مذكرة

الرياضيات

الصف

10

الاسم ....

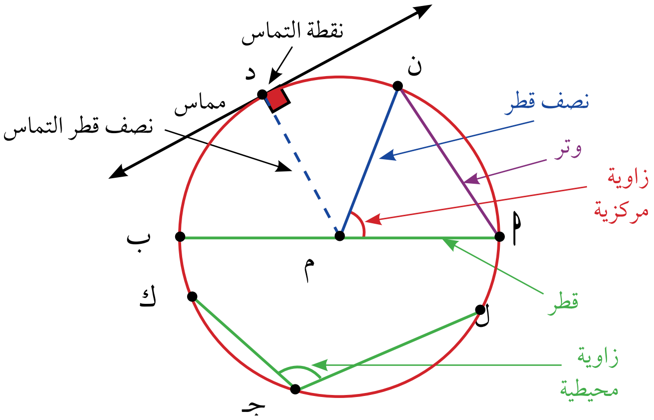
الصف ....

الفصل الدراسي الثاني

2024 - 2025

أ : سلامة علي الركاض

تعريف الدائرة



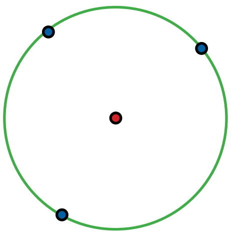
الدائرة هي مجموعة نقاط المستوى التي تبعد كل منها عن نقطة ثابتة م في المستوى بعدًا ثابتًا.

تسمى النقطة الثابتة **مركز الدائرة** ويسمى البعد الثابت طول نصف القطر ويرمز إليه عادة بالرمز نق.

نظرية 1

نظرية (١)

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.



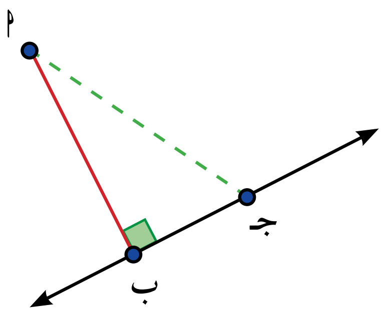
استنتاج

استنتاج ١ : من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بهذه النقطة وعمودي على المستقيم المعلوم.

لاحظ أنه في Δأب جـ، أب < أجـ مهما كان موضع النقطة جـ على المستقيم (جـ لا تنطبق على ب).

استنتاج ٢ : أقصر بعد بين نقطة ومستقيم هو البعد العمودي.

كلما ابتعدت جـ عن ب على المستقيم أصبح طول $\overline{\text{أجـ}}$ أكبر.



المماس

المماس للدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.

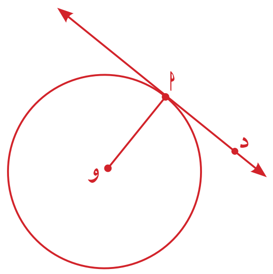
نقطة التقاطع تسمى نقطة التماس.

$\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس.

$\overrightarrow{\text{أد}}$ شعاع مماس.

$\overline{\text{أد}}$ قطعة مماسية

$\overline{\text{وأ}}$ نصف قطر التماس

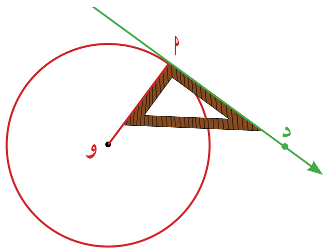


نظرية 2

المماس عمودي على نصف قطر التماس.

إذا كان مستقيم مماسًّا لدائرة، فإنه يكون متعامدًا مع نصف القطر المار بنقطة التماس.

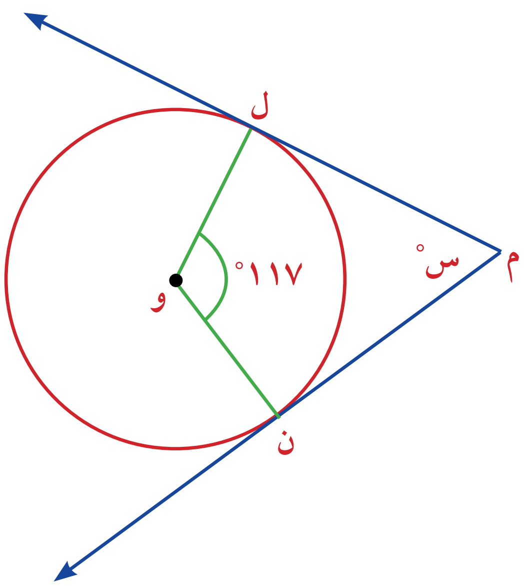
أي أن $\overline{\text{وأ}} \perp \overleftrightarrow{\text{دأ}}$.



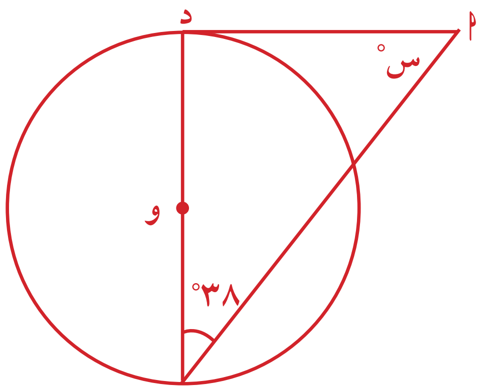
مثال 2

في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مماسان للدائرة التي مركزها و.

أوجد قياس الزاوية ل $\hat{\text{م}}$ ن.



حاول أن تحل 2

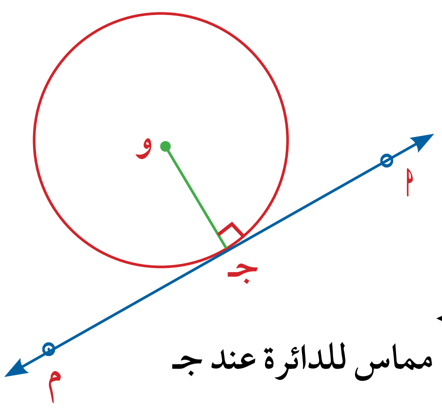


في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{\text{ﺃد}}$ مماس للدائرة التي مركزها و.

أوجد قيمة س°.

نظرية 3

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

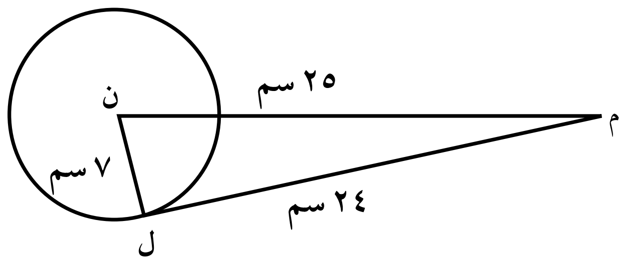


$\overleftrightarrow{\text{ﺃم}}$ مماس للدائرة عند جـ

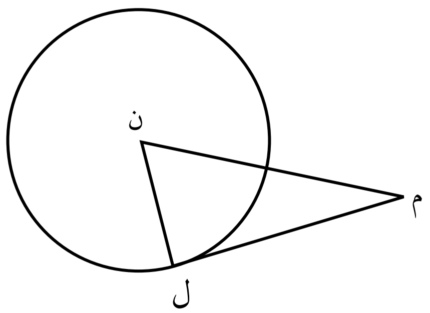
مثال 4

في الشكل المقابل، ن ل = ٧ سم ، ل م = ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ سم.

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة التي مركزها ن.



حاول أن تحل 4



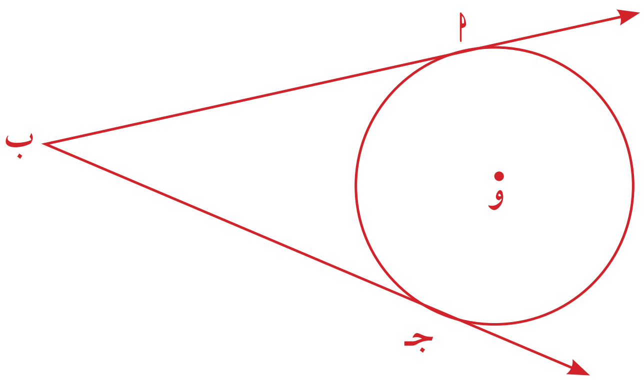
في الشكل المقابل، إذا كان ن ل = ٤ ، ل م = ٧ ، ن م = ٨،

فهل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة؟ فسِّر إجابتك.

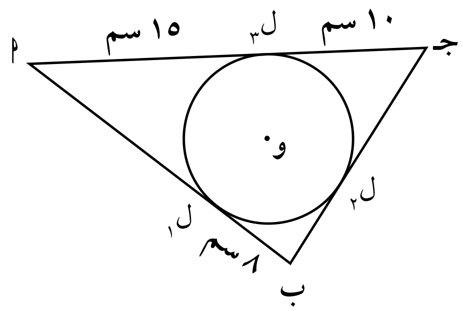
نظرية 4

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

$\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـ ب}}$



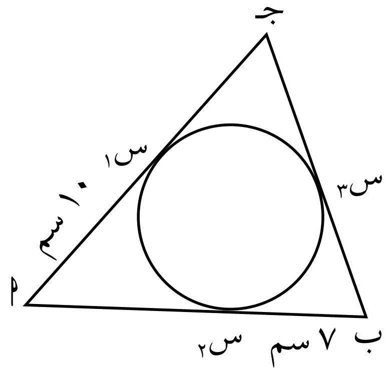
مثال 6



في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث أب جـ.

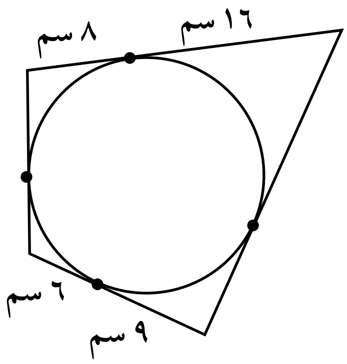
حاول أن تحل 6

في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٥٠ سم، فأوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.



كراسة التمارين

في التمرين (٧)، يحيط المضلّع بدائرة. أوجد محيط المضلع.

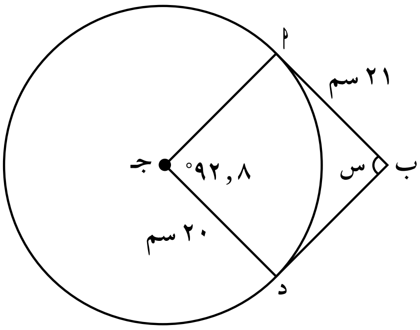


(٥) $\overleftrightarrow{\text{بأ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ مماسان للدائرة.

(أ) أوجد قيمة س.

(ب) أوجد محيط الشكل الرباعي ب أ جـ د.

(جـ) أوجد ب جـ.



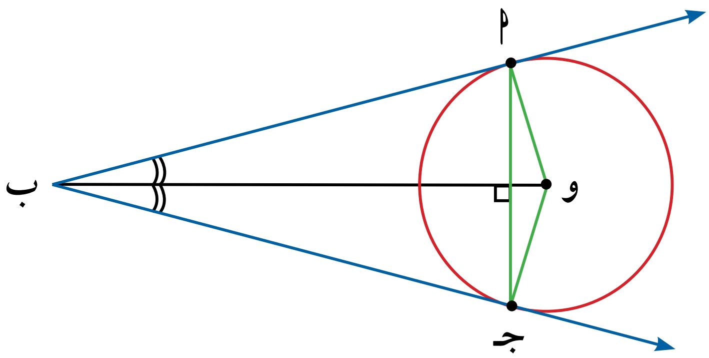
نتائج النظرية

Δ ب أ جـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة.

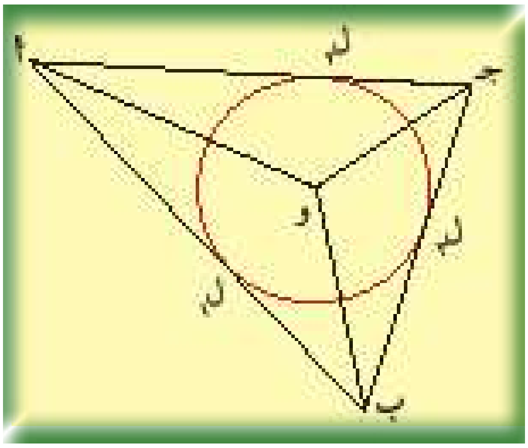
١ $\overleftarrow{\text{ب و}}$ منصف الزاوية أ $\hat{\text{ب}}$ جـ

٢ $\overleftarrow{\text{و ب}}$ منصف الزاوية أ $\hat{\text{و}}$ جـ

٣ $\overline{\text{و ب}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$



الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة)



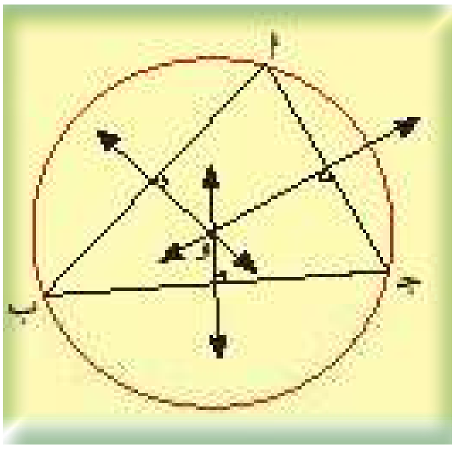
هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث

الدائرة المحيطة لمثلث (الخارجة)

هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.

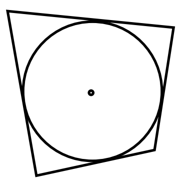
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).



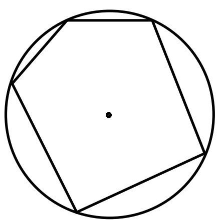
كراسة التمارين

في التمرينين (٥–٦)، حدّد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمضلع (داخلة) أو محيطة بمضلع (خارجة).

(٥)



(٦)



الأوتار و الأقواس

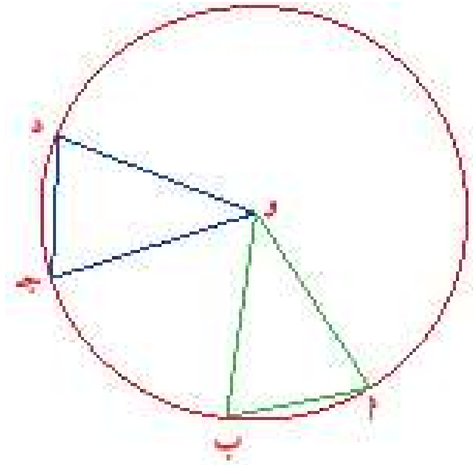
نظرية 1

في دائرة أو في دوائر متطابقة:

١ للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.

٢ الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.

٣ للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.



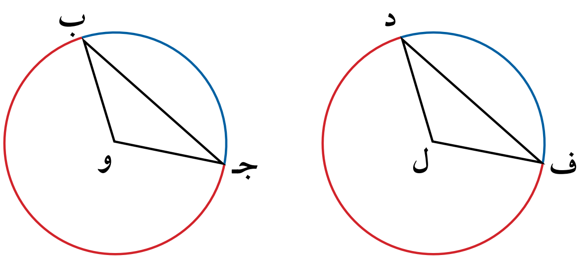
١ م(∠أ و ب) = م(∠جـ و د) ← أب ≅ جـد

٢ أب ≅ جـد ← ⌒أب ≅ ⌒جـد

٣ ⌒أب ≅ ⌒جـد ← م(∠أ و ب) = م(∠جـ و د)

مثال 1

في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان، ⌒ب جـ ≅ ⌒د ف . ماذا تستنتج؟



....

....

حاول أن تحل 1

في الرسم أعلاه، إذا كان ب جـ ≅ دف ، فماذا تستنتج؟

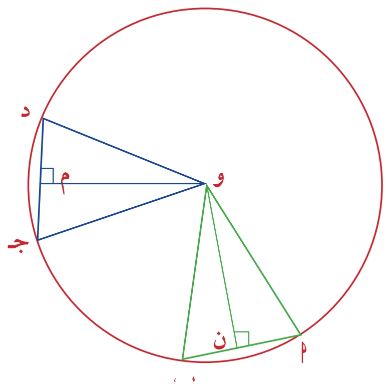
....

....

نظرية 2

١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.



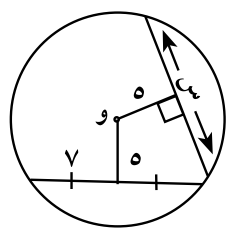
$\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـ د}}$. ← $\overline{\text{ون}} \cong \overline{\text{وم}}$.

$\overline{\text{ون}} \cong \overline{\text{وم}}$. ← $\overline{\text{أب}} \cong \overline{\text{جـ د}}$.

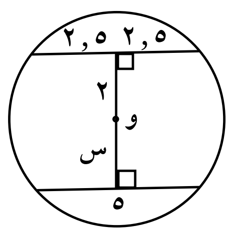
كراسة التمارين

(١) أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

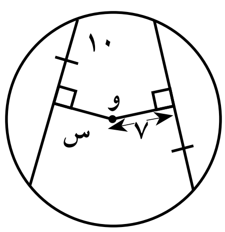
(أ)



(ب)

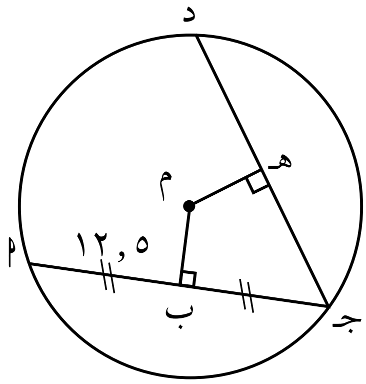


(جـ)



مثال 2

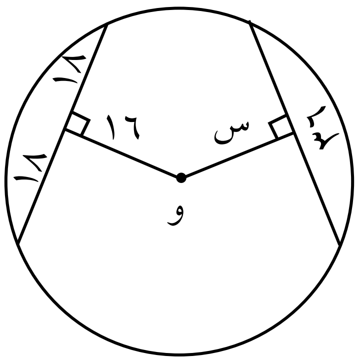
في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة. م ب = م هـ ، أوجد طول $\overline{\text{جـ د}}$. فسّر .



حاول أن تحل 2

دائرة مركزها و.

أوجد قيمة س في الشكل المقابل، وفسّر إجابتك.



نظرية 3

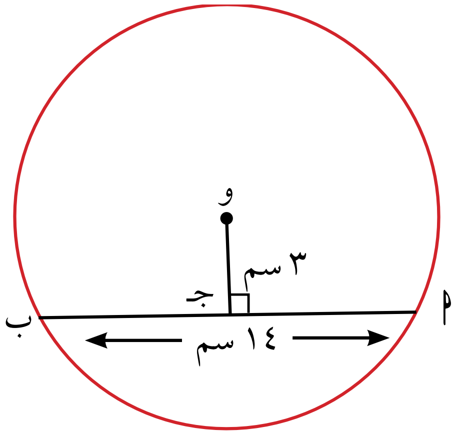
١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.

٢ القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًّا على هذا الوتر.

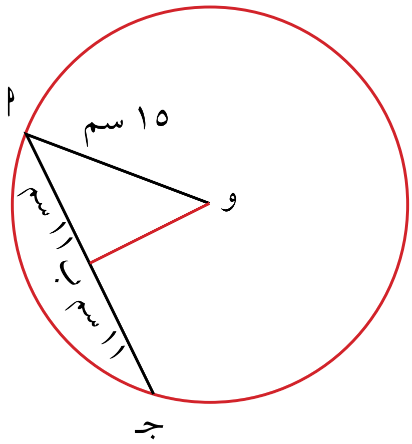
٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

مثال 3

أ في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و.



ب في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر.

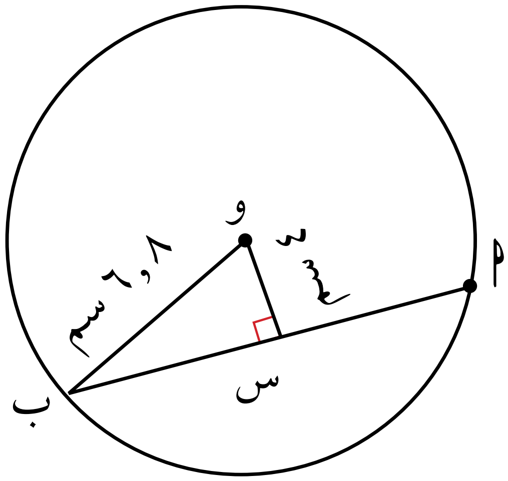


حاول أن تحل 3

استخدم الشكل المقابل لإيجاد:

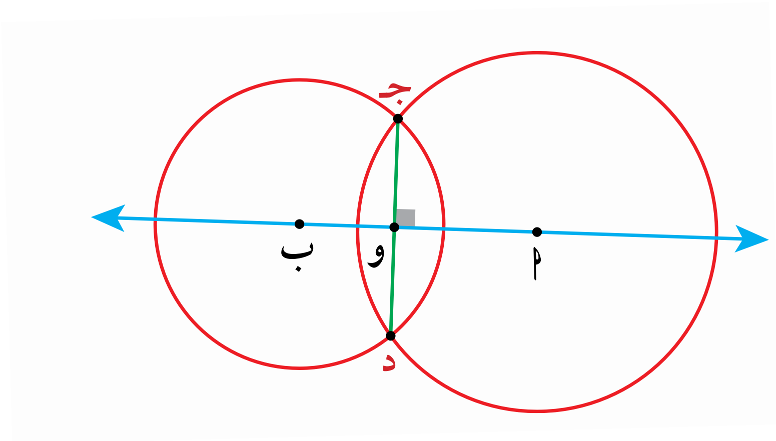
أ طول الوتر أب.

ب المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر أب .



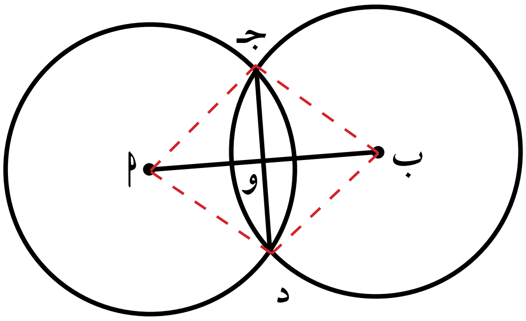
نتيجة

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.



مثال 4

يمثل الشكل المقابل دائرتين متطابقتين. $\overline{\text{جـ د}}$ وتر مشترك. إذا كان م ب = ٢٤ سم، نـه = ١٣ سم. فما طول $\overline{\text{جـ د}}$؟



حاول أن تحل 4

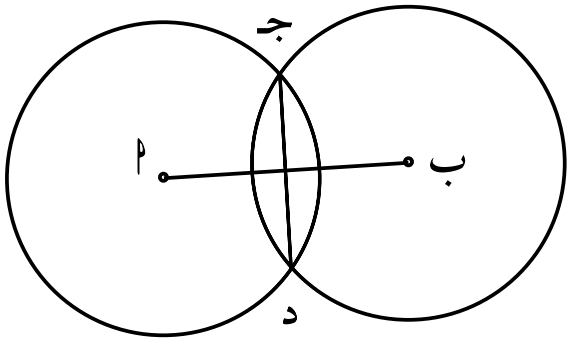
في مثال (٤)، إذا كان جـ د = ١٤ سم، نـه = ١٣ سم ، فأوجد طول $\overline{\text{م ب}}$.

كراسة التمارين

(٥) ﻫ، ب مركزا دائرتين متطابقتين. $\overline{\text{جـ د}}$ وتر مشترك للدائرتين.

(أ) إذا كان ﻫب = ٨ سم، جـ د = ٦ سم. فما طول نصف القطر؟

(ب) إذا كان ﻫب = ٢٤ سم، نصف القطر = ١٣ سم. فما طول $\overline{\text{جـ د}}$؟

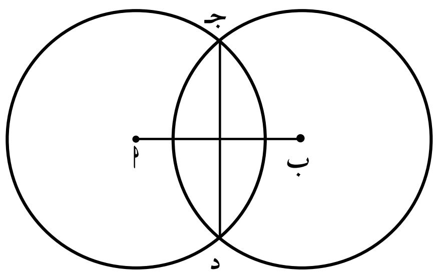


كراسة التمارين

(٨) دائرتان مركزاهما على الترتيب ﻫ، ب تتقاطعان بالنقطتين جـ ، د.

وطول نصف قطر كل دائرة ٦ سم.

أوجد طول جـ د إذا كان طول ﻫب يساوي ٨ سم.



الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

تعريف

١ الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المركزية**.

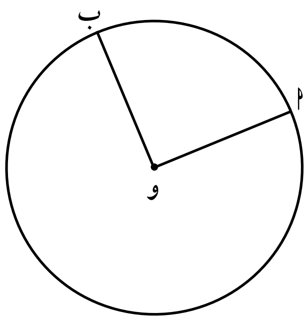
٢ الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى **بالزاوية المحيطية**.

نظرية 1

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.

مثال 1

في الشكل المقابل دائرة مركزها و. إذا كان ق(أب) = ٩٠°.
فأوجد ق(أوب).



....

....

....

حاول أن تحل 1

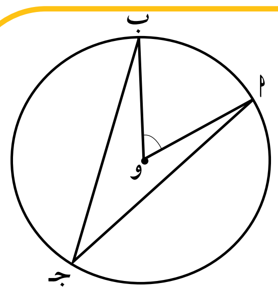
إذا كان قياس زاوية مركزية ٣٥°، فأوجد قياس القوس على الدائرة المحصور بين ضلعيها.

....

....

نظرية 2

في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

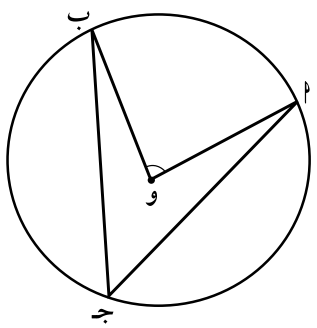


ق(أجـب) = $\frac{١}{٢}$ ق(أوب) = $\frac{١}{٢}$ ق(أب)

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

مثال 2

في الشكل المقابل: إذا كان ق(⌒أب) = ٨٠° فأوجد ق(أجب).



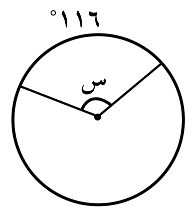
حاول أن تحل 2

إذا كان قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي ٥٤°، فأوجد قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

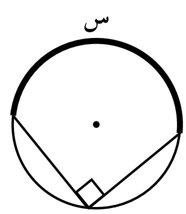
كراسة التمارين

(١) أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية:

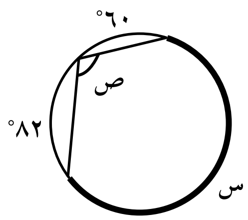
(أ)



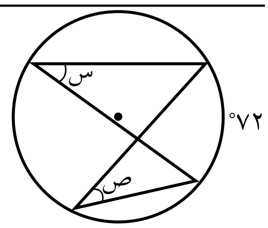
(ب)



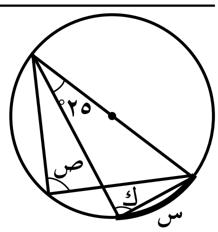
(جـ)



(د)



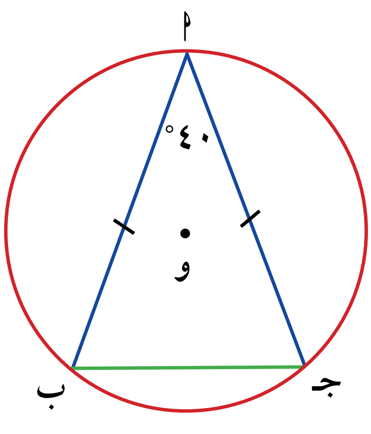
(هـ)



مثال 3

في الشكل المقابل أب جـ مثلث متطابق الضلعين حيث أ، ب، جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و، ق(ب أ̂ جـ) = ٤٠°.

أوجد قياس كل من الأقواس أب⌒، ب جـ⌒، أجـ⌒ .



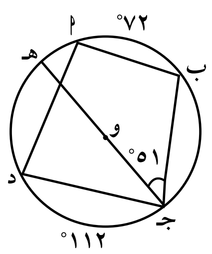
حاول أن تحل 3

في المثال (٣) إذا كان جـ هـ←، منصف الزاوية الداخلية أجـ̂ب ويقطع الدائرة في النقطة هـ.

ما قياس القوس الأصغر أهـ⌒؟

كراسة التمارين

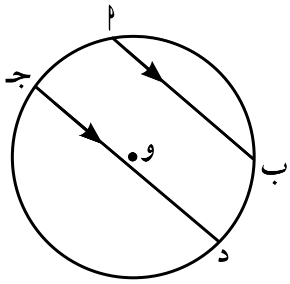
(٤) في الشكل المقابل، أوجد قياس كل من:



(أ) القوس الأصغر ب جـ⌒.

(ب) ق(ب̂).

(جـ) ق(ب جـ̂ د).

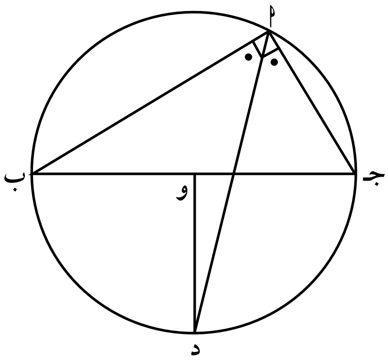


(٥) في الشكل المقابل فيه الوتر $\overline{\text{ب جـ}}$.

أثبت أن: $\overset{\frown}{\text{أ جـ}} \cong \overset{\frown}{\text{ب د}}$.

مثال 4

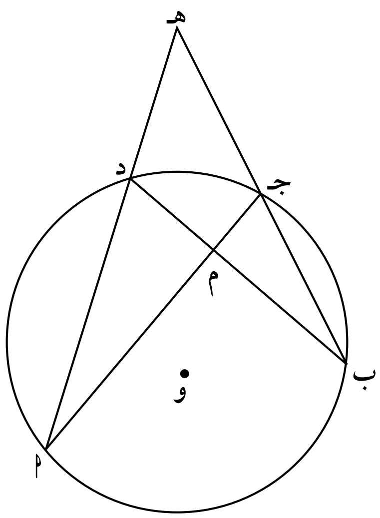
في الشكل المقابل دائرة مركزها و. أثبت أن $\overline{\text{د و}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.



حاول أن تحل 4

في المثال (٤)، إذا كان ق(أبَ جـ) = ٣٠°، أوجد ق(أدَ ب).

مثال 5

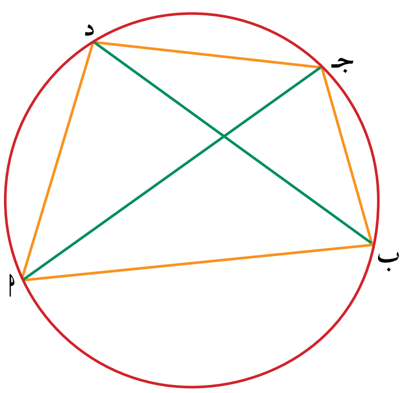


في الشكل المقابل، أثبت أن: $\text{ق}(\widehat{\text{ب م أ}}) = \frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{ب أ}}) + \text{ق}(\overset{\frown}{\text{جـ د}})}{٢}$.

حاول أن تحل 5

في المثال (٥)، أثبت أن $\text{ق}(\widehat{\text{ب هـ أ}}) = \frac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{ب أ}}) - \text{ق}(\overset{\frown}{\text{جـ د}})}{٢}$

مثال 6



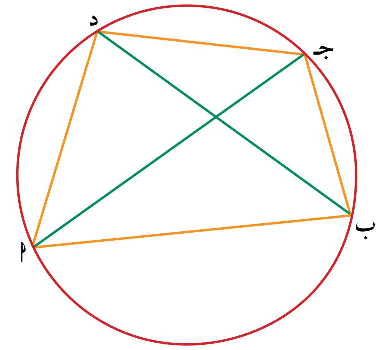
أ ب جـ د شكل رباعي دائري.

أثبت أن $\text{ق}(\widehat{\text{أ ب د}}) = \text{ق}(\widehat{\text{أ جـ د}})$.

معلومة رياضية:

الشكل الرباعي الدائري هو مضلع رباعي تقع رؤوسه على دائرة.

حاول أن تحل 6



في المثال (٦)، أثبت أن ق (أ دَ ب) = ق (أ جَ ب)

....

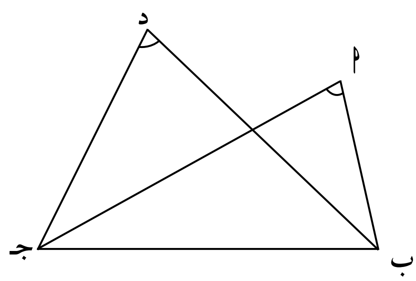
....

....

....

....

نتائج

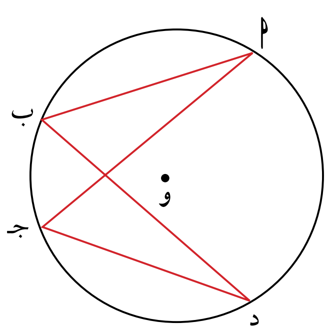


١ كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.

٢ كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.

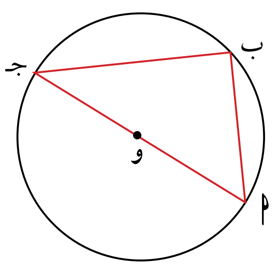
٣ كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.

٤ في الشكل إذا تطابقت الزاويتان أ̂، د̂ المرسومات على القاعدة ب جـ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أ ب جـ د رباعيًّا دائريًّا.



أبَ د ، أجَ د تحصران أد⌒

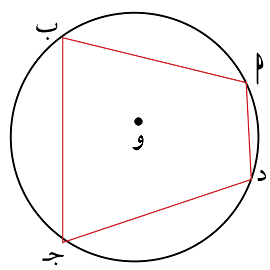
∴ ق(أبَ د) = ق(أجَ د)



أبَ جـ تحصر أجـ⌒ (نصف دائرة)

∴ ق(أبَ جـ) = ٩٠°

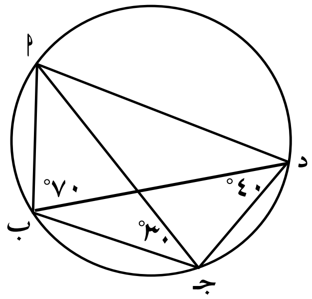
(أبَ جـ) زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة وهي زاوية قائمة



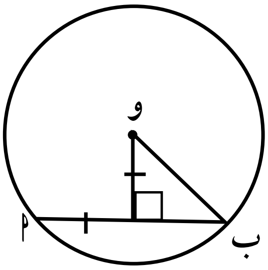
ق(أ̂) + ق(جـ̂) = ١٨٠°

ق(ب̂) + ق(د̂) = ١٨٠°

(٧) في الشكل المقابل أوجد ق(جـ بَ د).



(٨) في الشكل المقابل، أوجد قياس القوس الأصغر أب⁀.



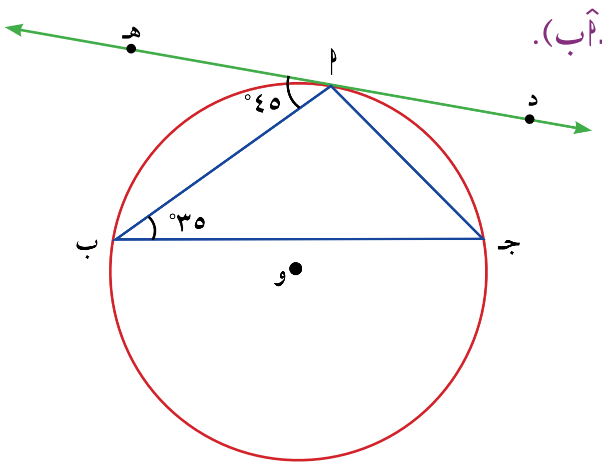
نظرية 3

(١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

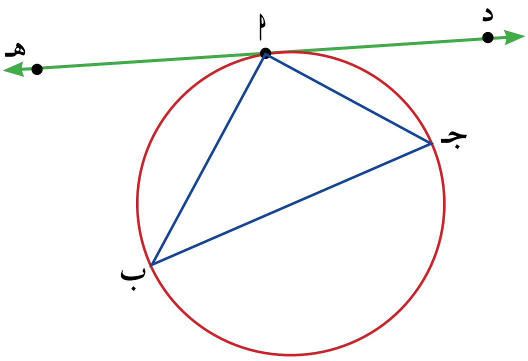
(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

مثال 7

في الشكل المقابل إذا كان د هـ↔ مماسًا للدائرة عند أ، فأوجد ق(جـ أ̂ ب).



حاول أن تحل 7



في الشكل المقابل، لدينا: ق(دأ̂جـ) = ٤٠°، ق(هـأ̂ب) = ٥٠°.

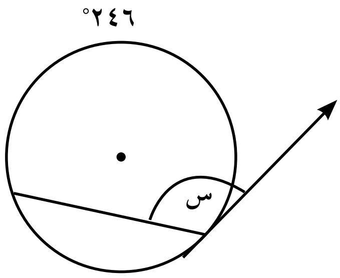
أ) أوجد قياسات زوايا المثلث أب جـ.

ب) أثبت أن $\overline{\text{جـ ب}}$ قطر للدائرة.

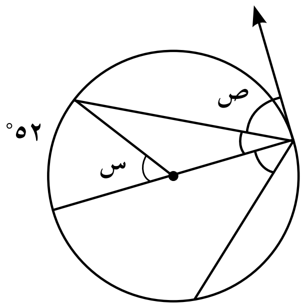
كراسة التمارين

(٢) أوجد قيمة المجهول في كل من الأشكال التالية بمعلومية أن الشعاع في كل رسم يمثل مماسًا للدائرة.

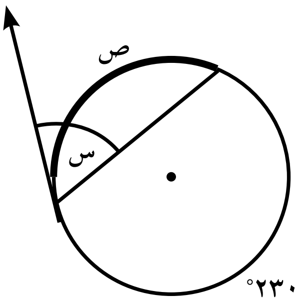
(أ)



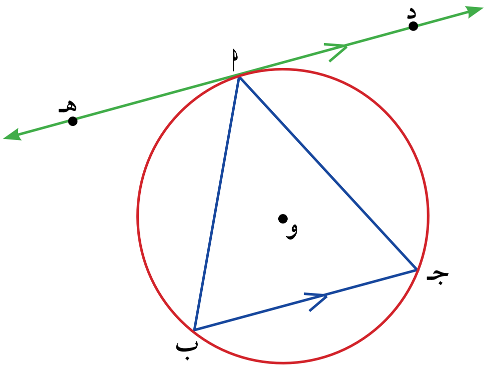
(ب)



(جـ)

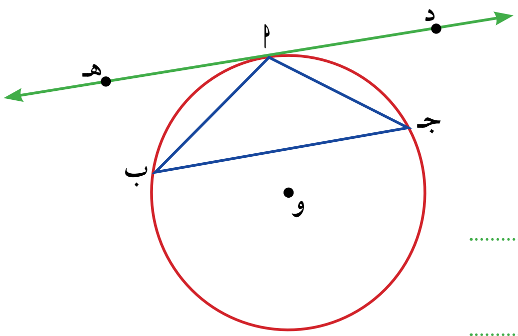


مثال 9



في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ،
$\overline{\text{ب جـ}}$ وتر في الدائرة موازٍ للمماس $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$.
أثبت أن المثلث أب جـ متطابق الضلعين.

حاول أن تحل 9



في الشكل المقابل، إذا كان لدينا $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ.
المثلث أب جـ متطابق الضلعين (أب = أجـ).
أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

٦–٤

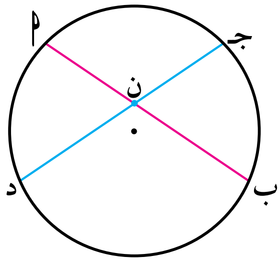
الدائرة : الأوتار المتقاطعة - المماس

أولاً : تقاطع الأوتار داخل الدائرة

نظرية 1

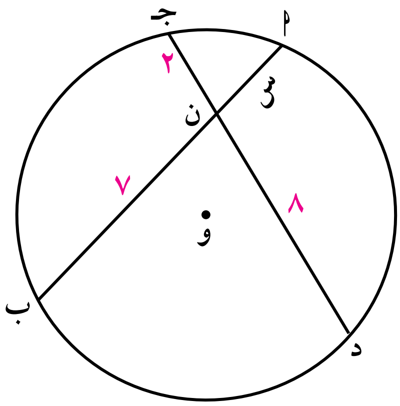
إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.

ن؟ × ن ب = ن جـ × ن د



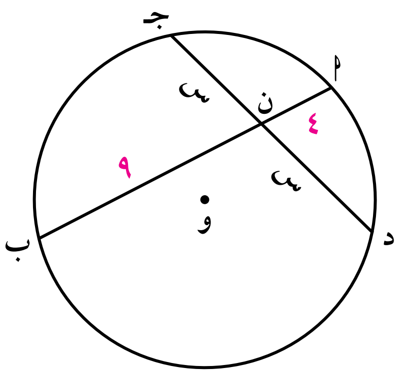
مثال 1

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



حاول أن تحل 1

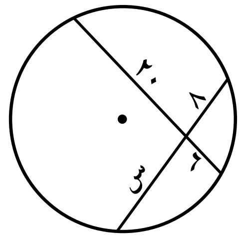
في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



كراسة التمارين

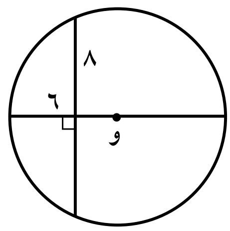
في التمرينين (٣–٤)، أوجد قيمة كل متغيّر.

(٣)



في التمرينين (٥–٦)، أوجد طول قطر كل دائرة.

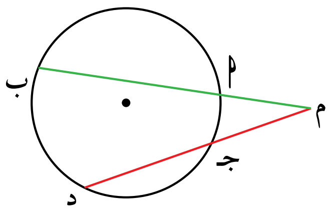
(٥)



ثانياً : تقاطع الأوتار خارج الدائرة

نتيجة 1

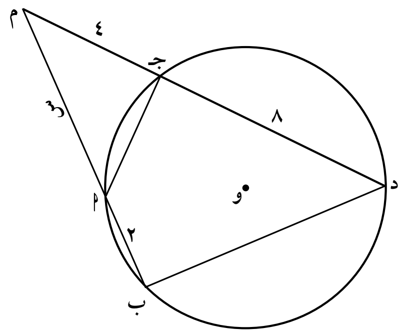
إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.



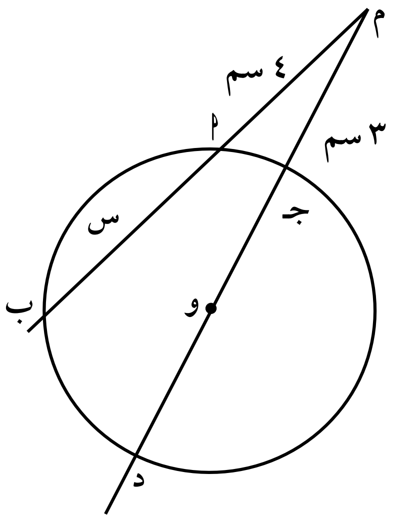
م أ × م ب = م جـ × م د.

مثال 3

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



حاول أن تحل 3

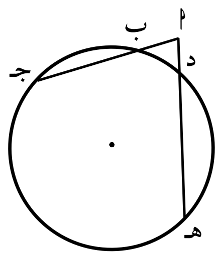


في الشكل المقابل، دائرة مركزها و. طول نصف قطرها يساوي ٤ سم.

أوجد قيمة س.

كراسة التمارين

(١) في الشكل المقابل:



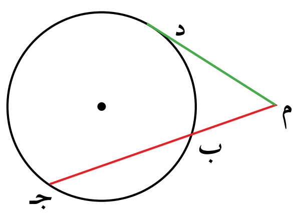
أجـ = ٢٠، ب جـ = ١٥

أهـ = ٢٥.

أوجد: د هـ.

ثالثاً : تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة

نتيجة 2

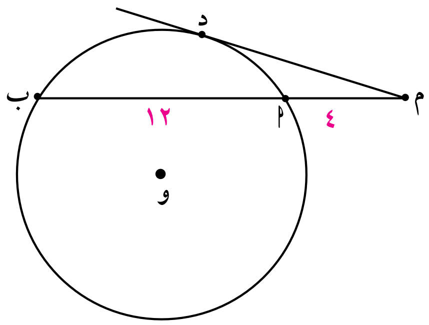


إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

$(م د)^2$ = م ب × م جـ .

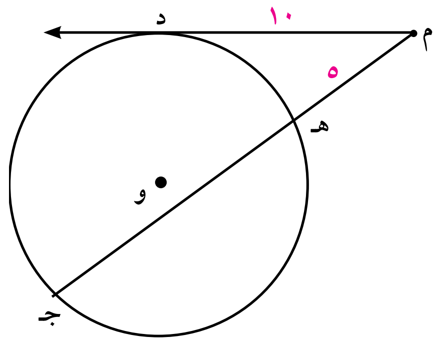
مثال 4

في الشكل المقابل، أوجد طول القطعة المماسية $\overline{م د}$ علمًا بأن: م أ = ٤ سم ، أ ب = ١٢ سم.



حاول أن تحل 4

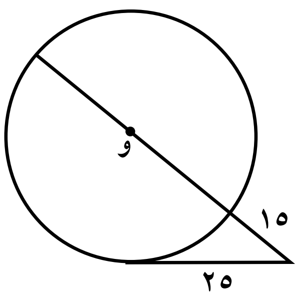
في الشكل المقابل، $\overline{م د}$ قطعة مماسية حيث م د = ١٠



كراسة التمارين

أوجد طول قطر كل دائرة.

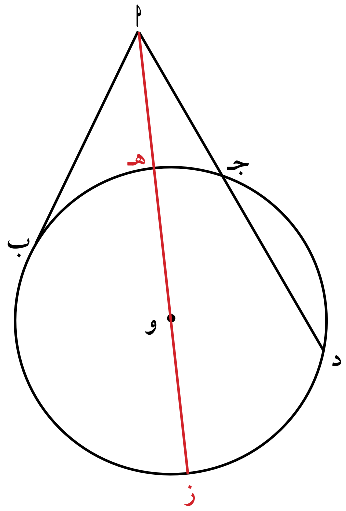
(٦)



مثال 5

أراد أحد الأشخاص معرفة طول القطعة المماسية من النقطة ﺍ إلى النقطة ب على الدائرة، فأخذ مسطرة ووضع الصفر عند النقطة ﺍ فوجد أن المسطرة تتقاطع مع الدائرة عند النقطة جـ بحيث ﺍجـ = ٤ سم وعند النقطة د بحيث ﺍ د = ٩ سم.

ما طول القطعة المماسية $\overline{\text{اب}}$؟

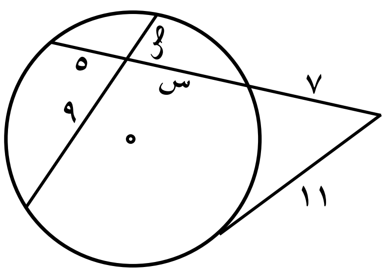


حاول أن تحل 5 في المثال (٥). أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كانت ﺍ هـ = ٢ سم.

كراسة التمارين

أوجد قيمة كل من س ، ص.

(٤)



تنظيم البيانات في مصفوفات

تعريف

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة

الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر

رتبة المصفوفة

نرمز إلى المصفوفة بأحد حروف الهجاء ونضع تحته خطًّا، نكتب $\underline{أ}$ ونقرأ **المصفوفة** أ.

عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان **رتبة المصفوفة** وتكتب م × ن.

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٧ & ٦ \end{bmatrix}$$

المصفوفة $\underline{أ}$ هي من **الرتبة ٢ × ٣**.

ملاحظة

لكتابة رتبة المصفوفة نكتب أولًا عدد الصفوف يليه عدد الأعمدة.

مثال 1

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٤ \\ -٧ & -٣ & ٢ \\ ٩ & ٠ & ١ \end{bmatrix} \qquad \underline{ب} = \begin{bmatrix} -٣ & \frac{٢}{٣} & -٤ \end{bmatrix} \qquad \underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$$

....

....

....

حاول أن تحل 1

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$$أ = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ٠ \\ -٢ & ٠{,}٥ & ٧ \end{bmatrix}$$

$$ب = \begin{bmatrix} -٨ & ٣ & ١٠ \end{bmatrix}$$

$$جـ = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ١ & -٥ \\ ٠{,}٦ & ٩ \end{bmatrix}$$

....

....

....

ترميز عناصر المصفوفة

يحدد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما، فمثلًا، في المصفوفة أ العنصر الذي في الصف الأول والعمود الثالث نرمز إليه بالرمز $أ_{٣١}$ (الصف أولًا والعمود ثانيًا).

$$أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{bmatrix}$$

العنصر في الصف الأول والعمود الثالث: $أ_{٣١}$

مثال 3

في المصفوفة: $ب = \begin{bmatrix} ١٢ & ١ & ٥ & ٤ \\ ٢ & ٦ & ٢ & ٣{,}٥ \\ ١ & ٠ & ١ & -٤ \end{bmatrix}$ اكتب قيمة كل عنصر مما يلي:

أ) $ب_{٢٢}$ ب) $ب_{١٣}$ جـ) $ب_{١١}$

....

....

....

حاول أن تحل 3

في المثال (٣)، أوجد $ب_{٢٣}$ من المصفوفة ب.

أنواع المصفوفات

- **المصفوفة المربعة:** هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.

وفي ما عدا ذلك، تسمى المصفوفة: مصفوفة مستطيلة Rectangular Matrix.

- **المصفوفة الأفقية:** هي مصفوفة مكونة من صف واحد Horizontal Matrix.
- **المصفوفة العمودية:** هي مصفوفة مكونة من عمود واحد Vertical Matrix.
- **فكر وناقش:** هل يمكن لمصفوفة أن تكون عمودية وأفقية معًا؟

مثال 4 صنّف كلًّا من المصفوفات التالية:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & -٥ & ١ \\ ٧ & ٤ & ٠ \\ ٨ & ٢ & ٣ \end{bmatrix} \qquad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠,٢ \end{bmatrix}$$

$$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} -٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix} \qquad \underline{د} = \begin{bmatrix} ١,٤ & ٣ & -٢ \\ ٥ & ٨ & ١٢ \end{bmatrix}$$

....

....

....

....

معلومة رياضية

المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار تسمى مصفوفة صفرية **Zero Matrix**

ويرمز إليها بالرمز $\underline{\text{٠}}_{م \times ن}$

حاول أن تحل 4 صنّف المصفوفات في المثال (١).

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٤ \\ -٧ & -٣ & ٢ \\ ٩ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} -٣ & \frac{٢}{٣} & -٤ \end{bmatrix}$ ، $جـ = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$

المصفوفات المتساوية

تكون **مصفوفتان متساويتين** إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح.

المصفوفة التي عدد صفوفها (جـ)، وعدد أعمدتها (د) هي من الرتبة جـ × د.

مثال 5

هل المصفوفتان أ، ب متساويتان؟ فسّر.

$أ = \begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & -٠,٧٥ \\ -٢ & \frac{١}{٢} \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٠,٢ & \frac{-٣}{٤} \\ -٢ & ٠,٥ \end{bmatrix}$

حاول أن تحل 5 هل المصفوفتان س، ص متساويتان؟ فسّر.

$س = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ -٢ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $ص = \begin{bmatrix} ٩ & -١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

يمكنك أن تستخدم تعريف المصفوفات المتساوية لحلّ المعادلات.

مثال 6

إذا كانت: $\begin{bmatrix} \text{٤} & \text{٢س − ٥} \\ \text{٣ص + ١٢} & \text{٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٤} & \text{٢٥} \\ \text{ص + ١٨} & \text{٣} \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

....

....

....

....

حاول أن تحل 6

أ إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{٥} & \text{٣٨} \\ \text{٤ص − ١٠} & \text{٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٥} & \text{س + ٨} \\ \text{−ص} & \text{٣} \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

....

....

....

....

ب إذا كانت $\begin{bmatrix} \text{س − ص} & \text{س + ص} & \text{٣س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{−١٠} & \text{٤} & \text{−٩} \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

....

....

....

....

....

جمع وطرح المصفوفات

لجمع مصفوفتين $\underline{أ}$، $\underline{ب}$ يجب أن تكونا من **الرتبة نفسها**.

نجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في $\underline{أ}$، $\underline{ب}$. مصفوفة الجمع لها رتبة كل من المصفوفتين $\underline{أ}$، $\underline{ب}$.

$\underline{جـ} = \underline{أ} + \underline{ب}$

$\underline{أ}$ من الرتبة م × ن ، $\underline{ب}$ من الرتبة م × ن

∴ $\underline{جـ}$ من الرتبة م × ن.

$جـ_{وس} = أ_{وس} + ب_{وس}$.

مثال ١

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٢- & ٠ \\ ٣ & ٥- & ٧ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣- & ١ \\ ٢ & ٤- \\ ١- & ٥ \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ & ٣- \\ ٩- & ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$

فأوجد إن أمكن:

أ $\underline{أ} + \underline{ب}$

ب $\underline{أ} + \underline{جـ}$

وإذا لم يكن الجمع ممكنًا، فاذكر السبب.

حاول أن تحل 6

أوجد ناتج ما يلي: $\begin{bmatrix} ٢٤ & ١٢- \\ ٥ & ٣- \\ ١٠ & ١- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١- & ٣- \\ ٤ & ٥- \\ ٧- & ١ \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

مثال 3

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١- & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢- & ٥ \\ ٠ & ١- \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٧ & ٢- \end{bmatrix}$

فأوجد: $\underline{أ} + \underline{ب}$ ، $\underline{ب} + \underline{أ}$ ، $(\underline{أ} + \underline{ب}) + \underline{جـ}$ ، $\underline{أ} + (\underline{ب} + \underline{جـ})$ ، $\underline{أ} + ن_{٢\times٢}$ ، $\underline{أ} + (-\underline{أ})$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 3

في المثال (٣)، أوجد جـ + ب ، (جـ + ب) + أ.

خواص جمع المصفوفات

إذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات من الرتبة م × ن فإن:

- أ + ب هي من الرتبة م × ن — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- أ + ب = ب + أ — خاصية الإبدال Commutative
- (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) — خاصية التجميع Associative
- $\underline{0}_{م×ن}$ + أ = أ + $\underline{0}_{م×ن}$ = أ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م × ن
- أ + (–أ) = $\underline{0}_{م×ن}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي).

كراسة التمارين

في التمرينين (١–٢)، أوجد ناتج كلّ مما يلي:

(٢)
$$\begin{bmatrix} ٦ & -٣ \\ -٧ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٦ & ٣ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix}$$

طرح المصفوفات

يمكن طرح المصفوفات باستخدام خاصية مصفوفة المعكوس الجمعي.

إذا كان للمصفوفتين أ ، ب الرتبة نفسها، فإن أ − ب = أ + (−ب).

ملاحظة: إذا كان أ ≠ ب ولهما الرتبة نفسها فإن: أ − ب ≠ ب − أ وبالتالي، عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية.

مثال 4

$$\text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٢ & -٢ \end{bmatrix} \quad ، \quad \text{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & -١ \end{bmatrix}$$

أوجد أ − ب ، ب − أ

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 4

أوجد ناتج كل مما يلي:

أ
$$\begin{bmatrix} ٠ & ٣ & -٤ \\ ١٠ & ٥ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & -٩ & ٦ \\ ٨ & ١ & -٢ \end{bmatrix}$$

....

....

....

....

ب
$$\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ١٠ & -١ \end{bmatrix}$$

....

....

في التمارين (٥–٩)، اذكر ما إذا كان الجمع أو الطرح ممكنًا أو غير ممكن مع تفسير إجابتك:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & \frac{١}{٢} & ٤ & ٥ \\ ٢ & \frac{٣}{٥} & ٨ & ٩ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٠,٣٣ & ٤ \\ -٧ & ٠,١٥ \end{bmatrix}$$

$$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤٤ \\ ١ & ٠ \\ ١٤ & ٢٣,٣ \end{bmatrix} \quad ، \quad \underline{د} = \begin{bmatrix} -٢ & -٤ & \frac{٧}{٨} & \frac{١١}{٢} \\ ٣ & ٢ & -١ & -\frac{١٠}{١١} \end{bmatrix}$$

(٥) $\underline{أ} + \underline{د}$ ....

(٦) $\underline{جـ} + \underline{ب}$ ....

(٧) $\underline{أ} + \underline{ب}$ ....

(٨) $\underline{جـ} - \underline{د}$ ....

(٩) $\underline{ب} + \underline{جـ}$ ....

حل المعادلات المصفوفية

المعادلة المصفوفية هي معادلة إحدى مصفوفاتها غير معلومة (المتغير).

يمكنك استخدام خواص المساواة لحل المعادلات المصفوفية.

لأي مصفوفات $\underline{أ}$، $\underline{ب}$، $\underline{جـ}$ لها الرتبة نفسها إذا كان: $\underline{أ} = \underline{ب}$، فإن: $\underline{أ} + \underline{جـ} = \underline{ب} + \underline{جـ}$، $\underline{أ} - \underline{جـ} = \underline{ب} - \underline{جـ}$.

مثال5

حل المعادلة المصفوفية التالية:

$$\underline{س} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٨ & ٩ \end{bmatrix}$$

....

....

....

....

حاول أن تحل 5

أوجد س حيث:

$$س - \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٧ \\ -٤ & ٤ \end{bmatrix}$$

....

....

....

....

كراسة التمارين

في التمارين (١٠–١٣)، أوجد س في كل مما يلي:

(١٠) $$\begin{bmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix} + س = \begin{bmatrix} ٥ & ١ & ٨ \\ -٦ & ٠ & ٥ \end{bmatrix}$$

....

....

....

....

(١١) $$س - \begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ٧٥ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٥٠ \\ ٥٠ & -١٠ \end{bmatrix}$$

....

....

....

....

ضرب المصفوفات

ضرب مصفوفة في عدد

يمكنك أن تضرب عدد حقيقي في مصفوفة مثل:

$$٣\begin{bmatrix}٢ & ٥\\ ٤ & -٣\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}٦ & ١٥\\ ١٢ & -٩\end{bmatrix}$$

الضرب القياسي

الضرب القياسي هو عملية ضرب مصفوفة $\underline{أ}$ في عدد حقيقي ك : ك ≠ ٠

الناتج هو المصفوفة ك $\underline{أ}$.

نحصل على المصفوفة ك $\underline{أ}$ بضرب كل عنصر من $\underline{أ}$ في ك.

إذا كان ك = ٠، يكون الناتج مصفوفة صفرية.

مثال3

حل المعادلة: ٤$\underline{س}$ + ٢ $\begin{bmatrix}٣ & ٤\\ -٢ & ١\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}١٠ & ٠\\ ٤ & ٢\end{bmatrix}$، ثم تحقق من إجابتك.

الحل:

حاول أن تحل 3 حل كل معادلة مما يلي:

أ) $$٢\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

ب) $$-٣\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & -١ \\ ٢ & -٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ -١٩ & -١٨ \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات

المصفوفة أ هي مصفوفة من الرتبة م × ن والمصفوفة ب هي مصفوفة من الرتبة ن × ر، عندئذٍ مصفوفة الضرب أ × ب هي مصفوفة من الرتبة م × ر.

مصفوفة أ

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$$

٣ × ٢

٣ صفوف

عمودان

مصفوفة ب

$$\begin{bmatrix} ٧ & ٨ & ٩ & ١٠ \\ ١١ & ١٢ & ١٣ & ١٤ \end{bmatrix}$$

٢ × ٤

صفان

٤ أعمدة

متساويان

أبعاد مصفوفة الضرب ٣ × ٤

تكون مصفوفة الضرب معرّفة إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساويًا لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

$$أ_{م \times ن} \times ب_{ن \times ر} = جـ_{م \times ر}$$

مثال 4

أوجد ناتج أ × ب.

حيث $أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & -٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

أ : سلامة علي الركاض

حاول أن تحل 4

ب أوجد ناتج الضرب: $\begin{bmatrix} ٠ & ١- \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ & ٣- \\ ٠ & ٥ \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

مثال 5

بفرض $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٨ & ١- \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ٨ \\ ٥- & ٢ \end{bmatrix}$

حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب: $\underline{أ} \times \underline{ب}$، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ معرّفة أو غير معرّفة.

أوجد رتبة كل مصفوفة ضرب معرّفة.

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 5

بفرض: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٠ & -١ & ٠ \\ ٢ & -٥ & ١ & ٨ \end{bmatrix}$

أ حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب $\underline{أ} \times \underline{ب}$، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ معرّفة أو غير معرّفة.

ب أوجد ناتج الضرب المعرّف.

جـ بفرض أن المصفوفة $\underline{أ}$ هي مصفوفة من الرتبة ٢ × ٣، المصفوفة $\underline{ب}$ هي مصفوفة من الرتبة ٣ × ٢.

هل $\underline{أ} \times \underline{ب}$، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ متساويتان؟ وضّح إجابتك.

....

....

....

....

....

....

....

خواص ضرب المصفوفات المربعة

إذا كانت $\underline{أ}$، $\underline{ب}$ ، $\underline{جـ}$ مصفوفات من الرتبة م × م. فإن:

- $\underline{أ} \times \underline{ب}$: مصفوفة من الرتبة م × م.
- $(\underline{أ} \times \underline{ب}) \times \underline{جـ} = \underline{أ} \times (\underline{ب} \times \underline{جـ})$ — خاصية التجميع للضرب
- $\underline{أ} \times (\underline{ب} + \underline{جـ}) = \underline{أ} \times \underline{ب} + \underline{أ} \times \underline{جـ}$ — خاصية التوزيع
- $(\underline{ب} + \underline{جـ}) \times \underline{أ} = \underline{ب} \times \underline{أ} + \underline{جـ} \times \underline{أ}$
- $\underline{٠}_{م \times م} \times \underline{أ} = \underline{أ} \times \underline{٠}_{م \times م} = \underline{٠}_{م \times م}$ — خاصية الضرب في الصفر

ملاحظة: عملية ضرب المصفوفات **ليست إبدالية**.

مربع المصفوفة

إذا كانت $\underline{م}$ مصفوفة مربعة، فإن المصفوفة $\underline{م} \times \underline{م}$ يرمز إليها بالرمز $\underline{م}^{٢}$.
وتقرأ مربع المصفوفة $\underline{م}$. وبالمثل $\underline{م}^{٣} = \underline{م} \times \underline{م} \times \underline{م}$، $\underline{م}^{٤} = \underline{م}^{٣} \times \underline{م}$، ....

مثال 6 إذا كانت $\underline{م} = \begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

أوجد: $\underline{م}^{٢}$ ، $\underline{م}^{٣}$

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 6 إذا كانت $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ١- \end{bmatrix}$. أوجد: $\underline{ب}^{٢}$ ، $\underline{ب}^{٣}$.

....

....

....

....

....

(١٦) أوجد قيمة كل من س ، ص إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} \text{٢س} & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ \text{٢س} & \text{−ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} −٤ & −٩ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$$

....

....

....

....

....

٧–٤ مصفوفات الوحدة والنظير الضربي

مصفوفة الوحدة

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي ١، وبقية العناصر صفر تسمى **مصفوفة الوحدة** للضرب. ويرمز إليها بـ $\underline{\text{و}}$.

$\underline{\text{و}}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{و}}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

بفرض أن $\underline{\text{م}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{د} \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{و}} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$\underline{\text{م}} \times \underline{\text{و}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \text{أ}\times١ + \text{ب}\times٠ & \text{أ}\times٠ + \text{ب}\times١ \\ \text{جـ}\times١ + \text{د}\times٠ & \text{جـ}\times٠ + \text{د}\times١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} = \underline{\text{م}}$

كذلك $\underline{\text{و}} \times \underline{\text{م}} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} = \underline{\text{م}}$

أي أن: $\underline{\text{م}} \times \underline{\text{و}} = \underline{\text{و}} \times \underline{\text{م}} = \underline{\text{م}}$

$\underline{\text{و}} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

وبصورة عامة $\underline{\text{و}}_{\text{ن}\times\text{ن}}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة ن.

النظير الضربي

إذ كانت $\underline{أ}$، $\underline{س}$ مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث يكون $\underline{أ} \times \underline{س} = \underline{و}$ ، فإن $\underline{س}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ}$.

ويرمز إليها بِـ $\underline{أ}^{-١}$.

إذًا $\underline{أ} \times \underline{أ}^{-١} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{أ} = \underline{و}$

مثال 1

أثبت أن $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$.

حاول أن تحل 1

أ) أثبت أن المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢٫٥ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي لِـ $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

ب) في المثال (١)، أثبت أن $\underline{أ}$ هي النظير الضربي لِـ $\underline{ب}$.

محدد مصفوفة مربعة

ترتبط كل مصفوفة مربعة مـ بعدد حقيقي يسمى **محدد مـ** ويرمز إلى هذا العدد بالرمز **| مـ |** ويقرأ **محدد المصفوفة** مـ.
سنقتصر في هذا الدرس على محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} \text{جـ} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ب} \end{bmatrix}$ هو أ د − ب جـ

نكتب | مـ | = $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ب} \end{vmatrix}$ = أ د − ب جـ

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر **بالمصفوفة المنفردة**

مثال 2

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية: مـ = $\begin{bmatrix} \text{٤} & \text{-٣} \\ \text{-٥} & \text{٢} \end{bmatrix}$ ، بـ = $\begin{bmatrix} \text{-٣} & \text{٢} \\ \text{-٢} & \text{٣} \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} \text{٠} & \text{س} \\ \text{س} & \text{٠} \end{bmatrix}$

....

....

....

....

حاول أن تحل 1

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

أ) مـ = $\begin{bmatrix} \text{٢} & \text{٤} \\ \text{٢} & \text{٤} \end{bmatrix}$ ب) بـ = $\begin{bmatrix} \text{٧} & \text{٨} \\ \text{١٠} & \text{٢} \end{bmatrix}$ جـ) جـ = $\begin{bmatrix} \text{٣} & \text{ك} \\ \text{-٣} & \text{٣ - ك} \end{bmatrix}$

....

....

....

ملاحظة

ليس لكلّ المصفوفات المربّعة نظير ضربي (معكوسات). سوف يساعدك الاختبار التالي على استنتاج ما إذا كانت المصفوفة ٢ × ٢ لها نظير ضربي، وكيف يمكنك إيجاده إن وجد.

خاصية

بفرض أن: $\underline{م} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ إذا كان أ د − ب جـ ≠ ٠ ، فإن $\underline{م}$ لها نظير ضربي $\underline{م}^{-1}$ حيث:

$$\underline{م}^{-1} = \frac{١}{|\underline{م}|} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$$

$$\underline{م}^{-1} = \frac{١}{أ د - ب جـ} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$$

معلومة رياضية:
المصفوفة التي محددها الصفر ليس لها نظير ضربي وتسمى مصفوفة منفردة.

مثال 3

إذا كانت المصفوفة $\underline{م} = \begin{bmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

....

....

....

حاول أن تحل 3

إذا كانت المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢س \end{bmatrix}$ منفردة، أوجد قيمة س.

....

....

....

مثال 4

هل للمصفوفة: $\underline{م} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربي؟ في حالة الإيجاب أوجده.

....

....

....

....

حاول أن تحل 4

هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

....

....

....

هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٣ & -٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

....

....

....

مثال 5

حدّد أي مصفوفة مما يلي لها نظير (معكوس) ضربي، ثم أوجده.

أ $\underline{م} = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

ب $\underline{ن} = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 5

حدّد أي مصفوفة من المصفوفات التالية لها نظير ضربي (معكوس)، ثم أوجده.

أ $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} ٢,٣ & ٠,٥ \\ ٧,٢ & ٣ \end{bmatrix}$

كراسة التمارين

في التمارين (٣–٥)، أوجد محدّد كل مصفوفة.

(٣) $\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٢- & ٦- \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} \frac{٢}{٣} & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٤} & \frac{٣}{٥} \end{bmatrix}$

(٥) $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$

(١٢) $\underline{س} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣١ & ١٦ \\ ٢٧ & ١٢ \end{bmatrix}$

في التمارين (١٠–١٢)، حلّ كل معادلة في س. وإذا كان من غير الممكن حلها، فاكتب السبب.

(١٠) $\begin{bmatrix} ١٢ & ٧ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix} \times \underline{س} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

٧–٥

حل نظام من معادلتين خطيتين

الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة

مثال١ حلّ النظام: $\left\{\begin{array}{l} س + ص = ٣ \\ س - ص = ٧ \end{array}\right.$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل ١ حلّ النظام: $\left\{\begin{array}{l} ٥س + ٣ص = ٧ \\ ٣س + ٢ص = ٥ \end{array}\right.$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

....

....

....

....

....

....

....

استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين

مثال1

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٤س - ٥ص + ٧ = ٠ \\ ٣ص - ٦س + ٣ = ٠ \end{cases}$

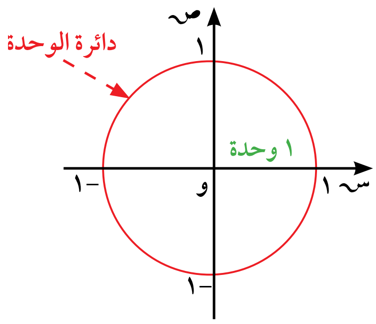
حاول أن تحل 1

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٣س + ٢ص = -٦ \\ -٤س - ٣ص - ٧ = ٠ \end{cases}$

دائرة الوحدة في المستوي الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية

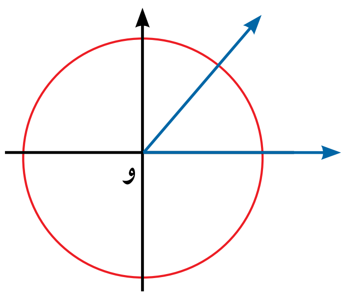
دائرة الوحدة

هي دائرة مركزها نقطة الأصل و، وطول نصف قطرها واحد وحدة.



النقطة المثلثية

هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.



ملاحظة: تكون النقطة (س، ص) نقطة مثلثية إذا وفقط إذا كان $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1$

سوف نستخدم الرمز θ لنرمز إلى قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي.

النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ

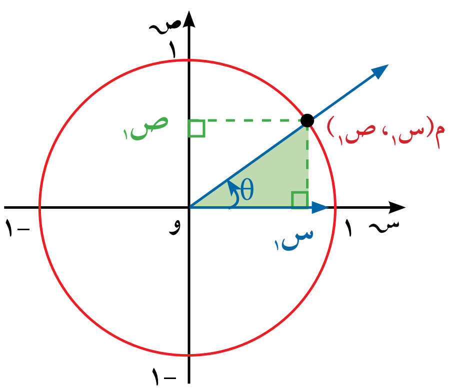
بفرض أنّ زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ، يقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة م $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$.

النسب المثلثية للزاوية θ هي:

$\text{جتا}\theta = \text{س}_1$ ، $\text{جا}\theta = \text{ص}_1$

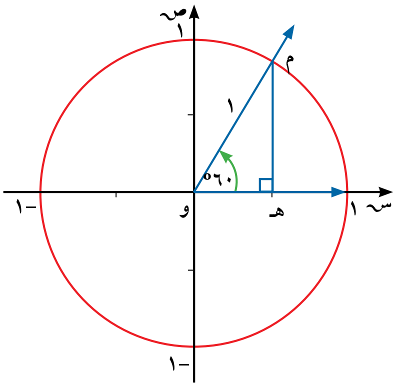
$\text{ظا}\theta = \dfrac{\text{ص}_1}{\text{س}_1}$ ، $\text{س}_1 \neq 0$ ، $\text{ظتا}\theta = \dfrac{\text{س}_1}{\text{ص}_1}$ ، $\text{ص}_1 \neq 0$

$\text{قا}\theta = \dfrac{1}{\text{س}_1}$ ، $\text{س}_1 \neq 0$ ، $\text{قتا}\theta = \dfrac{1}{\text{ص}_1}$ ، $\text{ص}_1 \neq 0$



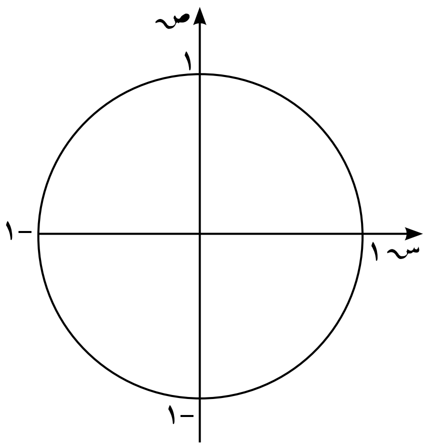
مثال 1

باستخدام دائرة الوحدة أوجد جا ٦٠°، جتا ٦٠°.



حاول أن تحل 1

على دائرة الوحدة، ارسم زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها ٤٥°. ثم أوجد جتا ٤٥°، جا ٤٥°.



يمكن استخدام مثلث قائم الزاوية لإيجاد جتاθ، جاθ لأي زاوية θ موجهة في الوضع القياسي لا يقع ضلعها النهائي في الربع الأول.

الدوال الدائرية -المثلثية

تعريف

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ حيث ٠ ≤ θ < ٢π فإن:

(١) دالة الجيب: د(θ) = جاθ — حيث جاθ = ص (الإحداثي الصادي للنقطة المثلثية)

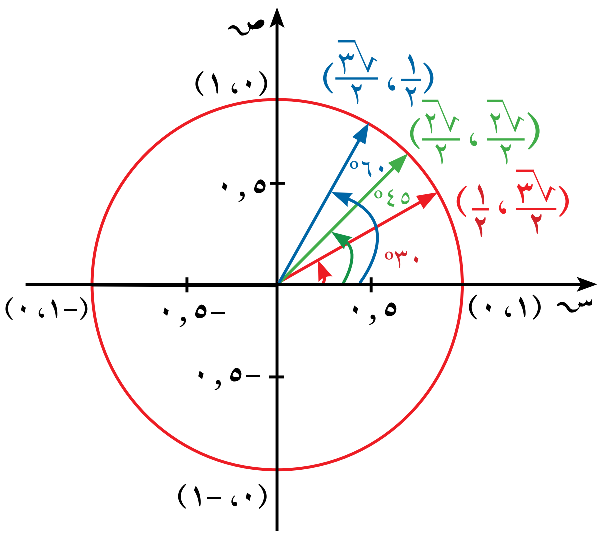
(٢) دالة جيب التمام: د(θ) = جتاθ — حيث جتاθ = س (الإحداثي السيني للنقطة المثلثية)

(٣) دالة الظل: د(θ) = ظاθ — حيث ظاθ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

(٤) دالة القاطع: د(θ) = قاθ — حيث قاθ = $\frac{١}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠

(٥) دالة قاطع التمام: د(θ) = قتاθ — حيث قتاθ = $\frac{١}{\text{ص}}$ ، ص ≠ ٠

(٦) دالة ظل التمام: د(θ) = ظتاθ — حيث ظتاθ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، ص ≠ ٠



مكن بسهولة إيجاد قيم الدوال المثلثية لبعض قيم θ الخاصة.

الدالة \ قياس الزاوية θ	٠° / ٠د	٣٠° / $\frac{\pi}{٦}$	٤٥° / $\frac{\pi}{٤}$	٦٠° / $\frac{\pi}{٣}$	٩٠° / $\frac{\pi}{٢}$	١٨٠° / π	٢٧٠° / $\frac{٣\pi}{٢}$	٣٦٠° / ٢π
جاθ	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١	٠	-١	٠
جتاθ	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	٠	-١	٠	١
ظاθ	٠	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	١	$\sqrt{٣}$	غير معرّف	٠	غير معرّف	٠

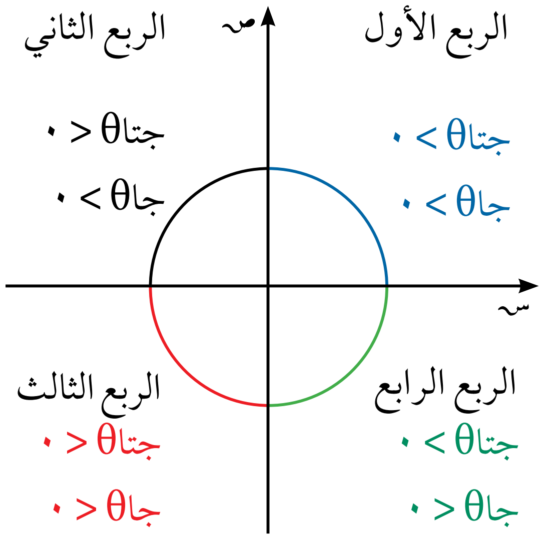
من الشكل: يمكن ملاحظة ما يلي:

إذا كانت θ في الربع الأول فإن: جاθ > ٠، جتاθ > ٠

إذا كانت θ في الربع الثاني فإن: جاθ > ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الثالث فإن: جاθ < ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الرابع فإن: جاθ < ٠، جتاθ > ٠



مثال 2

حدّد إشارة جاθ، جتاθ في كل مما يلي:

أ) $\theta = ١٣٥^\circ$ ب) $\theta = \frac{٧\pi}{٦}$ ج) $\theta = ٣٠٥^\circ$

حاول أن تحل 2

أ) إذا كانت $٩٠^\circ < \theta < ٢٧٠^\circ$. ما هي إشارة جتاθ؟

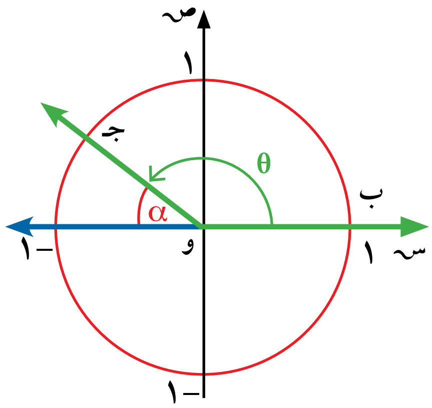
ب) إذا كانت $٠^\circ < \theta < \pi$. ما هي إشارة جاθ؟

زاوية الاسناد

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة ($\overleftarrow{\text{وب}}$، $\overleftarrow{\text{وجـ}}$) التي في وضع قياسي هي الزاوية **الحادة** α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.

فإذا كان α زاوية الإسناد فإن: $٠^\circ < \alpha < ٩٠^\circ$

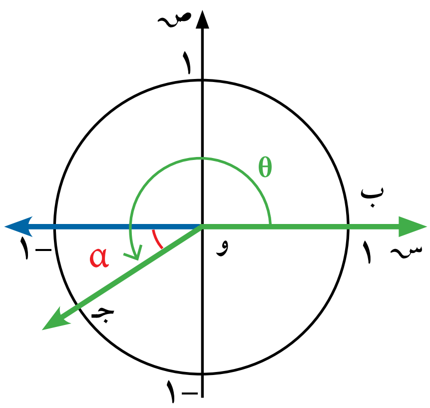
الأشكال التالية توضح الحالات المختلفة لإيجاد زاوية الإسناد:



عندما θ تقع في الربع الثاني

$\alpha^\circ = ١٨٠^\circ - \theta^\circ$

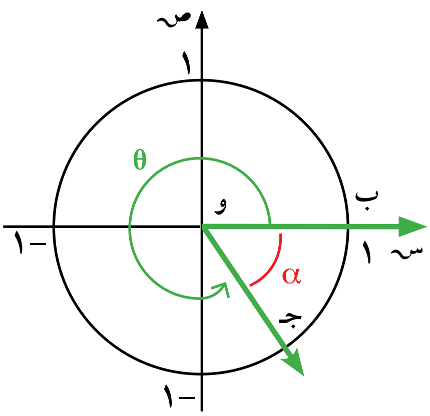
$\alpha^{\text{د}} = \pi - \theta^{\text{د}}$



عندما θ تقع في الربع الثالث

$\alpha^\circ = \theta^\circ - ١٨٠^\circ$

$\alpha^{\text{د}} = \theta^{\text{د}} - \pi$



عندما θ تقع في الربع الرابع

$\alpha^\circ = ٣٦٠^\circ - \theta^\circ$

$\alpha^{\text{د}} = ٢\pi - \theta^{\text{د}}$

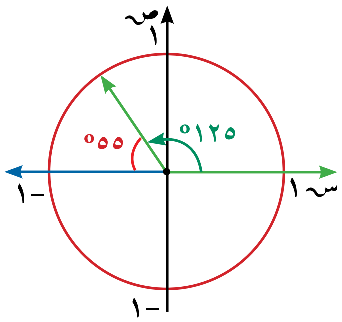
تذكر

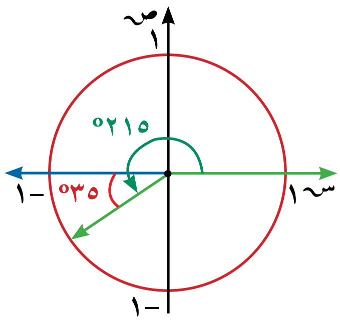
الزاوية الموجهة ب$\hat{\text{و}}$ جـ يمكن أن نرمز لها بالرمز ($\overleftarrow{\text{وب}}$، $\overleftarrow{\text{وجـ}}$) حيث $\overleftarrow{\text{وب}}$ الضلع الابتدائي، $\overleftarrow{\text{وجـ}}$ الضلع النهائي.

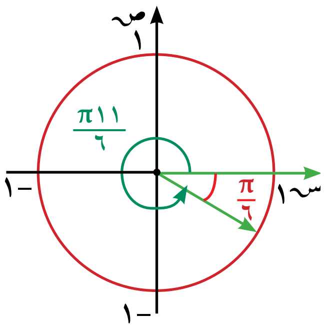
مثال 3

ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها لكل مما يلي:

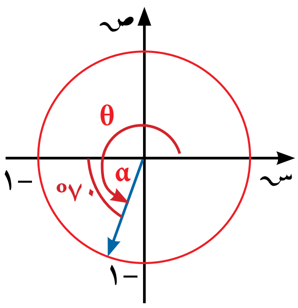
أ ١٢٥° ب ٢١٥° ج $\frac{١١\pi}{٦}$







حاول أن تحل 3



يبيّن الشكل المقابل، زاوية الإسناد α° للزاوية θ°. أوجد θ.

العلاقات بين الدوال المثلثية 1

تسمى جاθ، جتاθ، ظاθ النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ وتدعى **النسب المثلثية الأساسية**

علمًا بأن $-1 \leq$ جتاθ ≤ 1

$-1 \leq$ جاθ ≤ 1

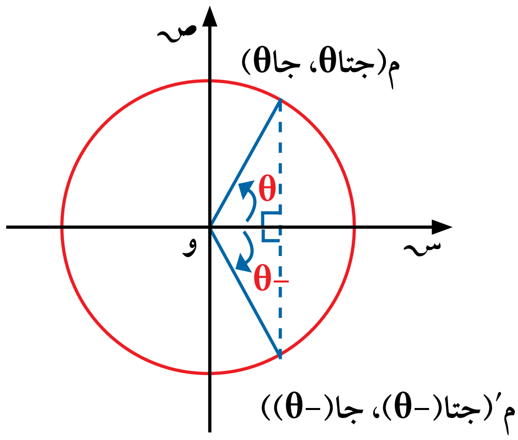
ظاθ $\in$ ح

النسب المثلثية للزاويتين θ، −θ.

النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور السينات حيث م(س، ص) $\xrightarrow{ع_{س}}$ م′(س، −ص)

ويكون جتا(−θ) = جتاθ

جا(−θ) = −جاθ



تذكر

$ع_{س}$ تعني انعكاس في محور السينات.

قانون

جتا(−θ) = جتاθ

جا(−θ) = −جاθ

وبالتالي ظا(−θ) = −ظاθ   بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

مثال 1

إذا كان جتا $\frac{٣\pi}{٨} = \frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}}{٢}$ ، فأوجد جتا $\left(-\frac{٣\pi}{٨}\right)$.

إذا كان جا ٣٦° ≃ ٠,٥٨٧٨ ، فأوجد جا(−٣٦°).

إذا كان ظا ٤٥° = ١ ، فأوجد ظا(−٤٥°).

حاول أن تحل 1

أكمل إذا كان:

أ) جا م = ٠,٣ فإن جا(− م) = ...

ب) جتا ل = ٠,٣٨ فإن جتا(− ل) = ...

جـ) ظا س = ٣,١٤ فإن ظا(− س) = ...

د) جتا(− ص) = $\frac{١}{٤}$ فإن جتا ص = ...

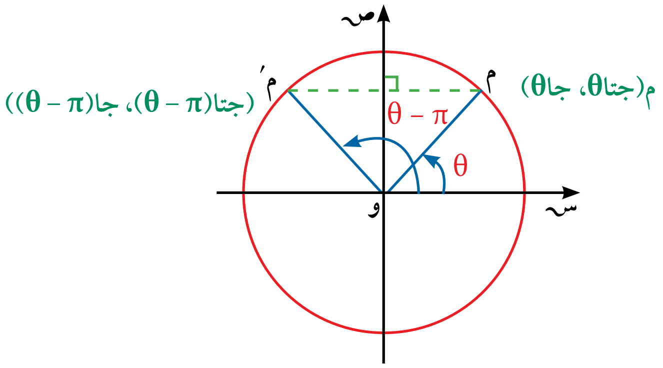
النسب المثلثية للزاويتين θ ، (π − θ).

النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور الصادات.

حيث م(س، ص) $\xrightarrow{ع_{ص}}$ م′(−س، ص)

فيكون: جتا(π − θ) = −جتاθ

جا(π − θ) = جاθ



قانون

جتا(π − θ) = −جتاθ

جا(π − θ) = جاθ

وبالتالي ظا(π − θ) = −ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

مثال 1

بدون استخدام الآلة الحاسبة

إذا كان:

أ) جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ ، أوجد جتا ١٢٠°.

ب) جا $\frac{π}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، أوجد جا $\frac{٣π}{٤}$.

جـ) ظاθ = $\frac{٣}{٥}$ ، أوجد ظا(π − θ).

حاول أن تحل 2

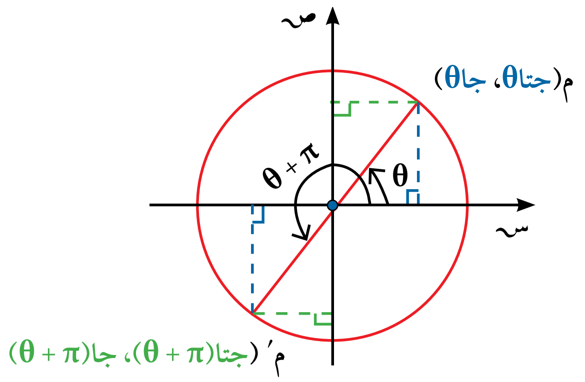
بدون استخدام الآلة الحاسبة. إذا كان:

أ) جا $٣٠^\circ = \frac{١}{٢}$ ، فأوجد جا ١٥٠°.

ب) جتاس $= \frac{٤}{٥}$ ، فأوجد جتا$(\pi -$ س$)$.

جـ) ظا $\frac{\pi}{١٢} = ٢ - \sqrt{٣}$، فأوجد ظا $\frac{١١\pi}{١٢}$.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $(\pi + \theta)$.



النقطة م′ هي انعكاس للنقطة م في نقطة الأصل.

حيث م(س، ص) $\xrightarrow[\text{نقطة الأصل}]{\text{انعكاس في}}$ م′(−س، −ص)

فيكون: جتا$(\pi + \theta) = -$جتاθ

جا$(\pi + \theta) = -$جاθ

قانون

جتا$(\pi + \theta) = -$جتاθ

جا$(\pi + \theta) = -$جاθ

وبالتالي ظا$(\pi + \theta) =$ ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

مثال 3

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان:

أ) جا $٣٠^\circ = \frac{١}{٢}$ ، فأوجد جا ٢١٠°.

ب) ظا $\frac{\pi}{٨} = -١ + \sqrt{٢}$ ، فأوجد ظا $\frac{٩\pi}{٨}$.

حاول أن تحل 3

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتا ٤٠° ≃ ٠,٧٦٦ . فأوجد جتا ٢٢٠°.

مثال 4

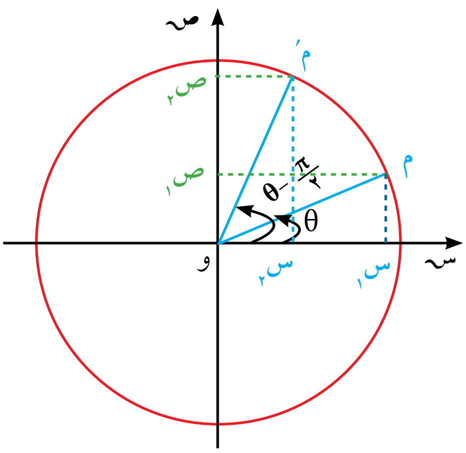
بدون استخدام الآلة الحاسبة، أوجد:

أ جا ١٥٠°.   ب جتا ٢٤٠°.   ج ظا $\frac{٢\pi}{٣}$.

حاول أن تحل 4

إذا كان جا ٥٦° ≃ ٠,٨٢٩ . بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جا ٢٣٦°.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$



Δوس١ م ≅ Δ وص٢ م′   لماذا؟

استخدم تطابق الأضلاع المتناظرة لإثبات:

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ

استنتاج: لأي زاويتين متتامتين، فإن جيب إحداهما يساوي جيب تمام الأخرى.

قانون

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

الدوال المثلثية (الدائرية) على ح

إذا كان ك عددًا صحيحًا فإن:

جا$(\theta + ٢ك\pi)$ = جاθ

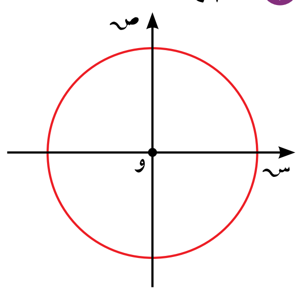
جتا$(\theta + ٢ك\pi)$ = جتاθ

ظا$(\theta + ك\pi)$ = ظاθ حيث ظاθ معرّف

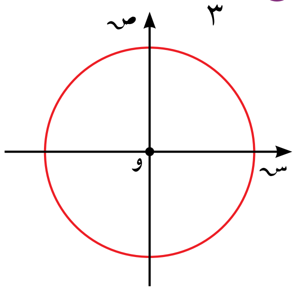
يبين الشكلان أدناه أن القوانين السابقة هي صحيحة أيضًا لأي زاوية قياسها θ:

تدريب ارسم وحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية التي قياسها:

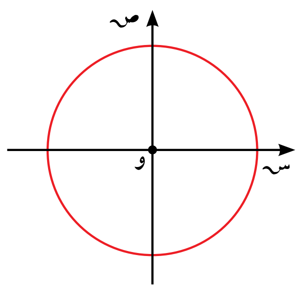
أ ٤٧٥°



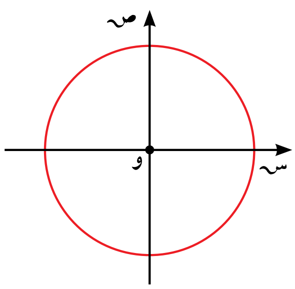
ب $\frac{١٧\pi}{٣}$



جـ $\frac{-١٦\pi}{٣}$



د -٨٩٠°



من العرض السابق يمكننا إعادة تعريف الدوال الدائرية باعتبار المجال هو ح فيكون:

تعريف

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ فإن:

١ جاθ = ص $\quad \forall\ \theta \in$ ح

٢ جتاθ = س $\quad \forall\ \theta \in$ ح

٣ ظاθ = $\frac{ص}{س}$ ، س $\neq$ ٠ حيث $\theta \in$ ح

٤ قاθ = $\frac{١}{س}$ ، س $\neq$ ٠ حيث $\theta \in$ ح

٥ قتاθ = $\frac{١}{ص}$ ، ص $\neq$ ٠ حيث $\theta \in$ ح

٦ ظتاθ = $\frac{س}{ص}$ ، ص $\neq$ ٠ حيث $\theta \in$ ح

مثال 5

بسط التعبير التالي لأبسط صورة:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س).

....

....

حاول أن تحل 5

بسّط كلًّا من التعبيرات التالية لأبسط صورة:

أ جتا(θ + ٩π)

ب جتا$\left(-\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

كراسة تمارين

(١١) بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

(أ) جتا($\pi - \theta$) − جتا($-\theta$) + جا($\pi + \theta$) + جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$.

(ب) جا($\pi + \theta$) − جتا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$ + جتا($\theta - \pi$) + جا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$.

حل معادلات مثلثية

حل المعادلة: جتا س = جتاθ

هو س = θ + ٢كπ أو س = $-\theta$ + ٢كπ (ك $\in$ ص)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

مثال 6

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جتا س = $\frac{١}{٢}$

ب ٢جتا س − $\sqrt{٣}$ = ٠

حاول ان تحل 6

حل المعادلة : $\sqrt{٢}$ جتا س = ١ .

حل المعادلة جا س = جاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = (π − θ) + ٢ك π ، (ك ∈ ص)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

مثال 7

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ب ٢جا س = $\sqrt{٢}$

حاول ان تحل 7

حل المعادلة: ٢جا س − ١ = ٠.

حل المعادلة ظا س = ظاθ هو س = θ + ك π، (ك ∈ صـ)
لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

مثال 8

حل المعادلة: ظا س = $\sqrt{3}$.

حاول ان تحل 8

حل المعادلة: $\sqrt{3}$ ظا س = ١ .

كراسة التمارين

(١٢) حلّ المعادلات التالية:

(ب) ظتا س = $\sqrt{3}$

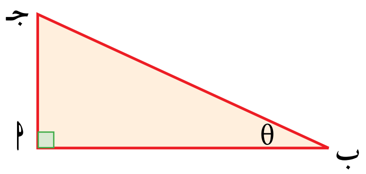
العلاقات بين الدوال المثلثية 2

تدريب

أكمل:

جاθ = $\frac{\dots}{\text{الوتر}}$ ، جتاθ = $\frac{\dots}{\text{الوتر}}$

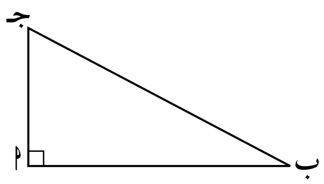
ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\dots}$ = $\frac{\frac{\dots}{\text{الوتر}}}{\frac{\dots}{\text{الوتر}}}$ = $\frac{\dots}{\dots}$



المتطابقات المثلثية الأساسية

ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ، ظتاθ = $\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$ ، ظتاθ = $\frac{١}{\text{ظا}\theta}$ حيث المقام ≠ ٠

قاθ = $\frac{١}{\text{جتا}\theta}$ ، قتاθ = $\frac{١}{\text{جا}\theta}$



متطابقات فيثاغورث

جا$^{٢}\theta$ + جتا$^{٢}\theta$ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث

١ + ظا$^{٢}\theta$ = قا$^{٢}\theta$

١ + ظتا$^{٢}\theta$ = قتا$^{٢}\theta$

مثال 1

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتاθ = ٠,٤ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$. فأوجد جاθ، ظاθ.

أ أوجد جاθ.

ب استنتج ظاθ.

حاول أن تحل 1

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٥}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$ فأوجد جتاθ، ظاθ.

مثال 2

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = $٢\sqrt{٢}$، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

حاول أن تحل 2

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظاθ = $\frac{٣}{٤}$ ، جا θ > ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

مثال 3

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = $\frac{١٢}{٥}$، جاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

حاول أن تحل 3

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظاθ = $\frac{٢٤}{٧}$، جتاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

مثال 4

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٧}$ ، جتاθ > ٠ فأوجد جتاθ، ظتاθ، ظاθ.

حاول أن تحل 4

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظتاθ = $\frac{٥}{٨}$، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

إذا كان ظتاθ = $\frac{٥}{٨}$، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ.

مثال 5 أثبت صحة المتطابقة التالية: جا^{3}س + جاس × جتا^{2}س = جاس.

حاول أن تحل 5 أثبت صحة المتطابقة: جتا^{4}س + جا^{2}س × جتا^{2}س = جتا^{2}س.

مثال 6 أثبت صحة المتطابقة التالية:

$$\frac{(\text{قا}\theta + ١)(\text{قا}\theta - ١)}{\text{جا}^{٢}\theta} = \text{قا}^{٢}\theta.$$ حيث المقام ≠ ٠

حاول أن تحل 6

أثبت صحة المتطابقة: (قا^{٢} θ + قتا^{٢} θ) − (ظا^{٢} θ + ظتا^{٢} θ) = ٢.

كراسة التمارين

في التمرينين (٩–١٠)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

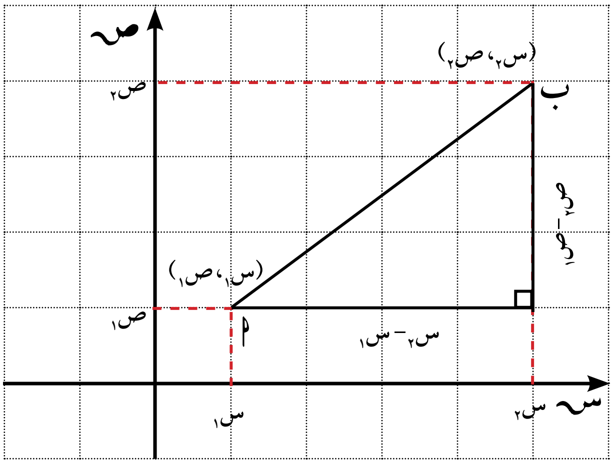
(٩) جاθ (ظتاθ + ظاθ) = قاθ

(١٠) $\dfrac{\text{جا}\theta}{\text{جا}\theta - \text{جتا}\theta} = \dfrac{1}{1 - \text{ظتا}\theta}$.

المستوى الإحداثي

المسافة بين نقطتين

المسافة بين أي نقطتين أ$(س_١، ص_١)$، ب $(س_٢، ص_٢)$ تساوي $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

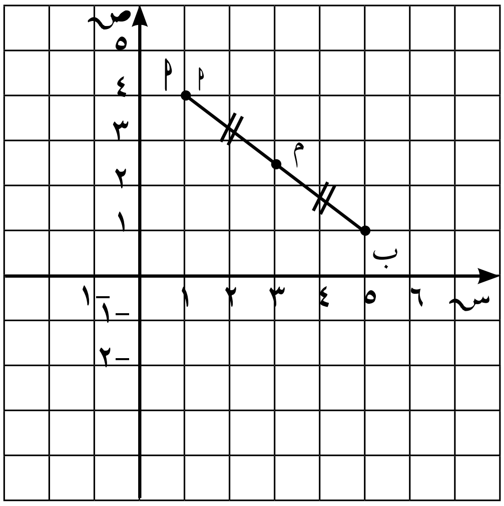


مثال 1 أوجد المسافة بين ك (١، −٥) ، ل(٣، −٢).

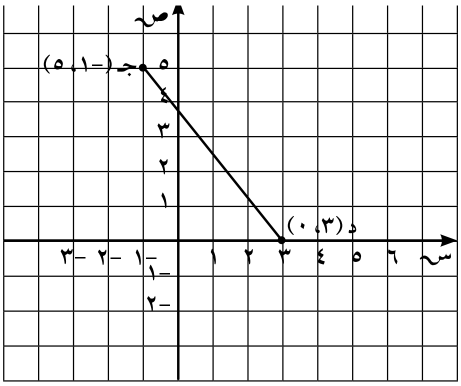
حاول أن تحل 1 أوجد المسافة بين م(−٢، ١) ، ن(−٧ ، ٤) . قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

نقطة المنتصف

إذا كانت أ(س$_1$، ص$_1$)، ب (س$_2$، ص$_2$)، فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م(س، ص) حيث س = $\frac{س_1 + س_2}{٢}$ ، ص = $\frac{ص_1 + ص_2}{٢}$.



مثال 2 في الشكل المقابل أوجد نقطة منتصف $\overline{جـ د}$ حيث جـ (−١، ٥)، د (٣، ٠).



....

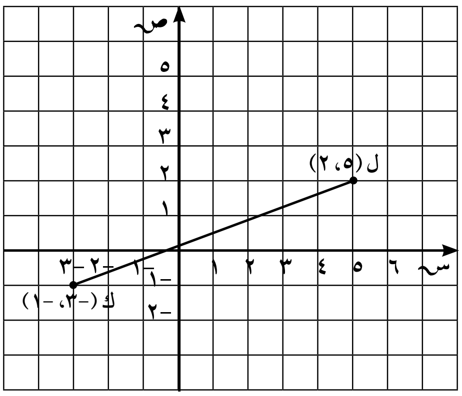
....

....

....

....

حاول أن تحل 2 في الشكل المقابل، أوجد نقطة منتصف $\overline{ك ل}$
حيث ك (−٣، −١)، ل (٥، ٢).



....

....

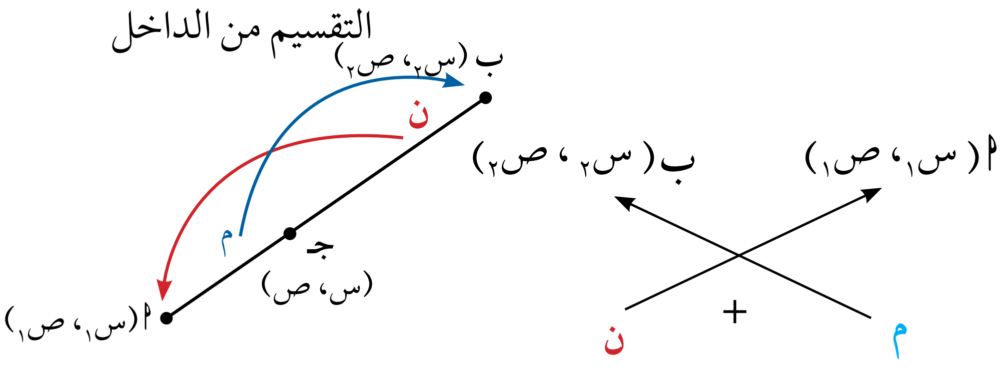
....

....

....

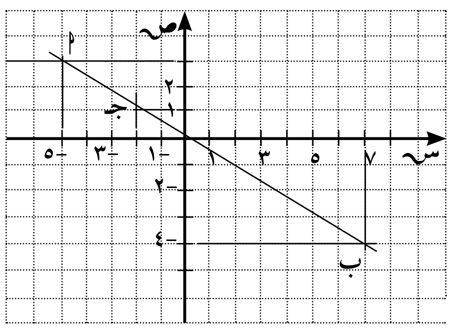
تقسيم قطعة مستقيمة

التقسيم من الداخل



جـ $\left(\dfrac{م\, س_٢ + ن\, س_١}{م + ن} ، \dfrac{م\, ص_٢ + ن\, ص_١}{م + ن} \right)$

مثال ١ إذا كان ء(−٥، ٣)، ب (٧، −٤). فأوجد نقطة تقسيم $\overline{ءب}$ من جهة ء بنسبة ١:٣ من الداخل.



ملاحظة: الرسم ليس جزءًا من الحل ولكنه يساعد على التحقق من معقولية الإجابة.

حاول أن تحل 1

إذا كان أ (٣، −٤) ، ب (−٢، ٣). فأوجد جـ بحيث ٢ أ جـ = جـ ب ، جـ $\in$ $\overline{\text{أ ب}}$.

[إرشاد: أ جـ : جـ ب = ١ : ٢]

مثال 2

إذا كان أ (٢، ٤) ، ب (٥، ٩)،
ويراد تقسيم $\overline{\text{أ ب}}$ من الداخل من جهة ب في نقطة جـ بنسبة ٣:٥ .
أوجد إحداثيات النقطة جـ.

حاول أن تحل 2

لتكن أ (٢، −٣) ، ب (−٤، ٧). أوجد إحداثيات النقطة جـ على $\overline{\text{أب}}$ بحيث: ٧جـ ب = ٢جـ أ .

كراسة التمارين

(١) أوجد إحداثيي النقطة ن التي تقسم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة أ إذا علم أن:

(أ) أ(−٧، ٥)، ب(٨، −٥) ونسبة التقسيم ١ : ٢.

ميل الخط المستقيم

معدل التغير

في المخطط أعلاه، $\overline{أب}$، $\overline{ب جـ}$ لهما معدلا تغيّر مختلفان. يسمح **معدل التغير** بمتابعة العلاقة بين كميتين تتغيران باستمرار. يكون ما يلي صحيحًا إذا ارتبطت إحدى الكميتين بالأخرى فإن:

$$\text{معدل التغير} = \frac{\text{التغير في المتغير التابع ص}}{\text{التغير في المتغير المستقل س}}$$

معلومة رياضية:

المعدل هو مقارنة بين كميتين بوحدات قياس مختلفة.

مثال 1

باستخدام البيانات في الجدول أدناه أوجد معدل التغير. هل معدل التغير لكل يومين متتاليين هو نفسه؟

عدد الأيام	كلفة تأجير الحاسوب
١	٦ دنانير
٢	٧,٥ دنانير
٣	٩ دنانير
٤	١٠,٥ دنانير
٥	١٢ دينارًا

حاول أن تحل 1

أ أوجد معدل التغير مستخدمًا اليوم الخامس واليوم الثاني.

ب تفكير ناقد: هل إيجاد معدل التغير لزوج واحد من الأيام المتتالية يعني أن معدل التغير هو نفسه في كل بيانات الجدول؟ فسّر إجابتك.

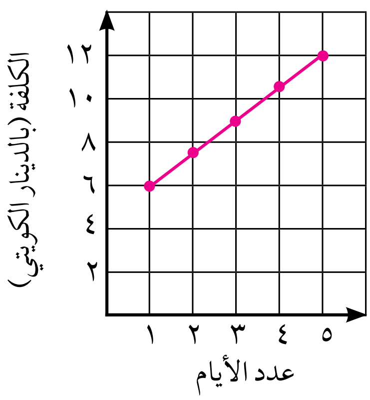
استخدام الرسم البياني لإيجاد معدل التغير

يبيّن الرسم البياني أن الأزواج المرتبة (عدد الأيام، الكلفة) في المثال (١) موجودة على خط مستقيم.

∴ بيانات الجدول هي خطيّة.

∴ يمكن استخدام الرسم البياني لإيجاد معدل التغير.

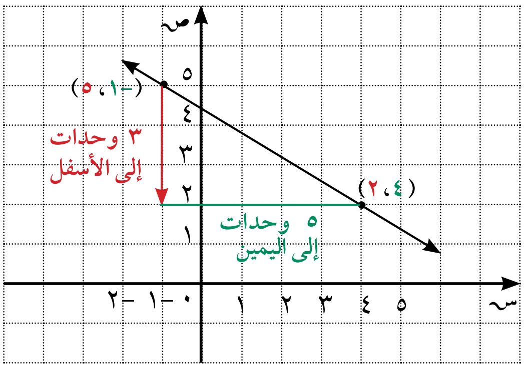
يتم تعيين المتغير المستقل على المحور الأفقي ويتم تعيين المتغير التابع على المحور الرأسي.



إيجاد الميل

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

فمثلًا ميل المستقيم الموضح بالشكل المقابل



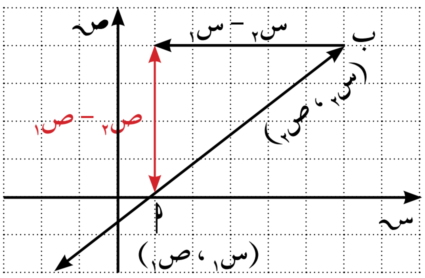
$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

$$= \frac{٢ - ٥}{٤ - (-١)}$$

$$= \frac{-٣}{٥}$$

ميل الخط المستقيم يساوي $\frac{-٣}{٥}$.

لإيجاد ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ،حيث أ (س١ ، ص١)، ب (س٢ ، ص٢) نستخدم الصيغة التالية:



$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \text{ ، } س_٢ - س_١ \neq ٠$$

مثال 2 أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ(-٢، ١) ، ب(٥، ٧).

....

....

....

حاول أن تحل 2 أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بكل زوج من النقاط.

أ جـ(٢، ٥) ، د(٤، ٧)

....

....

ب ق(–١، ٤) ، ك(٣، –٢)

....

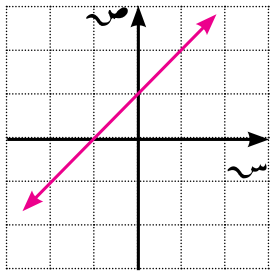
....

جـ م(٤، ٣) ، ن(–٧، ٣)

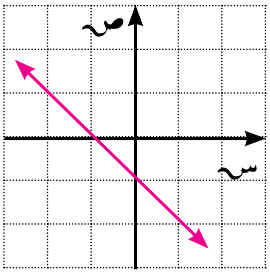
....

....

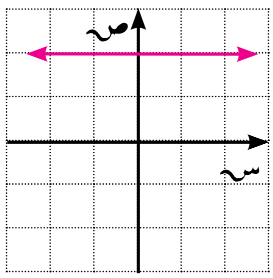
ميل المستقيم **موجب**



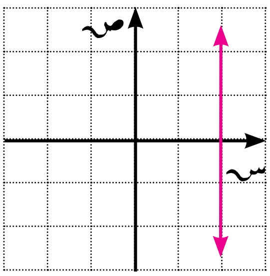
ميل المستقيم **سالب**



ميل المستقيم الأفقي
يساوي **صفرًا**



المستقيم الرأسي
ليس له **ميل**



مثال 3

نأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: أ(١، –١) ، ب(٢، ٢) ، جـ(–١، –٧). أثبت أن النقاط أ، ب، جـ على استقامة واحدة.

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 3

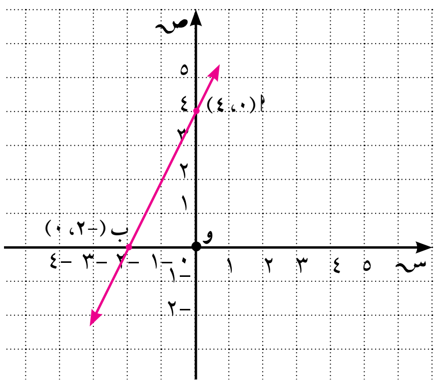
أثبت أن النقاط أ(٢، −١) ، ب(−١، ٥) ، جـ (٣، −٣) على استقامة واحدة.

تذكر

تذكر أن العلاقة بين ظل الزاوية θ التي يصنعها مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وميل هذا المستقيم م هي: م = ظا θ.

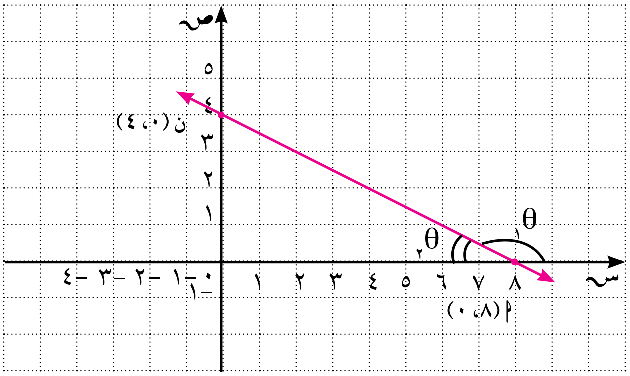
مثال 4

أوجد ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ حيث أ(٠،٤) ، ب (−٢، ٠) وقارنه بظل الزاوية $\hat{\text{ب}}$ في المثلث قائم الزاوية ب و أ.



حاول أن تحل 4

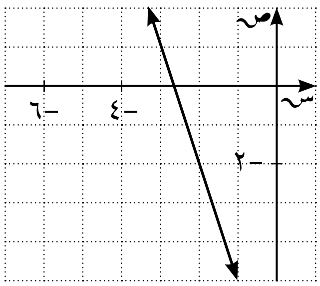
أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أن}}$ وقارنه بظل الزاوية الحادة التي قياسها θ_2 وظل الزاوية المنفرجة التي قياسها θ_1.



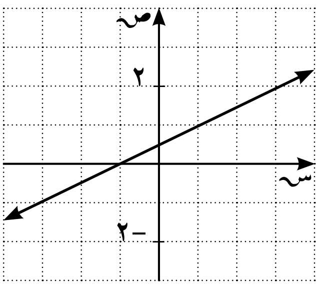
كراسة التمارين

في التمارين (٢-٥)، أوجد ميل كل مستقيم إن أمكن مما يلي:

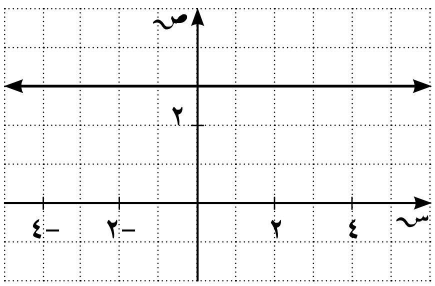
(٢)



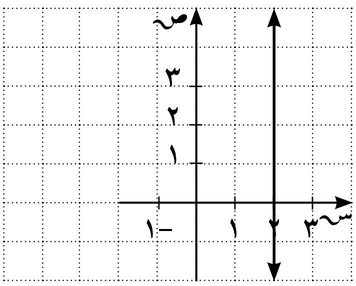
(٣)



(٤)



(٥)



في التمارين (٦-٩)، أوجد ميل المستقيم إن أمكن المار بكل من أزواج النقاط التالية:

(٦) (٣، ٢)، (٥، ٦)

(٧) (٦، ٥)، (٢، ٣)

(٨) (٣، ٤)، (-٣، ٤)

(٩) (٤، ٣)، (٤، -٣)

(١٠) أوجد ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(١١) أثبت أن المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° يوازي المستقيم: س = ص + ٧.

في التمارين (١٧-١٩)، أوجد قيمة كل من س، ص إذا كانت النقطتان على المستقيم مع المعطيات التالية:

(١٧) (س، ٣)، (٢، ٨)، الميل = $\frac{-٥}{٢}$.

(١٨) (-٤، ص)، (٢، ٤ص)، الميل = ٦.

(١٩) (٣، ٥)، (س، ٢)، الميل غير معرّف.

معادلة خط مستقيم

لكتابة معادلة خط مستقيم ليس رأسيًّا نحن بحاجة إلى معرفة:

- الميل (م).
- نقطة من نقاط المستقيم ولتكن (س١، ص١).

تكون معادلة المستقيم: ص − ص١ = م(س − س١).

٢ معادلة المستقيم الرأسي هي س = أ (وهذا المستقيم ليس له ميل)

مثال 1

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٢}$ و يمر بالنقطة (٤، −١).

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 1

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{-٢}{٣}$ ويمر بالنقطة (−٦، ٥).

....

....

....

....

....

تذكر

معادلة محور السينات هي: ص = ٠
معادلة محور الصادات هي: س = ٠
وبالتالي إحداثيات نقاط محور السينات (س، ٠) وإحداثيات نقاط محور الصادات (٠، ص).

معلومة مفيدة

الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي:
أس + ب ص + جـ = ٠
حيث أ، ب لا يساويان الصفر معًا.

مثال 2 معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ(١، ٣) ، ب(-٢، ٠).

حاول أن تحل 2 أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين جـ (٣، -١) ، د(٢، -٢).

لأي مستقيمين غير رأسيين ومتوازيين الميل نفسه. أما إذا كان المستقيمان متعامدين وليس أحدهما رأسيًا، فناتج ضرب ميليهما يساوي ‎-١‎. وبالتالي إذا علمنا ميل أحد المستقيمات فيمكننا إيجاد ميل المستقيمات المتوازية معه أو ميل المستقيمات المتعامدة معه، كذلك يمكننا إيجاد معادلته بمعرفة نقطة على هذا المستقيم.

مثال 3 إذا كان المستقيم ل: ص = ٢س + ١، فأوجد:

أ معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٢، ‎-٣‎).

ب معادلة المستقيم ف العمودي على المستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٤، ‎-٣‎).

حاول أن تحل 3

إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س + ٣ = ٠، فأوجد:

أ معادلة المستقيم م الموازي للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة (−٣، ٢).

ب معادلة المستقيم ز العمودي على المستقيم ك والذي يمر بالنقطة (١، ٤).

كراسة التمارين

(٥) أوجد معادلة المستقيم المتعامد مع المستقيم: ص = −٢س + ٤ ويمر بالنقطة (−٢، ٣).

(٧) أوجد معادلة الخط المستقيم العمودي على المستقيم: ٢س + ص + ١ = ٠ ويمر بالنقطة (−١، ١).

(٨) أوجد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة أ(٥، ٧) والموازي للمستقيم المار بالنقطتين (٣، ٤)، (٢، ١).

البعد بين نقطة ومستقيم

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: أ س + ب ص + جـ = ٠، فإن البعد ف بين النقطة د (س$_1$، ص$_1$) والمستقيم ل

تعطى بالصيغة:

$$ف = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}.$$

إذا كانت النقطة د تنتمي إلى المستقيم ل فالبعد بينهما يساوي صفرًا.

ملاحظة

بعد نقطة عن مستقيم هو طول القطعة العمودية المرسومة من النقطة على الخط المستقيم.

مثال 1

أثبت أن النقطة هـ(٢، ١) لا تنتمي إلى المستقيم ل الذي معادلته: ص = ٣ س − ٤، ثمّ أوجد البعد بين المستقيم ل والنقطة هـ.

حاول أن تحل 1 أوجد البعد بين المستقيم ل: ص = −س + ٣ والنقطة د(٢، ٥).

مثال 2 أوجد البعد من النقطة د(−٤، −٣) إلى المستقيم ل: ٢ص = ٣ س − ٧.

حاول أن تحل 2 أوجد البعد من النقطة ط(٣، −٤) إلى المستقيم ل: ص = − $\frac{٤}{٣}$ + $\frac{س}{٦}$.

كراسة التمارين

(٧) أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و(٢، −١) إذا كان المستقيم: ٣س − ٤ص + ٧ = ٠ :

(١٠) أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على المستقيم المار بالنقطتين (٧، ٣)، (−٥، ١)

معادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة:

لأي دائرة مركزها م(د، هـ) وطول نصف قطرها نق فإن المسافة بين مركز الدائرة وأي نقطة أ(س، ص) على الدائرة يمكن إيجادها باستخدام قانون المسافة بين نقطتين.

المسافة = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

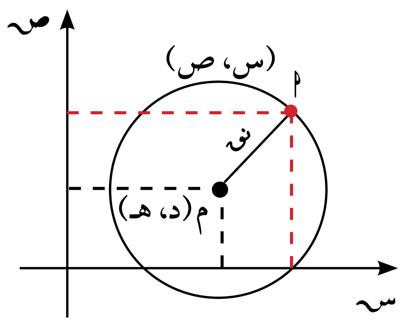
نق = $\sqrt{(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢}$

$نق^٢ = (س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢$

وعلى ذلك، تكون معادلة الدائرة التي مركزها (د، هـ) وطول نصف قطرها نق على الصورة:

$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

وتسمّى هذه الصورة القياسية لمعادلة الدائرة بمعلومية المركز م(د، هـ) وطول نصف القطر نق.



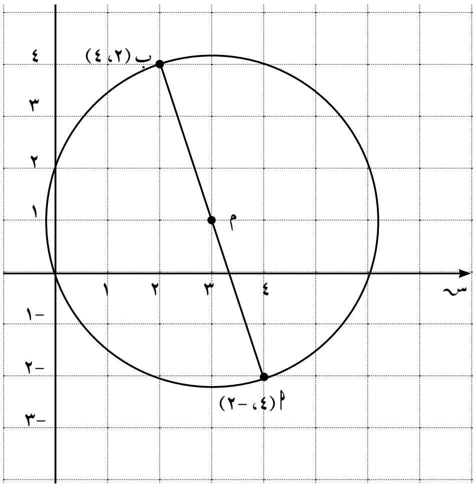
مثال 1

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، –٢) وطول نصف قطرها ٧ وحدات.

حاول أن تحل 1

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥، –٣) وطول نصف قطرها ٥ وحدات.

مثال 2 أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{\text{أب}}$ حيث أ(٤، -٢) ، ب(٢، ٤).



حاول أن تحل 2 أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{\text{أب}}$ حيث أ(-٣، ٦) ، ب(١، -٢).

إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، فإن معادلتها على الصورة: س^٢ + ص^٢ = نق^٢

مثال 3 أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٤ وحدات.

حاول أن تحل 3 أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦ سم.

مثال 5 أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: (س + ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٩، ثم ارسم الدائرة.

حاول أن تحل 5 أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

أ) س^{٢} + ص^{٢} = ٤٩.

ب) (س − ٤)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٣٦.

كراسة التمارين

(١) حدّد ما إذا كانت المعادلات التالية، معادلة دائرة أم لا.

(أ) ٣س^{٢} + ص^{٢} = ٤

(ب) (س − ١)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + ٤ = ٠

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} − ٢س − ٢ص − ٨ = ٠

(د) س^{٢} + ص^{٢} − ٢س + ٧ = ٠

(٢) أوجد معادلة كل من الدوائر الآتية إذا علم:

(أ) المركز (٠، ٠) وطول نصف القطر = ٣.

(ب) المركز (٤، ٥) وطول نصف القطر = ٢.

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠ ، حيث ل، ك، ب ثوابت

وتسمى الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $\left(\frac{-ل}{٢}، \frac{-ك}{٢}\right)$

طول نصف قطرها نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب}$. حيث ل^{٢} + ك^{٢} − ٤ب > ٠

الصورة العامة: س^{٢} + ص^{٢} + ل س + ك ص + ب = ٠ هي معادلة دائرة ونلاحظ التالي:

١ إنها معادلة من الدرجة الثانية في س، ص.

٢ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢}.

٣ لا يوجد الحد الذي يتضمن س ص.

مثال 6

عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: ٣س^{٢} + ٣ص^{٢} – ٦س + ٩ص – ١٢ = ٠

حاول أن تحل 6

عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} – ١٢س – ٤ص – ٣٠ = ٠

ملاحظة

عندما يكون لدينا معادلة على الصورة العامة التالية: $س^{٢} + ص^{٢} + ل\,س + ك\,ص + ب = ٠$
يمكننا معرفة ما تمثله بيانيًّا هذه المعادلة بمجرد مقارنة
$ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب$ مع الصفر.

١ عندما $ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب < ٠$ فإن المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.
٢ عندما $ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب = ٠$ فإن المعادلة تمثل نقطة.
٣ عندما $ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب > ٠$ فإن المعادلة تمثل دائرة.

مثال 7

هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسّر.

أ $س^{٢} + ص^{٢} - ٣س + ٥ص - \frac{١٥}{٤} = ٠$

ب $س^{٢} + ص^{٢} + ٤س - ٧ص + ٢٠ = ٠$

جـ $س^{٢} + ص^{٢} - ٦س + ٨ص + ٢٥ = ٠$

حاول أن تحل 7 هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسّر.

أ $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٧ص + ١٧ = ٠$

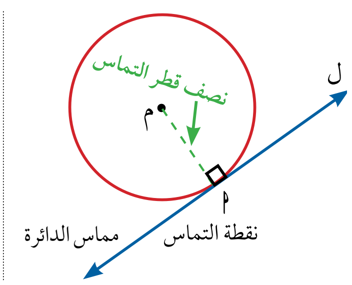
ب $س^٢ + ص^٢ + ٥س - ٦ص - ٤ = ٠$

جـ $س^٢ + ص^٢ - ٢س - ٢ص + ٢ = ٠$

معادلة مماس لدائرة

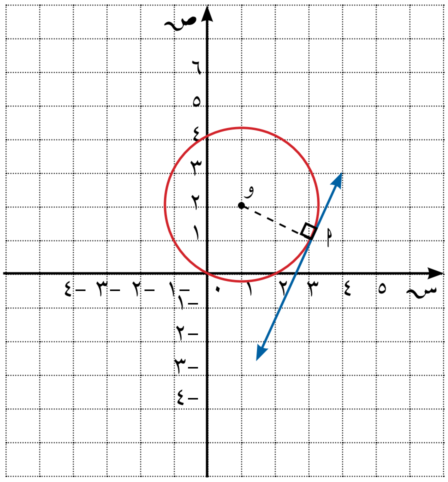
سبق وتبين لنا أن نصف قطر الدائرة عمودي على مماس الدائرة عند نقطة التماس.

باستخدام هذه الخاصية، نستطيع إيجاد معادلة مماس الدائرة.



مثال 8 أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها:

(س − ١)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٥ عند نقطة التماس أ(٣، ١).



حاول أن تحل 8 أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها (س − ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٢٥ عند النقطة أ(٦، ٤).

الانحراف المعياري

إذا كانت $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ... ، $س_ن$ مجموعة من القيم عددها ن حيث متوسطها الحسابي $\overline{س}$ فإن:

$$\text{التباين} = ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن}$$

ومنه الانحراف المعياري $= ع = \sqrt{ع^٢}$

مثال 1 أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات:

٤، ٦، ٨، ٥، ٣، ٧، ٢

حاول أن تحل 1 أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات:

٩، ٧، ٨، ٦، ٤، ٢

كراسة التمارين

(١) أوجد الانحراف المعياري لقيم البيانات التالية (يمكن استخدام الآلة الحاسبة):

(أ) ٥٢، ٦٣، ٥٤، ٧٠، ٦٦.

مثال 3

يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لدرجات ٦٠ طالبًا في امتحان نهاية العام الدراسي حيث النهاية العظمى ١٠٠ درجة.

الفئة (درجات)	٠-	٢٠-	٤٠-	٦٠-	٨٠-
التكرار	٤	٦	١٦	٢٤	١٠

أوجد المتوسط الحسابي $\overline{\text{س}}$ والتباين ع^{2} والانحراف المعياري ع لقيم هذه البيانات.

....

....

....

....

حاول أن تحل 3

٣ يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ١٠٠ طالب ثانوي (الوزن بالكيلوجرام).

الفئة	٦٠–	٦٤–	٦٨–	٧٢–	٧٦
التكرار	٥	١٨	٤٢	٢٧	٨

أوجد المتوسط الحسابي س̄ والانحراف المعياري ع لهذه الأوزان.

مثال 4

إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو ع = ٦ وأن مجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٥٤٠، فما عدد قيم هذه البيانات؟

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 4

الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو ع = ٤، ومجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٤٨٠.

فما عدد قيم هذه البيانات؟

....

....

....

....

....

طرق العد

مثال 2

في تجربة على سلوك الحيوان، استخدم علماء النفس نوعين من الأطعمة على التوالي كمكافأة، كل مكافأة عبارة عن واحدة من ثلاثة أنواع ممكنة. كم عدد التشكيلات المختلفة الممكنة في حال كانت أنواع الجوائز غير مكررة؟

حاول أن تحل 2

يقدم أحد المطاعم وجبة غداء مؤلفة من: سلطة أو حساء، دجاج أو سمك أو لحمة، حلويات أو فاكهة. استخدم الشجرة البيانية لإعطاء عدد الوجبات الممكنة.

مبدأ العد

مثال 4

يوجد ثمانية متسابقين في سباق ١٠٠ م جري. ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟ افترض عدم وجود تعادل بين أي متسابقين. علمًا بأن المتسابقين وصل كلًّا منهم إلى خط النهاية.

حاول أن تحل 4

اشترك ٢٠ جملًا في سباق للهجن ووصلت جميعها إلى خط النهاية في أوقات مختلفة (أي أنه لا يوجد أي تعادل).

ما هو عدد النتائج الممكنة لهذا السباق؟

١

تذكر:

مضروب ن أو

ن! هو: ن × (ن − ١) × ... × ٣ × ٢ × ١

فمثلًا: ٥! = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

٠! = ١ تُقرأ مضروب صفر = ١

التباديل

قانون التباديل

$$ {}^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!} $$ حيث ر، ن ∈ صـ$_+$ ، ر ≤ ن، $^{ن}ل_{.} = ١$

مثال 6 أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

أ $^{٦}ل_{٤}$ ب $^{١١}ل_{٣}$ جـ $^{ن}ل_{٣}$

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 6 أوجد قيمة كل تبديل بدون استخدام الآلة الحاسبة بصورة مباشرة.

أ $^{٥}ل_{٣}$ ب $^{١٠}ل_{٤}$ جـ $^{ن}ل_{٤}$

....

....

....

....

....

مثال 5

افترض أن ٣١ عضوًا من جمعية الرياضيات في مدرستك يريدون اختيار أربعة أشخاص لأربعة مناصب: رئيس، نائب رئيس، أمين السر، أمين الصندوق. حدّد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.

حاول أن تحل 5

في إحدى الجمعيات الخيرية يوجد ٢٠ عضوًا يشكلون مجلس الأمناء. يريدون اختيار رئيسًا، أمينًا للسر، أمينًا للصندوق. حدّد كم طريقة يمكن بها الاختيار لهذه المناصب.

مثال 7

ما عدد الكلمات التي يمكن أن تتشكل من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية وذلك في حال عدم تكرار أي منها؟

حاول أن تحل 7

ما عدد الأعداد التي يمكن أن تتشكل من ٤ أرقام من أرقام النظام العشري بدون الصفر وذلك في حال عدم تكرار أي رقم؟

التوافيق

قانون التوافيق

إذا كان ن، ر عددان صحيحان موجبان حيث ن ≥ ر، فإن:

عدد التوافيق المكونة كل منها من ر من الأشياء والمختارة من بين ن من الأشياء هو:

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!\ ر!}$$

ملاحظة:

يستخدم الرمز $^{ن}ق_{ر}$ للتعبير عن عدد التوافيق.

ملاحظات:

(١) عندما ر = ٠ يُعرَّف $\binom{ن}{٠} = ١$

(٢) $\binom{ن}{ن} = ١$

مثال 8 ما عدد اللجان المكونة من ثلاثة أشخاص، والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

حاول أن تحل 8 ما عدد اللجان المكونة من شخصين والتي يمكن تكوينها من مجموعة من أربعة أشخاص؟

مثال 9 إذا كان فريق كرة سلة يتكوّن من ١٢ لاعبًا.

فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من خمسة لاعبين من بين لاعبي هذا الفريق (يمكن لأي لاعب اللعب في كل المراكز)؟

حاول أن تحل 9

إذا كان فريق كرة قدم يتكوّن من ٢٠ لاعبًا. فما عدد الفرق المختلفة التي يمكن تكوينها من ١١ لاعبًا من بين لاعبي هذا الفريق؟ (يمكن لأي لاعب اللعب في أي مركز)

مثال 10

من أجل اختيار لوائح المرشحين للانتخابات النيابية، يجب اختيار ١٠ مرشحين من بين ٥١ مرشحًا.
ما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن تكوينها؟

حاول أن تحل 10

أثناء الإعداد لزيارة المتحف الوطني، أراد منظمو الزيارة إعداد لوائح للطلاب لاستخدام حافلات تتسع كل منها ١٥ طالبًا. علمًا بأن عدد الطلاب هو ٦٠ طالبًا، فما عدد اللوائح المختلفة التي يمكن إعدادها لهذه الزيارة؟

مثال 11

في كل مما يلي حدّد ما إذا كان المثال يبيّن تبديلًا أو توفيقًا واحسب عدد الطرق في كل حالة.

أ اختيار رئيس، نائب رئيس، أمين سر من بين ٢٥ عضوًا في نادي القراءة.

ب اختيار ٥ حبات بطاطا من كيس يحتوي على ١٢ حبة لإعداد وجبة غذائية.

جـ وضع معلم مخططًا يبيّن مقاعد ٢٢ طالبًا في غرفة بها ٢٥ مقعدًا.

د اختيار ٤ أبيات من قصيدة شعرية مكونة من ١١ بيتًا لكتابتها وتعليقها في غرفة الفصل.

حاول أن تحل ١١

١١ في ما يلي، حدّد ما إذا كان المثال يبيّن تبديلًا أو توفيقًا.

أ اختيار ٣ طلاب من الصف العاشر للمشاركة في مسابقة تلاوة القرآن.

ب مراكز المشاركين الثلاثة في مسابقة تلاوة القرآن.

كراسة التمارين

في التمارين (١–٣)، اكتب قائمة بكل الإمكانيات أو ارسم شجرة بيانية للإجابة عن الأسئلة التالية:

(١) **كلمات مكونة من ثلاثة حروف**: ما عدد الكلمات المختلفة التي تستطيع تكوينها من بين ثلاثة حروف: ع، ل، م دون تكرارها (دون الاهتمام بالمعنى)؟

(٢) **الطرق الممكنة**: توجد ثلاثة طرق ممكنة تصل بين القرية أ والقرية ب، وتوجد أربعة طرق ممكنة تصل بين القرية ب والقرية جـ. كم عدد الطرق المختلفة من القرية أ إلى القرية جـ مرورًا بالقرية ب؟

(٣) **الرئيس ونائب الرئيس**: يوجد ثلاثة مرشحين لمنصب الرئيس وأربعة مرشحين لمنصب نائب الرئيس. كم عدد الأزواج التي يمكن أن تكوّن من رئيس ونائب رئيس؟

في التمارين (٤–٦)، استخدم مبدأ العد الأساسي.

(٤) **أرقام الهاتف:** كم عدد أرقام الهاتف التي يمكن أن تكونها من سبعة أرقام علمًا بأنه لا يمكن أن يبدأ الرقم من اليسار بـ ٠ أو ١، لماذا؟

(٦) **رمي حجر نرد:** عند رمي حجري نرد أحدهما أحمر والثاني أخضر معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما. كم عدد النواتج الممكنة؟

في التمارين (٧–١٠)، أوجد قيمة كلّ مما يلي:

(٧) $_{٥}ل^{٨}$

(٨) $_{٧}ل^{١٢}$

(٩) $_{٥}ق^{١٤}$

(١٠) $_{٤٦}ق^{٤٨}$

في التمارين (١١–١٣)، حل المسائل التالية:

(١١) **تكوين اللجان:** سوف يتم انتخاب لجنة مكونة من ٣ سيدات من بين ٢٥ سيدة. كم عدد اللجان المختلفة التي يمكن انتخابها؟

(١٢) **شراء أقراص حاسوب مدمجة:** لدى جيهان نقود تكفي لشراء ثلاثة أقراص حاسوب مدمجة فقط من بين ٤٨ قرصًا. كم عدد مجموعة أقراص الحاسوب التي يمكن شراؤها؟

(١٣) يجري مدير شؤون الموظفين مقابلات شخصية مع ثمانية أشخاص مرشحين لثلاث وظائف شاغرة. كم عدد المجموعات المكونة من ثلاثة أشخاص التي يمكن توظيفها؟

الاحتمال المشروط

في كل تجربة عشوائية، نهتم أولًا بمعرفة مجموعة النواتج الممكنة والتي تسمى **فضاء العينة (ف)**. كل **حدث** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

إذا كانت جميع نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث أ هو:

$$\text{ل(الحدث أ)} = \frac{\text{عدد نواتج الحدث أ}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

أي أن: $\text{ل(أ)} = \frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$

يكتب الاحتمال بصورة كسر عشري أو كسر أو نسبة أو نسبة مئوية.

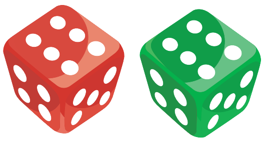
مثال 1

في لعبة «رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين» والتجربة هي ملاحظة الوجه العلوي لكل من الحجرين

أ مِمّ يتألف كل ناتج؟ اكتب فضاء العينة. وما عدد النواتج الممكنة؟

ب مثل فضاء العينة بيانيًّا.

جـ ما احتمال الحدث أ: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ٤»؟



الحل:

حاول أن تحل 1

في المثال (١): أ ما احتمال الحدث «ب»: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ٧»؟

ب ما احتمال الحدث «جـ»: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ١٣»؟

جـ ما احتمال الحدث «د»: «ظهور عددين أحدهما مربعًا للآخر»؟

خواص الاحتمال لحدث ما

ليكن ﺃ حدث في فضاء عينة ف منته وغير خالٍ فإن:

١ ٠ ≤ ل(ﺃ) ≤ ١

٢ إذا كان ﺃ = { } إذًا ل(ﺃ) = ٠ ويسمى ﺃ حدثًا مستحيلًا.

٣ إذا كان ﺃ = ف إذًا ل(ﺃ) = ١ ويسمى ﺃ حدثًا مؤكدًا.

٤ مجموع احتمالات جميع النواتج في فضاء العينة يساوي ١.

معلومة مفيدة:

فضاء العينة، في تجربة رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين هو نفسه فضاء العينة في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين.

مثال 2

في تجربة رمي حجري نرد متمايزين معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما، الحدث أ هو «مجموع العددين الظاهرين هو ١٣» .
فما احتمال وقوع الحدث أ؟

حاول أن تحل 2

٢ في تجربة رمي حجري نرد متمايزين معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما، كان الحدث ب «الحصول على مجموع أصغر من ١٣»، فما احتمال وقوع الحدث ب؟

العمليات على الأحداث واحتمالاتها

قاعدة الاحتمال لاتحاد حدثين:

ل(ٱ ∪ ب) = ل(ٱ) + ل(ب) − ل(ٱ ∩ ب)

ومنها ل(ٱ ∩ ب) = ل(ٱ) + ل(ب) − ل(ٱ ∪ ب)

قاعدة الاحتمال لمتمم الحدث ٱ:

ل(ٱ̅) = ١ − ل(ٱ)

قاعدة الاحتمال لحدثين متنافيين:

إذا كان ٱ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن ل(ٱ ∪ ب) = ل(ٱ) + ل(ب).

مثال 5

إذا كان ٱ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان:

ل(ٱ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل(ٱ ∩ ب) = ٠,٤ ، أوجد كلًّا من:

١ ل(ٱ ∪ ب)　　٢ ل(ٱ̅)

حاول أن تحل 5

٥ إذا كان ٱ، ب حدثان في فضاء العينة، وكان ل(ٱ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل (ٱ ∪ ب) = ٠,٦ أوجد كلًّا من:

أ ل(ٱ ∩ ب)

ب ل(ب̅)

مثال 6

إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان:

ل($\overline{أ}$) = ٠,٢ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٩ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٤ ، أوجد ل($\overline{ب}$)، ل($\overline{أ ∩ ب}$).

حاول أن تحل 6

إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة، وكان ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢

أوجد ل($\overline{أ ∪ ب}$).

حاول أن تحل 7

٧ في فضاء عينة ف لدينا حدثان ٲ، ب متنافيان حيث ل(ٲ) = ٤ , ٠، ل(ب) = ٥ , ٠.

أ احسب ل(ٲ ∪ ب).

ب احسب ل$\overline{(ٲ \cup ب)}$.

الأحداث المستقلة

يكون الحدثان مستقلين إذا كان وقوع (أو عدم وقوع) أحدهما لا يؤثر على وقوع (أو عدم وقوع) الآخر. فمثلًا، في تجربة عشوائية عند رمي عملة معدنية مرتين وملاحظة الوجه العلوي فإن الحدث «ظهور صورة في الرمية الأولى» لا يؤثر على وقوع الحدث «ظهور صورة في الرمية الثانية»، لأن أي من الرميتين لا تؤثر على الأخرى بأي طريقة، ولذلك **فالحدثان مستقلان**.
إذا كنا نعلم الاحتمالات الفردية لحدثين مستقلين فإنه يمكننا إيجاد احتمال وقوع الحدثين معًا باستخدام القاعدة التالية:

قاعدة الضرب للأحداث المستقلة Multiplication principle of Independent Events

إذا كان ٲ، ب حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معًا هو:
ل(ٲ ∩ ب) = ل(ٲ) × ل(ب)

معظم الآلات الحاسبة يمكنها إنتاج أعداد عشوائية تقع بين ٠، ١. كل عدد عشوائي ينتج يكون مستقلًّا عن العدد الآخر السابق له.

حاول أن تحل 8

في تجربة عشوائية عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات وملاحظة الوجه العلوي.

ما احتمال أن يكون الناتج (ص، ك، ص)؟

الاحتمال المشروط

قاعدة الاحتمال المشروط

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطًا بوقوع الحدث ٲ فإن:

$$ل(ب|ٲ) = \frac{ل(ٲ \cap ب)}{ل(ٲ)} \qquad \text{حيث } ل(ٲ) \neq ٠$$

وكذلك $ل(ٲ \cap ب) = ل(ٲ) \times ل(ب|ٲ)$

مثال 10

في تجربة عشوائية ٲ، ب حدثان حيث ل(ٲ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(ٲ ∩ ب) = ٠,٢ .

أوجد احتمال كل من الأحداث التالية: **أ** ل (ب|ٲ) **ب** ل (ٲ|ب)

حاول أن تحل 10 في تجربة عشوائية، إذا كان ل(أ) = ٣, ٠، ل(ب | أ) = ٢, ٠ . أوجد ل(أ ∩ ب).

مثال 11 رمى جاسم حجر نرد منتظم ولاحظ الوجه العلوي له.

نسمي الحدث ب: «الحصول على عدد أكبر من أو يساوي ٥»، الحدث أ: «الحصول على عدد فردي».

احسب ل(ب | أ) (احتمال ظهور عدد أكبر من أو يساوي ٥ بشرط أن يكون عددًا فرديًا)

حاول أن تحل 11

في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم، إذا كان الحدث ب «الحصول على عدد زوجي»، والحدث أ «الحصول على عدد أولي». فاحسب ل(ب|أ).

كراسة التمارين

(١١) ليكن ﺃ، ب حدثان مستقلان في فضاء عينة ف حيث ل(ﺃ) = ٢ , ٠ ، ل(ب) = ٧ , ٠ .

احسب:

(أ) ل(ﺃ ∩ ب)

(ب) ل(ب|ﺃ)

(جـ) ل(ﺃ ∪ ب)

(د) ل(ﺃ|ب)