
$$f'(x) = 0$$
$$-3x^2 = 0 \quad \to \quad x = 0$$
$$f(0) = 1 - (0)^3 = 1$$

$\therefore$ $(0,1)$ نقطة حرجة.

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'

$-\infty$ 0 ∞

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
إشارة f'	- - -	- - -
سلوك الدالة f	متناقصة ↘	متناقصة ↘

منحنى الدالة متناقص على كل من الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(0, \infty)$

لا يوجد قيم قصوى محلية.

نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

$$f''(x) = -6x$$
$$f''(x) = 0 \quad \to \quad -6x = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad f(0) = 1$$

$-\infty$ 0 ∞

الفترات	$(-\infty\,,0)$	$(0\,,\infty)$
إشارة f''	+ + +	− − −
التقعر	$\cup$	$\cap$

منحنى الدالة مقعر للأعلى على الفترة $(-\infty, 0)$

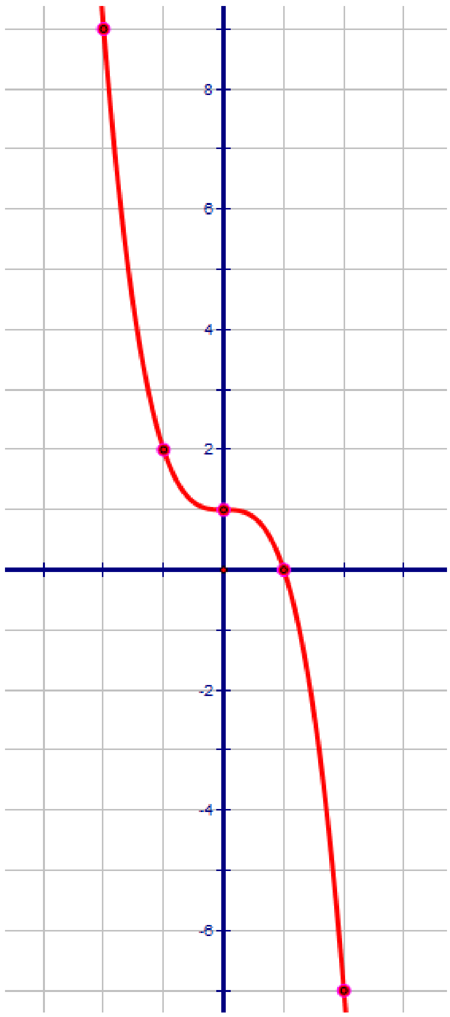
منحنى الدالة مقعر للأسفل على الفترة $(0, \infty)$

$(0,1)$ نقطة انعطاف.

نقاط إضافية:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	2	1	0	-7
	نقطة إضافية	نقطة إضافية	نقطة انعطاف	نقطة إضافية	نقطة إضافية

بيان الدالة f:



تطبيق (3)..

ادرس تغير الدالة f: $f(x) = -x^3 - 3x$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = \infty$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (-x^3) = -\infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f.

f دالة كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$$f'(x) = -3x^2 - 3$$

نضع:
$$f'(x) = 0$$
$$-3x^2 - 3 = 0 \quad \to \quad x^2 + 1 = 0$$

لا يوجد حل في $\mathbb{R}$

∴ لا يوجد نقاط حرجة.

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

الدالة متناقصة على $(-\infty, \infty)$

لا يوجد قيمة قصوى محلية.

نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

$$f''(x) = -6x$$
$$f''(x) = 0 \quad \to \quad -6x = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad f(0) = 0$$

-∞ 0 ∞

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
إشارة f''	+ + +	− − −
التقعر	$\cup$	$\cap$

منحنى الدالة مقعر للأعلى على الفترة $(-\infty, 0)$

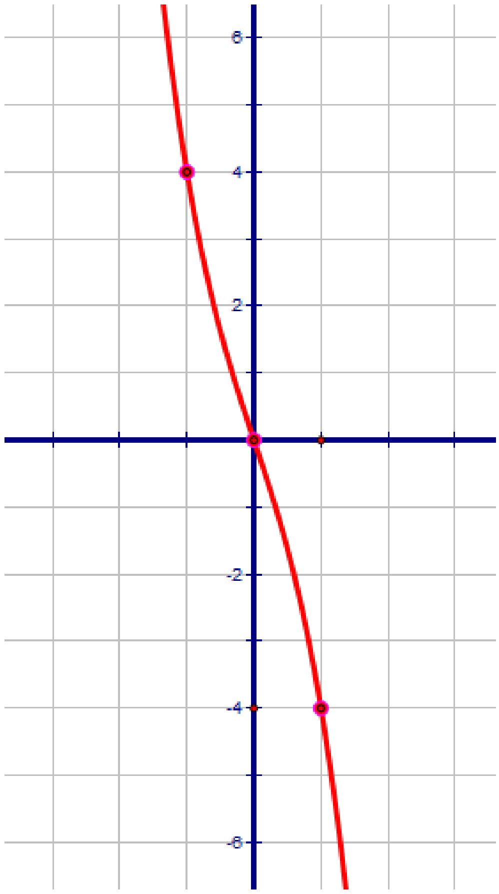
منحنى الدالة مقعر للأسفل على الفترة $(0, \infty)$

$(0,0)$ نقطة انعطاف.

نقاط إضافية:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	14	4	0	-4	-14
	نقطة إضافية	نقطة إضافية	نقطة انعطاف	نقطة إضافية	نقطة إضافية

بيان الدالة f:



تطبيق (4)..

ادرس تغير الدالة f: $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^3) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(-x^3) = -\infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f.

f دالة كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x+2)$$

نضع: $f'(x) = 0$

$$3x(-x+2) = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = 0\ ,\ x = 2$$
$$f(0) = -(0)^3 + 3(0)^2 - 4 = -4$$
$$f(2) = -(2)^3 + 3(2)^2 - 4 = 0$$

$\therefore$ $(0,-4)$, $(2,0)$ نقطتان حرجتان.

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'

الفترات	$(-\infty\ ,0)$	$(0,\ 2)$	$(2\ ,\infty)$
إشارة f'	- - -	+ + +	- - -
سلوك الدالة f	متناقصة ↘	متزايدة ↗	متناقصة ↘

منحنى الدالة متناقص على كل من الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(2, \infty)$

ومتزايد على الفترة $(0\ ,2)$

يوجد قيمة صغرى محلية عند $x = 0$ وتساوي $f(0) = -4$

يوجد قيمة عظمى محلية عند $x = 2$ وتساوي $f(2) = 0$

نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

$$f''(x) = -6x + 6 = 6(-x+1)$$
$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 6(-x+1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad \rightarrow \quad f(1) = -2$$

$-\infty$ 1 ∞

الفترات	$(-\infty\ ,1)$	$(1\ ,\infty)$
إشارة f''	+ + +	− − −
التقعر	∪	∩

منحنى الدالة مقعر للأعلى على الفترة $(-\infty, 1)$

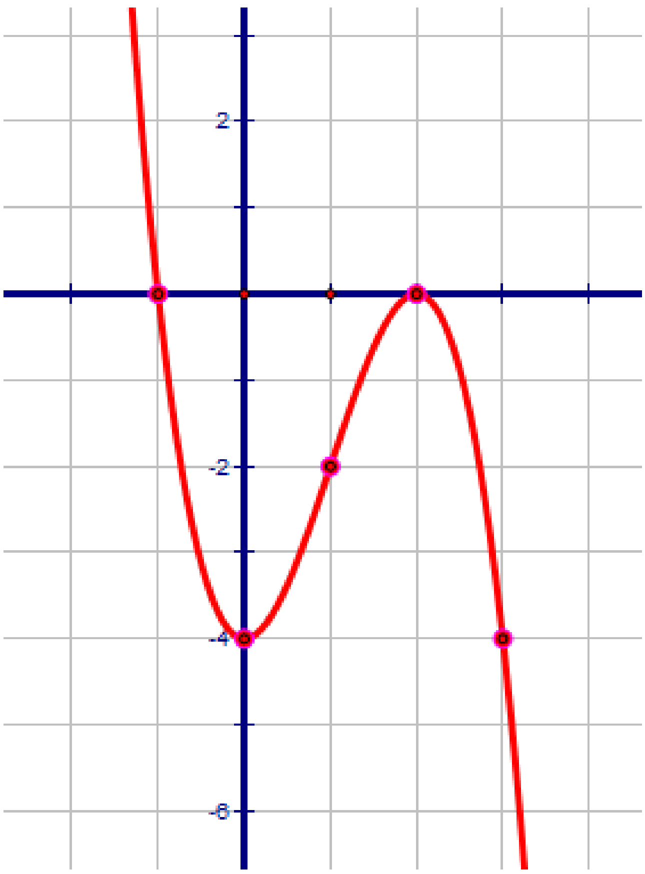
منحنى الدالة مقعر للأسفل على الفترة $(1, \infty)$

$(1, -2)$ نقطة انعطاف.

نقاط إضافية:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	-4	-2	0	-4
	نقطة إضافية	نقطة صغرى محلية	نقطة انعطاف	نقطة عظمى محلية	نقطة إضافية

بيان الدالة f:



ملاحظات هامة للموضوعي..

بيان الدالة الحدودية من الدرجة الثالثة

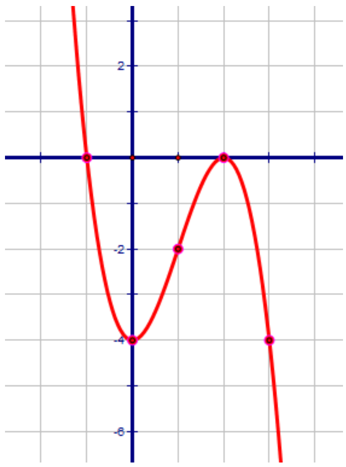
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ , \ a \neq 0$$

1- لها نقطة انعطاف واحدة عند إحداثيها السيني $x = \dfrac{-b}{3a}$

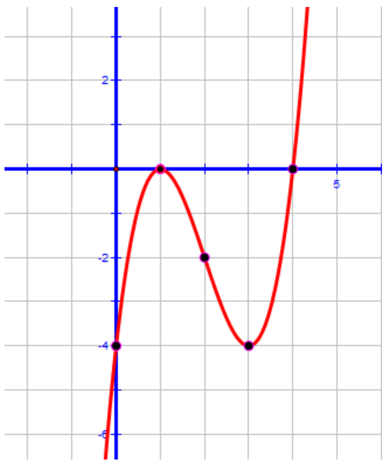
2- إذا كان لبيانها نقطتين حرجتين فإن نقطة الانعطاف عند منتصفهما تماماً.

3- إذا وُجد لها عظمى محلية فإن لها صغرى محلية أيضاً.

$a < 0$

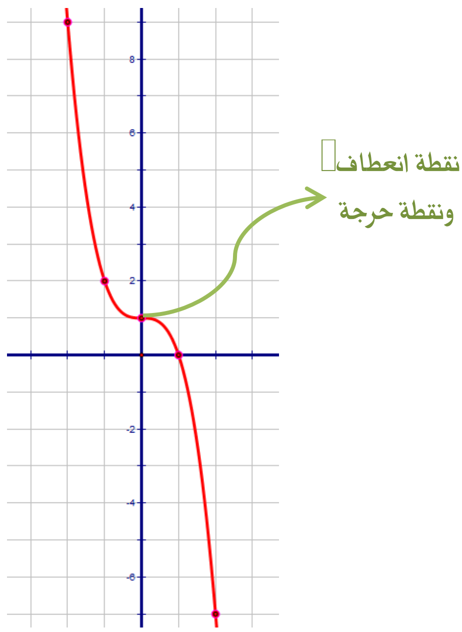


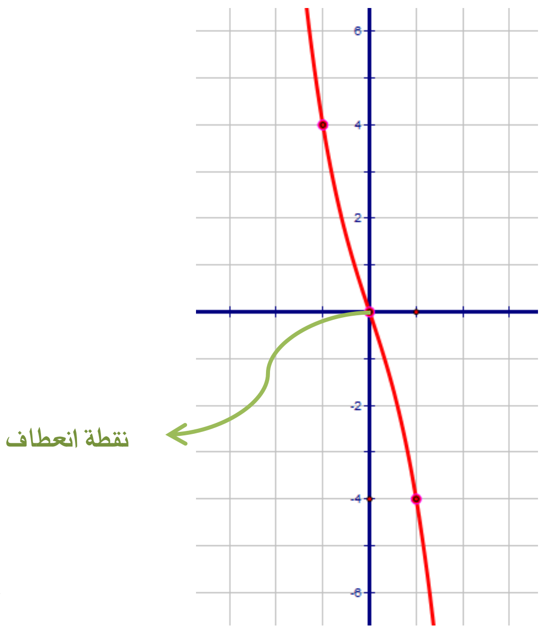
$a > 0$



4- إذا وُجد لها نقطة حرجة واحدة فقط فإنها نقطة انعطاف.

5- إذا كان لها نقطة حرجة واحدة أو ليس لها نقطة حرجة فليس لها عظمى محلية أو صغرى محلية





تطبيق (5)..

ادرس تغير الدالة f: $f(x) = x^4 - 2x^2$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^4) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^4) = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f.

f دالة كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1) = 4x(x-1)(x+1)$$

$$f'(x) = 0$$

$$4x(x-1)(x+1) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0\ ,\ x = 1\ ,\ x = -1$$

$$f(0) = 0\ \ , f(1) = -1\ ,\ f(-1) = -1$$

$\therefore$ $(0,0), (1,-1),\ (-1,-1)$ نقاط حرجة

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'

$-\infty$ -1 0 1 ∞

الفترات	$(-\infty\ ,-1)$	$(-1,\ 0)$	$(0,\ 1)$	$(1\ ,\infty)$
إشارة f'	$- - -$	$+ + +$	$- - -$	$+ + +$
سلوك الدالة f	متناقصة ↘	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗

منحنى الدالة متناقص على كل من الفترة $(-\infty, -1)$ والفترة $(0,1)$

ومتزايد على كل من الفترة $(1, \infty)$ والفترة$(-1,\ 0)$

يوجد قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ وتساوي $f(0) = 0$

يوجد قيمة صغرى محلية عند $x = -1$ وتساوي $f(-1) = -1$

وعند $x = 1$ وتساوي $f(1) = -1$

نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

$$f''(x) = 12x^2 - 4$$

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 12x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$-\infty \qquad -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \infty$

الفترات	$\left(-\infty\ ,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\infty\right)$
إشارة f''	+ + +	− − −	+ + +
التقعر	∪	∩	∪

منحنى الدالة مقعر للأعلى على كل من الفترتين $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\ ,\ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$

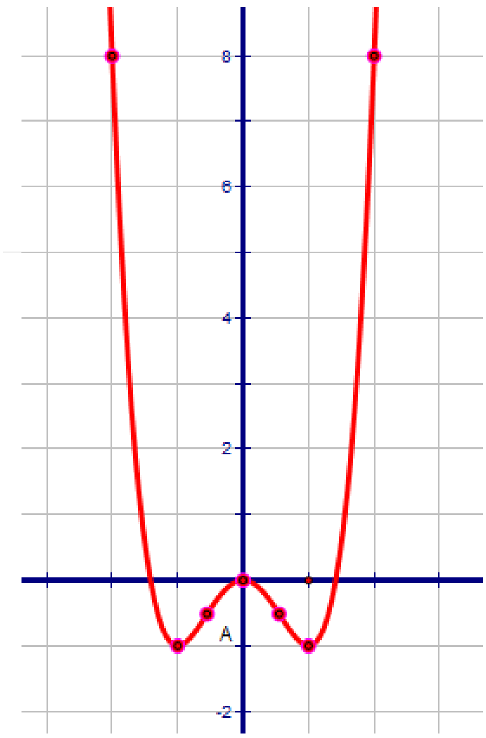
منحنى الدالة مقعر للأسفل على الفترة $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ -0.5\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ -0.5\right)$ نقطتا انعطاف.

نقاط إضافية:

x	-2	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	2
$f(x)$	8	-1	-0.5	0	-0.5	-1	8
	نقطة إضافية	نقطة صغرى محلية	نقطة انعطاف	نقطة عظمى محلية	نقطة انعطاف	نقطة صغرى محلية	نقطة إضافية

بيان الدالة f:



تطبيق (6)..

ادرس تغير الدالة f: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^4) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^4) = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f.

f دالة كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2-4) = 4x(x-2)(x+2)$$

$$f'(x) = 0$$

$$4x(x-2)(x+2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0\ ,\ x = 2\ ,\ x = -2$$

$$f(0) = 7\ ,\ f(2) = -9\ ,\ f(-2) = -9$$

$\therefore$ $(0,7), (2,-9), (-2,-9)$ نقاط حرجة

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'

$-\infty$ -2 0 2 ∞

الفترات	$(-\infty\ ,-2)$	$(-2,\ 0)$	$(0,\ 2)$	$(2\ ,\infty)$
إشارة f'	− − −	+ + +	− − −	+ + +
سلوك الدالة f	متناقصة ↘	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗

منحنى الدالة متناقص على كل من الفترة $(-\infty, -2)$ والفترة $(0,2)$

ومتزايد على كل من الفترة $(2, \infty)$ والفترة $(-2,\ 0)$

يوجد قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ وتساوي $f(0) = 7$

يوجد قيمة صغرى محلية عند $x = -2$ وتساوي $f(-2) = -9$

وعند $x = 2$ وتساوي $f(2) = -9$

نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

$$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 12x^2 - 16 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \ , \ x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$-\infty \qquad -\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \infty$

الفترات	$\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
إشارة f''	+ + +	− − −	+ + +
التقعر	$\cup$	$\cap$	$\cup$

منحنى الدالة مقعر للأعلى على كل من الفترتين $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$, $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

منحنى الدالة مقعر للأسفل على الفترة $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \ -0.5\right), \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \ -0.5\right)$ نقطتا انعطاف.

نقاط إضافية:

x	-3	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	2
$f(x)$	16	-9	-0.5	7	-0.5	-9	16
	نقطة إضافية	نقطة صغرى محلية	نقطة انعطاف	نقطة عظمى محلية	نقطة انعطاف	نقطة صغرى محلية	نقطة إضافية

بيان الدالة f: