دولـــة الـكـويـت
وزارة الـتـربـيـة
إمتحان نهاية الفترة الدراسية الأولى للصف الثاني عشر علمي 2016 / 2017 م
المجال الدراسي : الرياضيات	الزمن : ساعتان و 45 دقيقة	عدد الصفحات 13 صفحه

القسم الأول : أسئلـة المقال :
أجب عن الأسئلة التالية موضحا خطوات الحل في كل منها :

14

السؤال الأول :

(a) أوجد :

(6 درجات)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x}$$

الحل:

$$\frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x} = \frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3x\cos 4x}{5x} \qquad [2]$$

$$= \frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3}{5}\cos 4x \quad , \quad x \neq 0 \qquad [0.5]$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{5x}\right) = \frac{2}{5} \qquad [1]$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x\cos 4x}{5x}\right) = \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\cos 4x = \frac{3}{5}(1) = \frac{3}{5} \qquad [1]$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3}{5}\cos 4x\right) \qquad [0.5]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{5x}\right) + \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}(\cos 4x) \qquad [0.5]$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 \qquad [0.5]$$

(تراعى الحلول الصحيحة الأخرى في جميع الأسئلة المقالية)

تابع السؤال الأول :

(b) أوجد : (8 درجات)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2-5x+1}}{3x-5}$$

الحل:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-5x+1}}{3x-5} = \frac{\sqrt{x^2(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})}}{x(3-\frac{5}{x})} \quad [1]$$

$$= \frac{|x|\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x(3-\frac{5}{x})}$$, $|x| = -x$ يكون $x<0$ عندما [0.5]

$$= \frac{-x\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x(3-\frac{5}{x})} = -\frac{\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} \quad , x\neq 0 \quad [1]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} 3 - \lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x} + \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = 3-0+0 = 3 \ , 3>0 \quad [1.5]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{3} \quad [1]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} 3 - \lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x} = 3-0 = 3 \quad , \quad 3\neq 0 \quad [1.5]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2-5x+1}}{3x-5} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}}$$

$$= \frac{-\lim_{x\to\infty}\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty}(3-\frac{5}{x})} = \frac{-\sqrt{3}}{3} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad [1.5]$$

14

السؤال الثاني

(a) إدرس إتصال الدالة f على $[1,3]$ حيث :

(7 درجات)

$$f(x) = \begin{cases} -2 & : x = 1 \\ x^2 - 3 & : 1 < x < 3 \\ 5 & : x = 3 \end{cases}$$

الحل:

$f(x) = x^2 - 3 \quad : \quad x \in (1,3)$

$\forall \ c \in (1,3), \quad f(c) = c^2 - 3$ [0.5]

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} (x^2 - 3) = c^2 - 3$ [0.5]

$\Rightarrow \ \lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c) \quad \forall x \in (1,3)$ [0.5]

[0.5] $\therefore$ f متصله على $(1,3)$ ....(1)

ندرس إتصال الداله f عند $x = 1$ من اليمين

$f(1) = -2$ [0.5]

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 3)$ [0.5]

$= 1 - 3 = -2 = f(1)$ [0.5]

[0.5] الداله f متصله عند $x = 1$ من اليمين ....(2)

ندرس إتصال الداله f عند $x = 3$ من اليسار

$f(3) = 5$ [0.5]

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 - 3)$ [0.5]

$= 9 - 3 = 6 \neq f(3)$ [0.5]

[0.5] الداله f غير متصله عند $x = 3$ من اليسار ....(3)

[1] من (1) ، (2) ، (3) f ليست متصله على $[1,3]$ و لكنها متصلة على $[1,3)$

تابع السؤال الثاني :

(b) إذا كانت : $y = x \sin x$

فأثبت أن : $y'' + y - 2\cos x = 0$ (7 درجات)

الحل:

$y = x \sin x$

$y' = \sin x \cdot (x)' + x \cdot (\sin x)' = \sin x + x\cos x$ [3]

$y'' = \cos x + \cos x \cdot (x)' + x \cdot (\cos x)'$ [1.5]

$= \cos x + \cos x + x \cdot (-\sin x) = 2\cos x - x \sin x$ [1]

$y'' + y - 2\cos x = 2\cos x - x\sin x + x \sin x - 2\cos x$ [1]

$= 0$ [0.5]

14

السؤال الثالث :

(a) بين أن الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 2$

تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,4]$

ثم أوجد قيمة c التي تنبيء بها النظرية (5 درجات)

الحل:

[0.5] f دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ وبالتالي فهي متصلة على الفترة $[0 , 4]$

[0.5] وقابلة للاشتقاق على $(0 , 4)$

0.5 ∴ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[0 , 4]$ ∴ يوجد على الأقل $c \in (0 , 4)$ بحيث :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ [0.5]

$$= \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$$

$$\because f(4) = (4)^3 - 3(4) + 2 = 54$$ [0.5]

$$f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 2 = 2$$ [0.5]

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad , f'(c) = 3c^2 - 3$$ 0.5

$$\therefore 3c^2 - 3 = \frac{54 - 2}{4}$$ [0.5]

$$3c^2 - 3 = 13 \Rightarrow 3c^2 = 16 \Rightarrow c^2 = \frac{16}{3}$$ [0.5]

$$\Rightarrow c = \frac{\pm 4}{\sqrt{3}}$$

$$c = \frac{-4}{\sqrt{3}} \notin (0 , 4)$$

$$\therefore c = \frac{4}{\sqrt{3}} \in (0 , 4)$$ [0.5]

تابع السؤال الثالث :

(b) إدرس تغير الدالة f : $f(x) = 2x^2 - x^4 + 5$

وارسم بيانها

(9 درجات)

الحل:

f دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^4) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(-x^4) = -\infty \qquad \boxed{0.5}$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f

f دالة كثيرة حدود فهي متصلة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x - 4x^3 \qquad \boxed{0.5}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow 4x(1 - x)(1 + x) = 0$$

$$4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 2(0)^2 - (0)^4 + 5 = 5$$

$\therefore$ $(0,5)$ نقطة حرجة [0.5]

$$x = 1 \Rightarrow f(2) = 2(1)^2 - (1)^4 + 5 = 6$$

$\therefore$ $(1,6)$ نقطة حرجة [0.5]

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2(-1)^2 - (-1)^4 + 5 = 6$$

$\therefore$ $(-1,6)$ نقطة حرجة [0.5]

نكون الجدول لدراسة إشارة f' : [2]

	-∞	-1	0	1 ∞
الفترات	(- ∞ , -1)	(-1 , 0)	(0 , 1)	(1 , ∞)
إشارة f'	+ + +	− − −	+ + +	− − −
سلوك الدالة f	↗↗	↘↘	↗↗	↘↘

من الجدول :

f متزايدة على كلا من الفترتين $(-\infty,-1)$, $(0,1)$ و f متناقصة على كلا من الفترتين $(1,\infty)$, $(-1,0)$

نستطيع أن نلاحظ من الجدول أنه توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 0$ وقيمتها $f(0) = 5$

وتوجد قيمة عظمى محلية عند $x = -1$ وقيمتها $f(-1) = 6$

وتوجد قيمة عظمى محلية عند $x = 1$ وقيمتها $f(1) = 6$

نكون الجدول لدراسة إشارة f'' :

$$f''(x) = 4 - 12\,x^2 \qquad [0.5]$$

نضع $f''(x) = 0$

$$4 - 12\,x^2 = 0 \Rightarrow 12\,x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{12} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + 5 = 5\frac{5}{9} \qquad [0.5]$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + 5 = 5\frac{5}{9} \qquad [0.5]$$

	$-\infty$ … $\frac{-1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$ … $\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ … ∞
الفترات	$(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{3}})$	$(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$
إشارة f''	+ + +	− − −	+ + +
بيان الدالة f	مقعر لأعلى	مقعر لأسفل	مقعر لأعلى

[1.5]

من الجدول نجد أن :

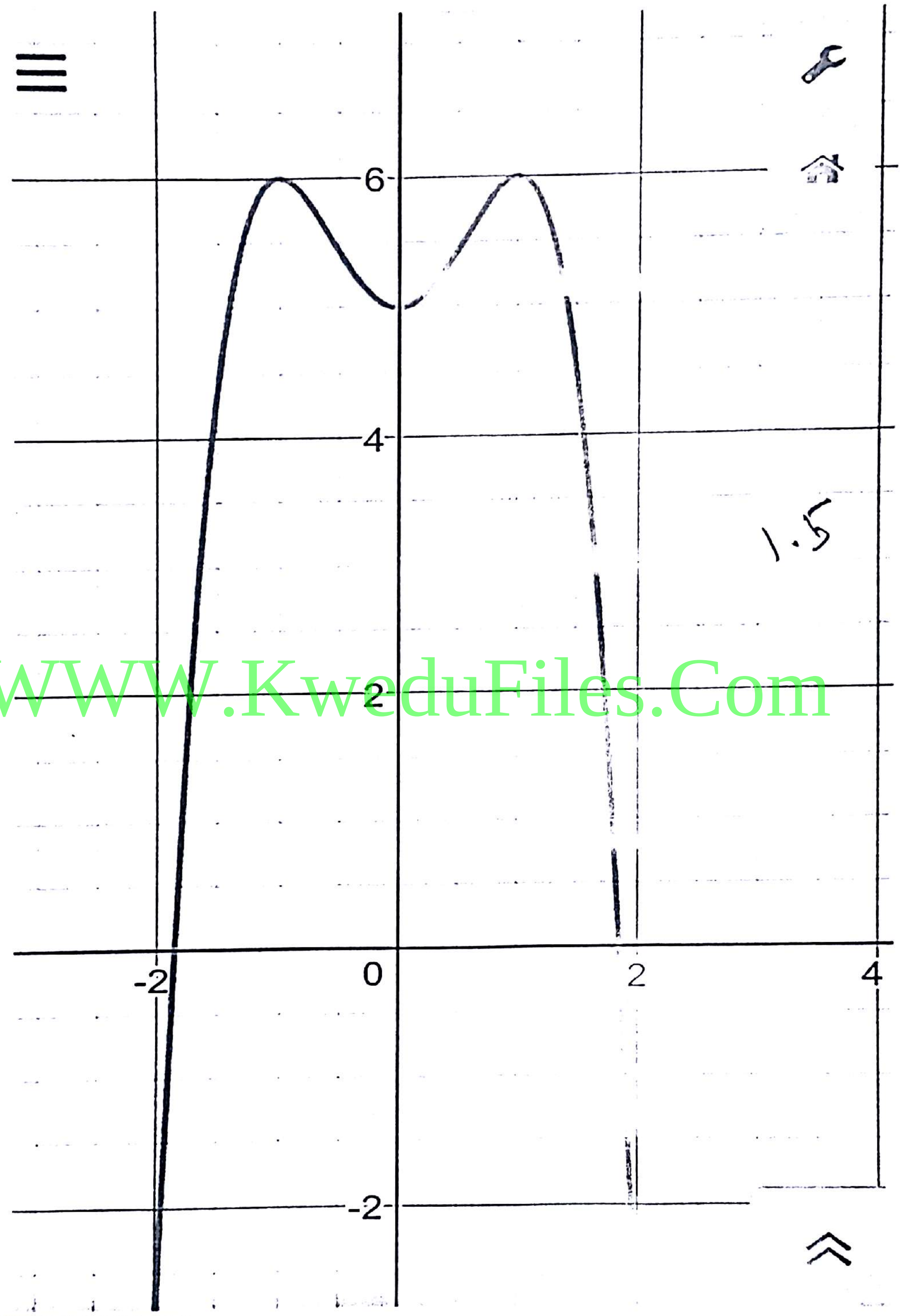
بيان الدالة f مقعر للأعلى على الفترتين $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ ،

بيان الدالة f مقعر للأسفل على الفترة $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

النقطة $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 5\frac{5}{9}\right)$ نقطة انعطاف

النقطة $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 5\frac{5}{9}\right)$ نقطة انعطاف

ورقة الرسم البياني



14

السؤال الرابع

(a) أوجد معادلة المماس لمنحنى الداله f : $f(x)=\frac{3x-4}{x+2}$ عند $x=0$

(8 درجات)

الحل:

$$f(0)=\frac{0-4}{0+2}=\frac{-4}{2}=-2 \qquad [0.5]$$

$$f'(x)=\frac{(x+2)\cdot(3x-4)'-(x+2)'.(3x-4)}{(x+2)^2}$$

1 1

$$=\frac{(x+2)\cdot(3)-(3x-4)\cdot(1)}{(x+2)^2} \qquad [3]$$

1

$$=\frac{10}{(x+2)^2} \qquad [1]$$

ميل المماس :

$$m=f'(a)=f'(0)=\frac{10}{(0+2)^2}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2} \qquad [1.5]$$

فتكون معادلة المماس هي

$$y-f(a)=f'(a)\,(x-a) \qquad [1]$$

$$y-(-2)=\frac{5}{2}\,(x-0) \qquad [0.5]$$

1 +

$$2y+4=5x \qquad [0.5]$$

$$2y-5x+4=0$$

وزارة التربية 2016-2017 المطبعة السرية ديوان عام الوزارة الفترة الدراسية الأولى نسخة التصحيح

تابع السؤال الرابع :

(b) يعتقد مدير شركة أن متوسط رواتب المستخدمين لديه 290 دينار ، فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 مستخدمين و تبين أن متوسطها الحسابي $\bar{x} = 283$ دينار وإنحرافها المعياري $S = 32$ دينار . فهل يمكن الإعتماد على هذه العينة لتأكيد ما إفترضه بأستخدام مستوى ثقة 95 % (علما بأن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي) (6 درجات)

الحل:

$S = 32$ ، $n = 10$ ، $\bar{x} = 283$

① صياغة الفروض الإحصائية

$H_0 : \mu = 290$ مقابل $H_1 : \mu \neq 290$ [0.5]

② نوجد المقياس الإحصائي

$\because$ σ غير معلوم ، $n \leq 30$ [0.5]

$$\therefore t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{283 - 290}{\frac{32}{\sqrt{10}}} \approx -0.6917 \quad [1.5]$$

③ $\because n = 10$

$\therefore$ درجات الحرية :

$n - 1 = 10 - 1 = 9$ [0.5]

مستوى الثقة 95 %

$\therefore \quad 1 - \alpha = 0.95$

$\therefore \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$ [0.5]

من جدول توزيع t نجد :

$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.025} = 2.262$ [0.5]

④ منطقة القبول : $(-t_{\frac{\alpha}{2}}, t_{\frac{\alpha}{2}}) = (-2.262, 2.262)$ [1]

⑤ اتخاذ القرار الإحصائي :

$\because -0.6917 \in (-2.262, 2.262)$ [0.5]

$\therefore$ القرار بقبول فرض العدم $\mu = 290$ [0.5]

إمتحان نهاية الفترة الدراسية الأولى للصف الثاني عشر علمي 2016 / 2017 م
المجال الدراسي / الرياضيات

القسم الثاني (الأسئلة الموضوعية) :

أولا : في البنود $(1-2)$ ظلل في جدول الإجابة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة	
(1)	إذا كانت الدالة f متصلة عند $[-3,1]$ ، g دالة متصلة على $[-1,3]$ فإن $f+g$ هي دالة متصلة عند $x=0$
(2)	إذا كانت الدالة f : $f(x)=\sqrt{x+3}$ فإن $f'(1)=\frac{1}{4}$

ثانيا : في البنود $(3-10)$ لكل بند أربع إختيارات واحد منها فقط صحيح اختر الإجابة الصحيحة ثم ظلل في جدول الإجابة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة :

(3) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{5}{(x-3)}=$

$(a)\ \infty$ $\qquad$ $(b)\ -\infty$

$(c)\ 5$ $\qquad$ $(d)\ 0$

(4) إذا كانت :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+3}{2x+5}=3$$

فإن قيم الثابتين $a\,,b$ هما :

$(a)\ a=0\ ,\ b=6$ $\qquad$ $(b)\ a=0\ ,\ b=-6$

$(c)\ a=0\ ,\ b=2$ $\qquad$ $(d)\ a=0\ ,\ b=-2$

(5) الداله المتصلة عند $x=2$ فيما يلي هي

$(a)\ f(x)=\sqrt{x-2}$ $\qquad$ $(b)\ g(x)=|x-2|$

$(c)\ h(x)=\dfrac{1}{x-2}$ $\qquad$ $(b)\ k(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$

(6) إذا كانت الدالة f : $f(x)=3x+\tan x$ ، فإن $f'(0)$ تساوي

$(a)\ 0$ $\qquad$ $(b)\ 1$

$(c)\ 3$ $\qquad$ $(d)\ 4$

(7) الدالة f : $f(x) = |x^2 - 1|$ لها :

(a) قيمة صغرى مطلقة

(b) قيمة عظمى مطلقة

(c) نقطتان حرجتان فقط

(d) ليس أيا مما سبق

(8) إذا كانت الدالة f' : $f'(x) = -3x$ فإن الدالة f

(a) متزايدة على الفترة $(0, \infty)$

(b) متزايدة على مجال تعريفها

(c) متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$ ، متناقصة على الفترة $(0, \infty)$

(d) متناقصة على الفترة $(-\infty, 0)$

(9) للدالة f : $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ مماس رأسي معادلته :

(a) $x = 0$

(b) $x = 1$

(c) $y = 0$

(d) $y = 1$

(10) في دراسة لمجتمع إحصائي تبين أن متوسطه الحسابي $\mu = 125$ أخذت عينة من هذا المجتمع حجمها $n = 36$ فتبين أن متوسطهما الحسابي $\overline{x} = 130$ إذا كان المقياس الإحصائي $Z = 3.125$ فإن الإنحراف المعياري σ تحت مستوى ثقة 95% يساوي

(a) -9.6

(b) 6.9

(c) 9.6

(d) -6.9

إنتهت الأسئلة ،،،

جدول الإجابة

(1)	**(a)**	(b)	(c)	(d)
(2)	**(a)**	(b)	(c)	(d)

الدرجة : .... × 1 = ...

(3)	(a)	**(b)**	(c)	(d)
(4)	**(a)**	(b)	(c)	(d)
(5)	(a)	**(b)**	(c)	(d)
(6)	(a)	(b)	(c)	**(d)**
(7)	**(a)**	(b)	(c)	(d)
(8)	(a)	(b)	**(c)**	(d)
(9)	(a)	**(b)**	(c)	(d)
(10)	(a)	(b)	**(c)**	(d)

الدرجة : .... × 1.5 = ...

14

الدرجة : ....

قوانين الإحصاء

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \;;\; -Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$ (القيمة الحرجة)

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (الخطأ المعياري للمجتمع)

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (هامش الخطأ – توزيع طبيعي)

$(\bar{x} - E \;,\; \bar{x} + E)$ فترة الثقة للمتوسط الحسابي

$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (التوزيع t)

$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ (هامش الخطأ – توزيع t الانحراف المعياري σ غير معلوم)

$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ (المقياس الإحصائي – توزيع طبيعي)

$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ (المقياس الإحصائي – توزيع طبيعي – الانحراف المعياري σ غير معلوم)

$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ (المقياس الاحصائي – توزيع t – الانحراف المعياري σ غير معلوم)