كراسة التمارين ص 35تمرين 1

أستخدم التعريف $\frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ $f(x)=\lim_{h\to 0}$ لإيجاد مشتقة الداله f

$f(x)=\frac{3}{x}$ عند x=3

الحـــــــــــــــــــل

$$f(3)=1$$

$$f(3+h)=\frac{3}{3+h}$$

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{3+h}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(3+h)}=\frac{-1}{3}$$

كراسة التمارين ص 35تمرين(2)

أستخدم التعريف $f(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لإيجاد مشتقة الداله f

$f(x)=2x^3$ عند x=1

الحــــــــــــــــل

f (1) = 2

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{2x^3 - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}(x^2+x+1)$$

= 6

كراسة التمارين ص 35تمرين (3)

بين أن الدالة f لها مشتقة لجهة اليمين ومشتقه لجهة اليسار عند $x=1$ ولكن ليس لها مشتقة عند $x=1$ =

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \le 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

متصلة عند $X = 1$

الحـــــــــــــــــل

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_{+}(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x - 1}$$

$$1 = \lim_{x \to 1}(1)$$

$$f'_{-}(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1}(x^2 + x + 1)$$

$=3$

الدالة لها مشتقةمن جهة اليمين وتساوى 1
ولها مشتقة من اليسار وتساوى 3

ولكن $f'_{+}(1) \neq f'_{-}(1)$

$\therefore$ الدالة ليس لها مشتقة عند $X = 1$

تمرين 4 صـ 35

لتكن f:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & : \ x \le 1 \\ 4x - 1 & : \ x > 1 \end{cases}$$

ابحث قابلية اشتقاق الداله f عند $x = 1$.

الحـــــــــــــــــــل

نبحث اتصال الداله عند $X = 1$

f(1)=3

$$= \lim_{X \to 1}(4X - 1) \quad = 3$$

$$= \lim_{X \to 1}(X^2 + 2X) \quad = 3$$

$$f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

$\therefore$ *الدالة متصلة عند* $X = 1$

نبحث قابلية الاشتقاق عند $X = 1$

تمرين 5 ص 35

لتكن الداله f

$$f(x) = |x-3|$$

بين ان الداله fمتصله عند $x=3$ ولنها غير قابله للاشتقاق عندها.

$$f(x) = \begin{cases} x-3 \\ -x+3 \end{cases}$$

الحل :

نبحث اتصال الداله عند $x=3$

$f(3)=0$

$$\lim_{x\to 3^+}(X-3)$$

$=0$

$$\lim_{x\to 3^-}(-x+3)$$

$=0$

$f(3)= \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 0$

.:.الدالة متصلة عند $x=3$

نبحث قابلية الاشتقاق عند $x=3$

$$f(a)= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(3) = \lim_{x\to 3^+}\frac{x-3-0}{x-3}$$

$$f'_+(3) = \lim_{x\to 3^+}(1) = 1$$

$$f'_-(3) = \lim_{x\to 3^-}\frac{-x+3}{x-3} = \frac{-(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}(-1) = -1$$

$$f'_+(3) \neq f'_-(3)$$

اى ان الداله متصله $x=1$ وغير قابله للاشتقاق

تمرين 6 ص 35

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ 1 & : x = 0 \\ 2 & : x < 0 \end{cases}$$

بين ان الداله f غير قابله للاشتقاق عند $x=0$

الحـــــــــل

نبحث اتصال الداله

$f(0)=1$

$$\lim_{x\to 0^+}(f(x)) = \lim_{x\to 0^+} 2$$

$=2$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$\lim_{x\to 0}(f(x))$ غير موجوده

$$f(0) \neq \lim_{x\to 0}(f(x))$$

الداله ليست متصله عند $x=0$

وغير قابله للاشتقاق عند $X=0$

تمرين (7) :لتكن الداله $g(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & ,x\le 0\\ 2x+1 & ,x>0\end{cases}$

اوجد $g'(0)$

نبحث اتصال الداله عند x=0

g(0)=1

$\lim_{x\to 0^+}(g(x)=\lim_{x\to 0^+}2x+1=1$

$\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)^2=1$

$\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^+}g(x)$

$\lim_{x\to 0}(g(x)=1$

$g(0)=\lim_{x\to 0}(g(x)$

الدالهمتصله عند x=0

بحث الاشتقاق عند $x=0$

$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$g'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}2=2$

$g'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x+1)^2-1}{x}=\frac{x^2+2x+1-1}{x}$

$=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^2+2x}{x}\right)=2$

$g'_+(0)=g'_-(0)\quad \therefore g'(0)=2$

تمرين (8) لتكن الداله

$g(x) = \begin{cases} (x)^2 & ,x \le 2 \\ 4x - 4 & ,x > 2 \end{cases}$ اوجد $g\grave{(}2)$

لحـــــــــــل

$f(a) = \quad lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$$g'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{4x - 4 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{4(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \quad 4 = 4$$

$$g'_-(0) = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x)^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} (x + 2) = 4$$

$$g'_-(2) = g'_+(2)$$

$$\therefore \; g'(2) = 4$$

تمرين (9) لتكن الداله

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & ,x\le 1 \\ 3x+k & ,x>1 \end{cases}$$

قابله للاشتقاق عند X=1

فأوجد قيمة *k*

الحـــــــــل

الدالة قابلة للاشتقاق عند X = 1

∴ متصلة عند X = 1

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(3x+k)=3+k$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^3 =1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

3+k=1

K=-2

تمرين (10) ص35

لتكن $f(x)=\begin{cases} 3-x & ، x>1 \\ ax^2+bx & ، x\le 1 \end{cases}$ حيث a , b ثابتان

(a) إذا كانت f متصلة لكل قيم x فما العلاقة بين a , b

الحـــــــــــل

بما ان الداله متصله لكل قيم x

$$\therefore \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^+}(f(x))=\lim_{x\to 1^+} ax^2+bx=a+b$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3-x)=3-1=2$$

$a+b=2$

الداله متصله وقابله للاشتقاق

$$\therefore \quad f'_+(1) = f'_-(1)$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 2^+}\frac{3-x-2}{x-1}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 2^+}-1$$
$$=-1$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 2^+} \frac{ax^2+bx-a+b}{x-1} = \lim_{x\to 2^+} \frac{ax^2+bx-2}{x-1}$$

$\therefore a+b=2\ , b=2-a$, وبالتعويض عن قيمه

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax^2+(2-a)x-2}{x-1}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax^2+2x-ax-2}{x-1}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax^2+2x-ax-2}{x-1}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax(x-1)+2(x-1)}{x-1}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 2^+} \frac{ax(x-1)+2(x-1)}{x-1}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 2^+ =} ax+2$$

$$f'_+(1) = f'_-(1)$$

$$ax+2=-1$$

$$a+2=-1\ , a=\ -3$$

$$b=5$$