الملف حل أسئلة الكتاب (بند تعريف المشتقة)
موقع المناهج ⇦ المناهج الكويتية ⇦ الصف الثاني عشر العلمي ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الأول

Definition of Derivative تعريف المشتقّة

تعلّمت أنّ ميل منحنى الدالة f عند نقطة إحداثيها السيني $x = a$ هو:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

في حال وجود هذه النهاية فإنّها تسمّى مشتقّة الدّالة f عند a

Derivative at a Point **تعريف: المشتقّة عند نقطة**

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

من التعريف السابق يمكننا القول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x = a$ إذا كانت النهاية موجودة ويرمز لذلك بالرمز:

$$f'(a) \quad \text{أو} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

أما إذا كانت النهاية غير موجودة عند $x = a$ نقول إن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = a$ (غير موجودة $f'(a)$)

مثال (1)

باستخدام التعريف، أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = 2x^2 + 1$ عند $x = 1$

الحـــــــــل

$$f'(a) = \lim_{h\to0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$x = 1 \to a = 1 \,, f(1) = 2(1^2) + 1 = 3$$

$$\therefore f'(1) = \lim_{h\to0}\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{2(1+h)^2 + 1 + 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{2 + 4h + 2h^2 + 1 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{4h + 2h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}(4 + 2h)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to0}(4 + 2h)$$

$$= 4 + 0 = 4$$

مشتقة الدالة f عنـــد x=1 هي : $f'(1) = 4$

حاول أن تحل

1 باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

الحــــــــــل

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$x = -2 \to a = -2 \,, f(-2) = 3(-2)^2 = 12$$

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{3(-2+h)^2 - 12}{h}$$

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{12 + 3h^2 - 12h - 12}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(3h + 12)}{\cancel{h}}$$

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} 3h - 12 = -12$$

Definition of Derivative

تعريف المشتقّة

تعلّمت أنّ ميل منحنى الدالة f عند نقطة إحداثيها السيني $x = a$ هو:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

في حال وجود هذه النهاية فإنّها تسمّى **مشتقّة الدّالة f عند a**

اذا وضعنا $a+h=x$ فانه عندما $h \to 0$ فإن $x \to a$

تعريف (بديل): المشتقّة عند نقطة

مشتقّة دالّة f عند $x = a$ هي :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شرط وجود النهاية.

ملاحظة: التعريف البديل للمشتقة هو صورة أخرى لتعريف المشتقة.

مثال (2)

باستخدام التعريف البديل. أوجد مشتقة الدالة f : $f(x)=\sqrt{x}$ عند $x=a$ حيث $a>0$

الحل:

عند النقطة $x=a$ ، (إن وجدت)

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\lim_{h\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$$

$$\lim_{h\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$\lim_{h\to a}\frac{(x-a)}{x-a}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$\lim_{h\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

أختبار الجذر

$$\lim_{x\to a}x=a\,,\quad a>0$$

$$\therefore \lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{\lim_{x\to a}x}=\sqrt{a}$$

أختبار المقام

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}+\sqrt{a}$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}+\lim_{x\to a}\sqrt{a}$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}\quad,2\sqrt{a}\neq 0$$

حاول ان تحل 2) اوجد مشتقة الداله : $F(x) = \frac{1}{x}$ $x = b\,, b \neq 0$

الحل

$$f'(b) = \lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

$$f'(b) = \lim_{x\to b}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{b}}{x-b}$$

$$f'(b) = \lim_{x\to b}\frac{\frac{b-x}{bx}}{x-b}$$

$$f'(b) = \lim_{x\to b}\frac{-1}{bx}$$

$$f'(b) = \lim_{x\to b}\frac{-1}{b^2}$$

اختبار المقام

$$\lim_{x\to b} bx = b.b$$

$$= b^2 \quad ,b \neq 0$$

One-Sided Derivative

المشتقّة من جهة واحدة

مشتقة الدالة f من اليمين يرمز لها بالرمز $f'_{+}(a)$ وهي:

$$\lim_{h\to 0^{+}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

ومشتقة الدالة f من اليسار يرمز لها بالرمز $f'_{-}(a)$ وهي:

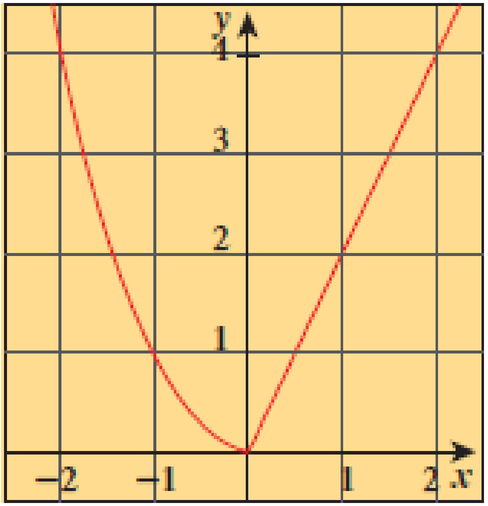
$$\lim_{h\to 0^{-}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

إن الدالة لها مشتقة عند نقطة إذا وفقط إذا كانت المشتقتان لجهة اليمين ولجهة اليسار موجودتين ومتساويتين عند تلك النقطة.

مثال (3)

بيّن أن الدالة التالية لها مشتقة لجهة اليمين ومشتقة لجهة اليسار عند $x = 0$، لكن ليس لها مشتقة عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x \le 0 \\ 2x & ; \quad x > 0 \end{cases}$$



رسم توضيحي

الحل:

نتحقق من وجود المشتقة لجهة اليمين:

(إن وجدت) $$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{2(0+h) - 0^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 2 = 2 \qquad (1)$$

نتحقق من وجود المشتقة لجهة اليسار:

(إن وجدت) $$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{(0+h)^2 - 0^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} h = 0 \qquad (2)$$

من $(1), (2)$ $\quad f'_-(0) \ne f'_+(0)$

$\therefore$ $f'(0)$ ليست موجودة أي أن الدالّة ليس لها مشتقّة عند $x = 0$

حاول أن تحل

3 لتكن f : $f(x)=|x-2|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x=2$.

$$f(x)=|x-2| \qquad x=2$$

$$f(x)=\begin{cases} x-2 & : x\geq 2 \\ 2-x & : x<2 \end{cases}$$

$$f'_{+}(2)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{(2+h)-2-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{2+h-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0^+}1=1$$

$$f'_{+}(2)=1$$

$$f'_{-}(2)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-2-h+2-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}$$

$$f'_{-}(2)=\lim_{h\to 0^-}-1=-1$$

$$f'_{-}(2)=-1$$

$$f'_{+}(2)\neq f'_{-}(2)$$

$f'(2)$ ليست موجوده

أي أن الدالة ليس لها مشتقة عند $X=2$

مثال (4)

لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} & , \quad x \le 1 \\ \sqrt{x} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

بيّن أن للدالة f مشتقة لجهة اليمين مساوية للمشتقة لجهة اليسار عند $x = 1$.

الحـــــــــل

$$\lim_{h \to 0^+} (1 + h) = 1 \ , 1 > 0$$

$$\therefore \lim_{h \to 0+} \sqrt{1 + h} = \sqrt{\lim_{h \to 0+} (1 + h)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{h \to 0+} (\sqrt{1 + h} + 1) = 1 + 1 = 2 , \ 2 \neq 0$$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{1}{\sqrt{1 + h} + 1} = \frac{\lim_{h \to 0+} 1}{\lim_{h \to 0+} (\sqrt{1+h} + 1)} = \frac{1}{2}$$

من (1), (2) $\qquad f_-'(1) = f_+'(1)$

وبالتالي الدالة f لها مشتقة لجهة اليمين عند $X=1$ مساوية للمشتقة للجهة اليسار

حاول أن تحل

4 لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & , \quad x\le -1\\ \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2} & , \quad x>-1\end{cases}$$

بيّن أن للدالة f مشتقّة لجهة اليمين مساوية للمشتقّة لجهة اليسار عند $x=-1$.

الحل:

$$f'_{-}(-1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$ (ان وجدت)

$$f'_{-}(-1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\left(\frac{1}{-1+h}\right) - \left(\frac{1}{-1}\right)}{h}$$

$$f'_{-}(-1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{-1+1-h}{1-h}}{h}$$

$$f'_{-}(-1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{-1}{1-h} = -1$$

$$f'_{+}(-1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$ (ان وجدت)

$$f'_{+}(-1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{2}(-1+h)^2 - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}(-1)^2 - \frac{2}{3}\right)}{h}$$

$$f'_{+}(-1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h + \frac{1}{2}h^2}{h} = -1$$

$$f'_{-}(-1) = f'_{+}(-1) = -1$$

$$f'(-1) = -1$$

ملاحظات:

- إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in (a,b)$، فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b).
- إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في الفترة $(-\infty,\infty)$، فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- إذا وضعنا x بدلًا من a في تعريف المشتقة عند النقطة نحصل على $f'(x)$ حيث $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
  ويمكن أن نرمز للمشتقة بأحد الرموز التالية: $y', f'(x), \frac{d}{dx}(f(x)), \frac{dy}{dx}$
- لأي دالة f تكون f' دالة أخرى مجالها مكوّن من جميع قيم x التي يكون للدالة مشتقة عندها أي $(D_{f'} \subseteq D_f)$ أي أن f' دالة مستخلصة من الدالة f.

مثال (5)

لتكن $f(x) = x^3$ باستخدام تعريف المشتقه ان وجدت

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - (x)^3}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2)$$

$=3x^2$

$F'(x)=3x^2$

حاول أن تحل

5 لتكن $f(x) = x^2 + 2$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

$$f'(x) = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)^2+2-(x^2+2)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)^2+2-(x^2+2)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)^2+2-(x^2+2)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to0}\frac{h(2x+h)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to0}(2x+h)$$

$$f'(x) = 2x$$

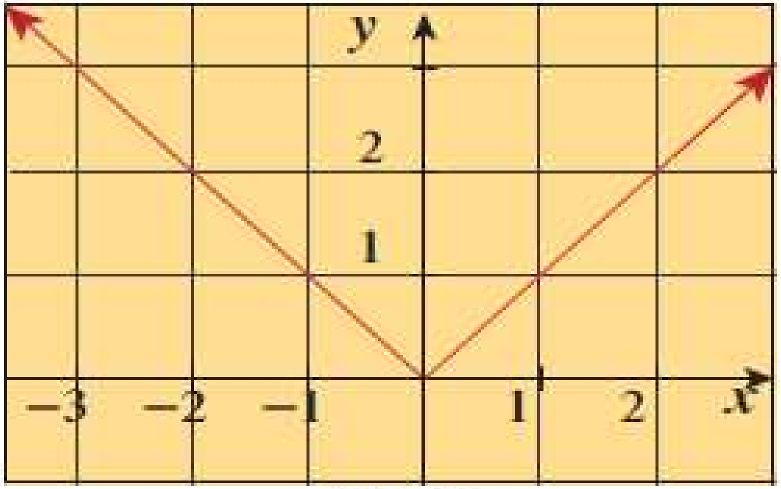
متى تكون $f'(a)$ غير موجودة؟

الدالة f لن يكون لها مشتقّة عند نقطة $P(a, f(a))$ إذا كانت $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ غير موجودة.

وتوضّح الأشكال التالية أربع حالات تكون فيها هذه النهاية غير موجودة:

a ركنًا (Corner): تكون المشتقتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.

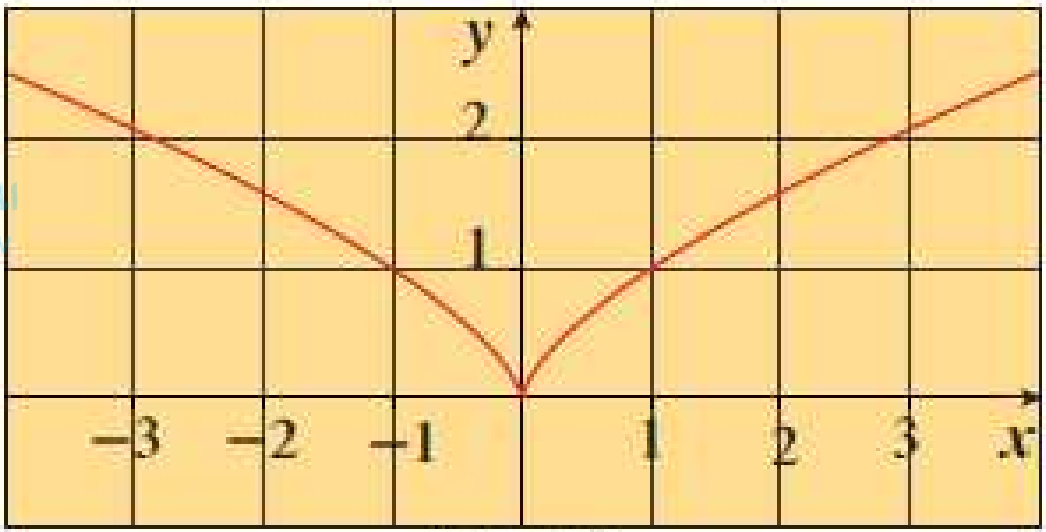
مثال: $f(x) = |x|$



شكل (3)

يوجد ركن عند $x = 0$ ، $f'(0)$ غير موجودة

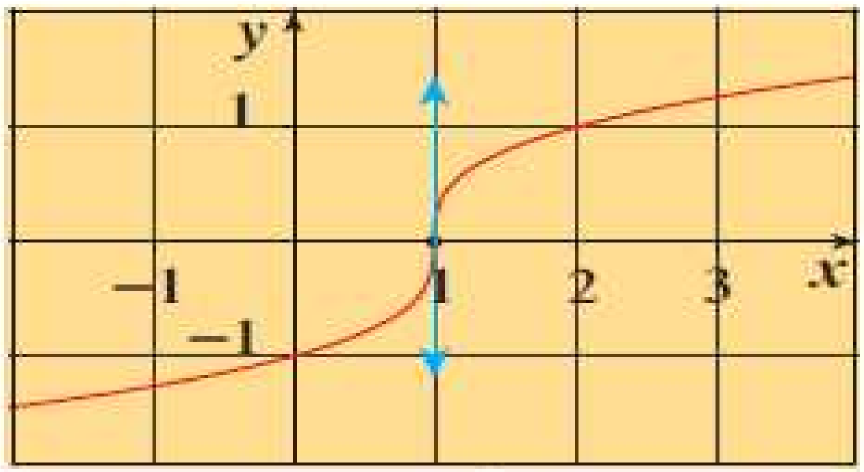
b نابًا (Cusp): يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها. مثال: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$



شكل (4)

يوجد ناب عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة ويوجد مماس رأسي عندها

c مماسًا رأسيًا: يكون المماس للمنحنى عند نقطة محددة رأسيًا.



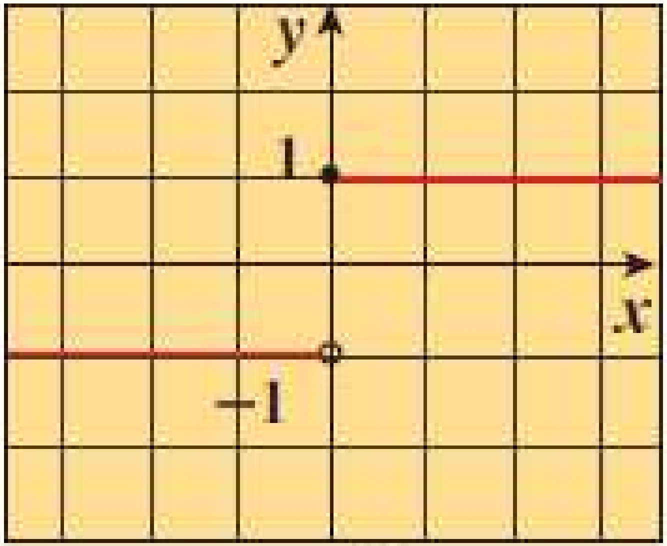
شكل (5)

$$y = (x - 1)^{\frac{1}{3}}$$

يوجد مماس رأسي عند $x = 1$ ، $f'(1)$ غير موجودة

d عدم اتصال: تكون المشتقة من جهة واحدة أو كلّ من الجهتين غير موجودة. مثال:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$



شكل (6)

يوجد عدم اتصال عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة

تدريب

أوجد كل النقاط في مجال الدالة حيث تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق في كل مما يلي:

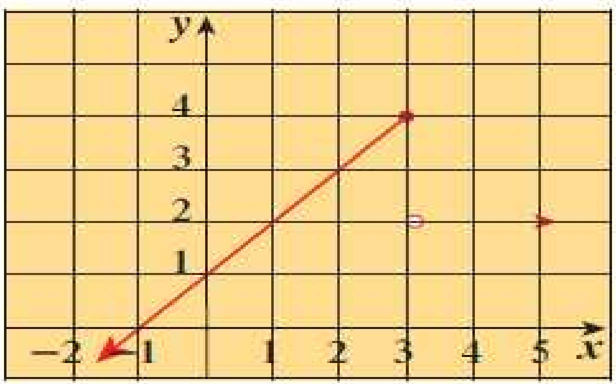
غير قابلة للاشتقاق عند $x=3$

(عدم اتصال)

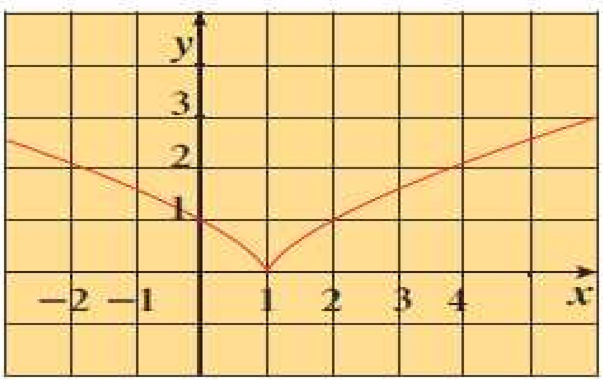
غير قابلة للاشتقاق عند $x=1$

(ناب)

d $f(x)=\begin{cases} 2 & : x>3 \\ x+1 & : x\le 3 \end{cases}$



c $f(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}}$



الاشتقاق والاتصال

نبدأ هذا الجزء بإلقاء نظرة على الطرائق العاديّة التي يمكن أن تفشل في أن تكون فيها للدالّة مشتقّة عند نقطة.

كأحد الأمثلة، قد أظهرنا بيانيًّا أنّ عدم اتصال الدالة عند نقطة يسبّب عدم وجود مشتقّة للدالة عند هذه النقطة.

وعليه إذا كانت الدالة f ليست متصلة عند نقطة $(a\ ,\ f(a))$ فإنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

مثال (6)

لتكن f : $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x < 2 \\ 2x - 1 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$.

الحل:

نبحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

$$f(2) = 2(2) - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = (2)^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x - 1) = 2(2) - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

ليست متصلة عند ***X=2***

غير قابلة للاشتقاق عند X=2

حاول أن تحل

6 لتكن f : $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & ; \quad x\le 2 \\ 3x-2 & ; \quad x>2 \end{cases}$ ، ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x=2$.

$$f(2) = 2^{2} - 4 = 0$$

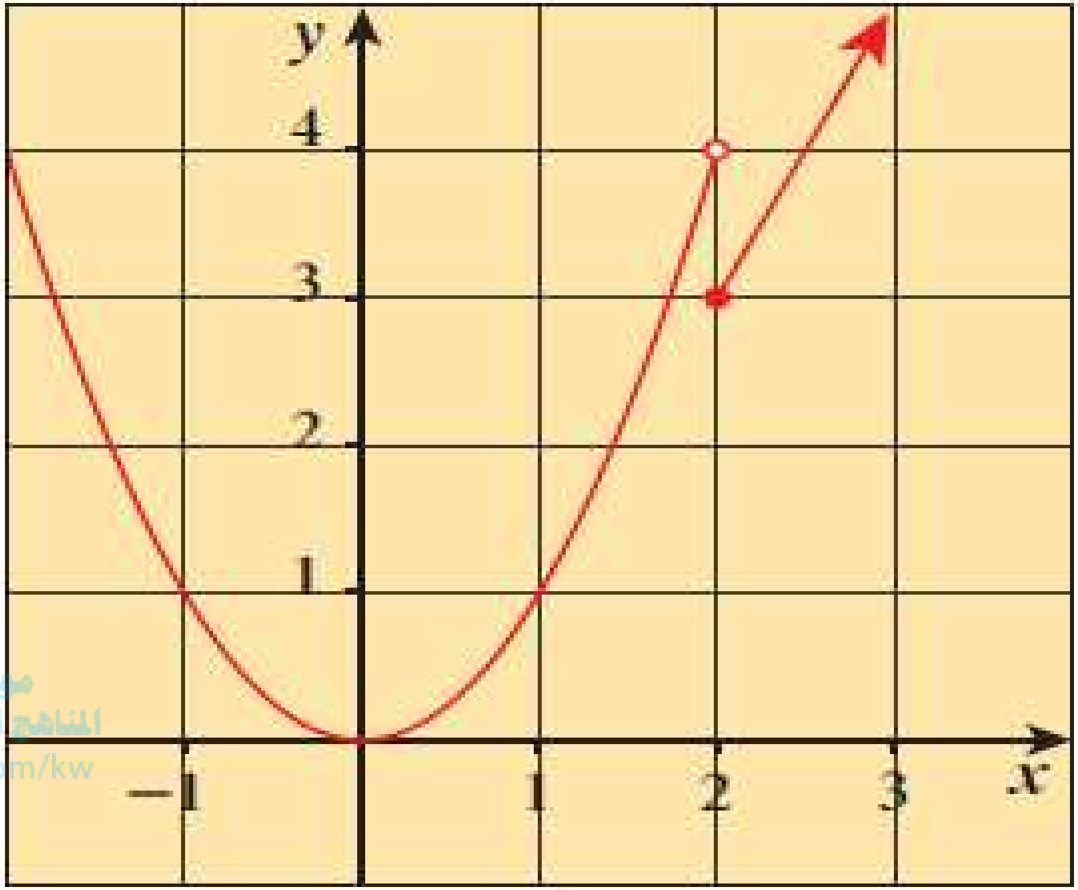
$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2-} (\ x\ 2\ - 4\ ) = 0$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2-} (\ 3x\ - 2\ ) = 4$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x) \neq \lim_{x\to 2+} f(x)$$

بالتالي f ليست متصلة عند *X=2*

وبناءاً عليه تكون غير قابلة للاشتقاق عند *X=2*



شكل (7)

الشكل (7) يمثل بيان الدالة في مثال (6).

الاتصال شرط جوهري لإمكانية وجود المشتقة، والنظرية التالية تبين العلاقة بين الاشتقاق والاتصال.

نظريّة الاشتقاق والاتصال

إذا كانت الدّالة f لها مشتقّة عند نقطة، فإنّها تكون متصلة عند هذه النقطة.

البرهان:

لتكن النقطة $(a\ ,\ f(a))$ تنتمي لبيان الدالة f

علينا أن نبيّن أنّ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ أو مكافئًا لذلك أنّ: $\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = 0$

باستخدام قاعدة حاصل ضرب النهايات (وملاحظة أنّ $x - a \neq 0$)،

نستطيع أن نكتب:

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \left[(x - a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right]$$

$$= \lim_{x \to a} (x - a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= 0 \cdot f'(a)$$ حيث $f'(a)$ موجودة

$$= 0$$

<table>
<tr><td colspan="3">المشتقة الثانيةعند x=a</td></tr>
<tr><td colspan="3">المشتقة الاولى عند x=a</td></tr>
<tr><td colspan="3">اتصال الدالة f عند x=a</td></tr>
<tr><td rowspan="2">الدالة f معرفةعند
X=a</td><td colspan="2">$\lim_{x\to a} f(x)$</td></tr>
<tr><td>$\lim_{x\to a^-} f(x)$</td><td>$\lim_{x\to a^+} f(x)$</td></tr>
</table>

وجود احد الطوابق يحتم وجود الطوابق الأسفل منه

وجود احد الطوابق لا يعني بالضرورة وجود الطوابق الأعلى منه

مثال (7)

لتكن f :
$$f(x)=\begin{cases}6x-1 & , \quad x>\frac{1}{2}\\ 2x+1 & , \quad x\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}$$

بيّن أن الدالة f متصلة عند $x=\frac{1}{2}$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندها.

الحل

نبحث اتصال الداله $X=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}(6x-1)=6\left(\frac{1}{2}\right)-1=2$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)+1$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}(2x+1)=2\left(\frac{1}{2}\right)+1=2$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=2$$

الداله f متصله عند $X=\frac{1}{2}$

نبحث اشتقاق الداله f عند $X=\frac{1}{2}$

$$f'(\tfrac{1}{2})=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=$$

$$f'-(\tfrac{1}{2})=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=$$

$$f'+(\tfrac{1}{2})=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{6x-1-2}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{6\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=6$$

$$f'-(\tfrac{1}{2})=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x+1-2}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=2$$

$$f'-\left(\tfrac{1}{2}\right)=f'+\left(\tfrac{1}{2}\right)=$$

حاول أن تحل

7 لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} -x-1 : x > \frac{-1}{3} \\ 5x+1 : x \leqslant \frac{-1}{3} \end{cases}$$

بيّن أنّ الدالة f متصلة و غير قابلة للاشتقاق عند $x=-\frac{1}{3}$

الحل

نبحث اتصال الدالة عند $X=\frac{1}{3}$

$f\left(\frac{-1}{3}\right)=5\left(\frac{-1}{3}\right)+1=\frac{-2}{3}$

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x)=\frac{-2}{3}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{3}^+}(-x-1)=\frac{-2}{3}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{3}^-}(5x+1)=\frac{-2}{3}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x)=f\left(\frac{-1}{3}\right)\frac{-2}{3}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{3}^+}(f(x)=\frac{-2}{3}$$

الدالة متصلة عند $X=\frac{-1}{3}$

نبحث اشتقاق الداله f عند $X=\frac{1}{2}$

$$f'(\tfrac{1}{2})=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=$$

$$f'_-(\tfrac{1}{2})=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=$$

$$f'_+(\tfrac{1}{2})=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{6x-1-2}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{6\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=6$$

$$f'_-(\tfrac{1}{2})=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x+1-2}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=2$$

$$f'_-\left(\tfrac{1}{2}\right)=f'_+\left(\tfrac{1}{2}\right)=$$

مثال (8)

لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & : \quad x\leqslant 2 \\ -x^2+7x-10 & : \quad x>2 \end{cases}$$

بيّن أن الدالة f متصلة عند $x=2$ وادرس قابلية الاشتقاق عندها.

الحـــــــــــل

لنبحث الدالة f متصلة عند $X=2$

$$f(2)=(2)^2-(2)-2=0$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(x^2-x-2)=4-2-2=0$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(-x^2+7x-10)=-4+14-10=0$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)$$

الدالة f متصلة عند $X=2$

ندرس قابلية الأشتقاق عند $X = 2$ إن وجدت

$$f_-'(2) = \lim_{x\to 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$f_-'(2) = \lim_{x\to 2-} \frac{x^2 - x - 2 - 0}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 2-} \frac{(x+1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to 2-} (x+1) = 2+1 = 3$$

$\therefore f'_-(2)=3$

إن وجدت

$$\therefore f'_+(2) = \lim_{x\to 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2+} \frac{-x^2+7x-10-0}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2+} \frac{\cancel{(x+2)}(x-5)}{\cancel{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to 2+} (x-5) = -(2-5) = 3$$

$\therefore f'_-(2) = f'_+(2) = 3$

الدالة f قابلة للاشتقاق عند $X = 2$ و $f'(2) = 3$

حاول أن تحل

8 ادرس اتصال الدالة f عند $x = 1$ وقابلية اشتقاقها عند هذه النقطة حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2+1} & : x \leqslant 1 \\ 2x - 1 & : x > 1 \end{cases}$$

ندرس اتصال الدالة f عند X = 1

$$f(1) = \frac{2}{1^2 + 2}$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (2x - 1) = 1$$

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{2}{x^2 + 1} = 1$$

شرط المقام

Lim $(x^2 + 1) = 2 \neq 0$
x→1

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x) = f(1)$$

الدالة f متصلة عند X = 1

نبحث اشتقاق الدالة f عند $x = 1$

$$f'_{-}(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$ (ان وجدت)

$$f'_{-}(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{2}{x^2+1} - \frac{2}{1^2+1}}{x - 1}$$

$$f'_{-}(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$f'_{-}(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{-x - 1}{(x^2+1)}$$

$$f'_{-}(1) = -1$$

$$f'_{+}(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$ (ان وجدت)

$$f'_{+}(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(2x - 1) - (1)}{x - 1}$$

$$f'_{+}(1) = \lim_{x \to 1^{+}} \frac{(2x-1)-(1)}{x-1}$$

$$f'_{+}(1) = \lim_{x \to 1^{+}} \frac{2(x-1)}{x-1}$$

$$f'_{+}(1) = 2$$

$$f'_{-}(1) \neq f'_{+}(1)$$

بالتالي الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

رغم انها متصلة عندها

$f'(1)$ غير موجودة

مثال (9)

لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} x+5 & : \ x\leqslant 3 \\ x^2-1 & : \ x>3 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن $f'(3)$

الحـــل

$$f'_-(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$ (إن وجدت)

$$f'_-(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{x+5-8}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{x-3}{x-3}=1$$

$$\therefore\ f'_-(3)=1$$

$$f'_+(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$ (إن وجدت)

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-1-8}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{\cancelto{1}{(x-3)}(x+3)}{\cancelto{1}{x-3}}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}(x+3)=6$$

$$\therefore\ f'_+(3)=6$$

$$\because\ f'_-(3)\neq f'_+(3)$$

$\therefore\ f'(3)$ غير موجودة

حاول أن تحل

9 لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & : x\leqslant -1 \\ x^2-x-2 & : x>-1 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

$$f_-'(-1) = \lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$ (ان وجدت)

$$f_-'(-1) = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x^2+x)-(0)}{x+1}$$

$$f_-'(-1) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x(x+1)}{x+1}$$

$$f_-'(-1) = \lim_{x\to -1^-} x = -1$$

$$f_+'(-1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$ (ان وجدت)

$$f_+'(-1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x^2-x-2)-(0)}{x+1}$$

$$f_+'(-1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1}$$

$$f_+'(-1) = \lim_{x\to -1^+} (x-2) = -3$$

$$f_+'(-1) \neq f'_-(-1)$$

$f'(-1)$ غير موجود