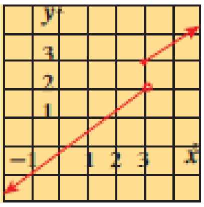
الإتصال

P. 49

تدريب

1

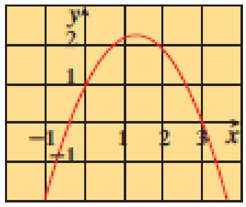


$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ......غير موجوده......

$f(3)$ ......$= 3$......

ماذا تلاحظ؟

2

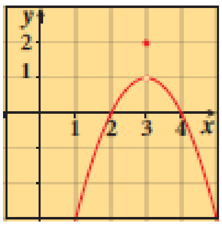


$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ......$= 0$......

$f(3)$ ......$= 0$......

ماذا تلاحظ؟

3

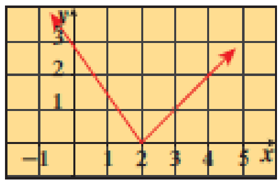


$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ......غير موجوده......

$f(3)$ ......$= 2$......

ماذا تلاحظ؟

4



$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ......$= 1$......

$f(3)$ ......غير موجوده......

ماذا تلاحظ؟

① P. 50 ادرس اتصال f عند $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & ; \ x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & ; \ x > 0 \end{cases}$$

$$f(0) = (0)^3 + 0 = 0 \quad \ldots (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^3 + x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{0^2}{0+1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \ \ldots (2)$$

$$f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$$

$\therefore$ f متصله عند $x=0$

$P. 50$ ② ادرس اتصال الدالة f عند $x=2$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & : x<2 \\ 1 & : x=2 \\ \dfrac{x^2+1}{5} & : x>2 \end{cases}$$

$$f(2)=1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(2x+1)=2(2)+1=5$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+1}{5}=\frac{2^2+1}{5}=\frac{5}{5}=1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)$$ غير موجوده

∴ الدالة f غير متصلة عند $x=2$

$P. 51$ ③ ادرس اتصال الدالة f عند $x=-1$ حيث

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1}-2x & : x\neq -1 \\ 2 & : x=-1 \end{cases}$$

$|x+1|=-(x+1)$; $|x+1|=x+1$

$-$; -1 ; $+$

$$f(x)=\begin{cases} 1-2x & : x>-1 \\ 2 & : x=-1 \\ -1-2x & : x<-1 \end{cases}$$

$$f(-1)=2$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(-1-2x)=-1-2(-1)=1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(1-2x)=1-2(-1)=3$$

$$\therefore \lim_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim_{x\to -1^+} f(x) \Rightarrow$$

∴ $\lim_{x\to -1} f(x)$ غير موجوده

∴ f غير متصلة عند $x=-1$

④ P. 53 أعد تعريف الدالة f لتصبح دالة متصلة عند $x=1$:

$$f(x)=\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\frac{(x-1)(x+4)}{x-1}=$$

مجال f: $D=\mathbb{R}-\{1\}$

∴ f غير متصلة عند $x=1$ لأنها غير معرفة عندها

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+4)}{\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}(x+4)=5$$

∴ يمكن إعادة تعريف f عند $x=1$ ونسميها g بالشكل:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1} & ; x\neq 1\\[2mm] 5 & ; x=1\end{cases}$$

[illegible]

① P. 55 ادرس اتصال الدالة f : عند $x=3$

$$f(x)=x^2-4x+3+|x|$$

لتكن الدالة $g(x)=x^2-4x+3$ متصلة عند $x=3$ «كثيرة حدود»

$h(x)=|x|$ متصلة عند $x=3$ «دالة مطلق»

∴ $f(x)=g(x)+h(x)$ متصلة عند $x=3$ «دالة الجمع»

② P. 55 ادرس اتصال الدالة f : عند $x=1$

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{2x}{x-2}$$

$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ حدودية نسبية متصلة عند $x=1$

$h(x)=\dfrac{2x}{x-2}$ حدودية نسبية متصلة عند $x=1$

∴ $f(x)=g(x)-h(x)$ متصلة عند $x=1$

P. 56 ③ ادرس اتصال كل من الدالتين عند $x=-2$

ⓐ $f(x)=\dfrac{\sqrt[5]{x}}{x^2+4}$

نفرض

$g(x)=\sqrt[5]{x}$ دالة جذرية $(n=5)$ (عدد صحيح فردي) متصلة عند $x=-2$

$h(x)=x^2+4$ دالة كثيرة حدود متصلة عند $x=-2$

$h(-2)=8\neq 0$ ∴ دالة ناتج القسمة $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ متصلة عند $x=-2$

ⓑ $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$

نفرض

$g(x)=x^2-4x+3$ كثيرة حدود متصلة عند $x=-2$

$g(-2)=(-2)^2-4(-2)+3=15>0$

∴ $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x=-2$

P. 58 ④ إذا كانت f ، g معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي

$g(x)=x^2+3$ ، $f(x)=2x+3$ اوجد:

ⓐ $(g\circ f)(x)=g(f(x))=(f(x))^2+3=(2x+3)^2+3$
$=4x^2+12x+12$

ⓑ $(g\circ f)(-1)=4(-1)^2+12(-1)+12=4$

ⓒ $(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(g(x))+3=2(x^2+3)+3$
$=2x^2+9$

ⓓ $(f\circ g)(-1)=2(-1)^2+9=11$

⑤ لتكن $g(x) = \frac{3}{x^2+4}$ ، $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ اوجد: P. 58

مجال f هو R ، مدى f هو $[1, \infty)$

مجال g هو R ، مدى g هو $(0, \frac{3}{4}]$

ⓐ $(f \circ g)(x) =$

$(0, \frac{3}{4}] \subseteq R$

مدى g $\subseteq$ مجال f

$$= f(g(x)) = \sqrt{1+(g(x))^2} = \sqrt{1+\left(\frac{3}{x^2+4}\right)^2}$$

ⓑ $(g \circ f)(\sqrt{3}) =$

$[1, \infty) \subseteq R$

مدى f $\subseteq$ مجال g

$$= g(f(\sqrt{3})) = \frac{3}{(f(\sqrt{3}))^2+4} = \frac{3}{\left(\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}\right)^2+4} = \frac{3}{8}$$

⑥ لتكن $g(x) = 2x+3$ ، $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ P.59

ادرس اتصال $f \circ g$ عند $x = 1$

$g(x) = 2x+3$ دالة متصلة عند $x = 1$ حدودية

$g(1) = 2(1)+3 = 5$

$f(x) = \frac{|x|}{x+2} = \frac{x}{x+2}$ في جوار مناسب للعدد 5

$\therefore$ f متصلة عند $x = 5$ حدودية نسبية ماعدا أصفار المقام)

$\therefore$ $f \circ g$ متصلة عند $x = 1$

P. 60 ⑦ ابحث اتصال الدالة f عند $x=0$

$$f(x)=|x^2-3x+2|$$

بفرض

$g(x)=|x|$ ، $h(x)=x^2-3x+2$

فنجد أن :

$$f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))$$
$$=|x^2-3x+2|$$

h دالة متصلة عند $x=0$

$$h(0)=0^2-3(0)+2=2$$

g دالة متصلة عند $x=2$

∴ $g\circ h$ متصلة عند $x=0$

الإتصال على فترة

P. 62 ① ادرس اتصال f على الفترة المبينة :

ⓐ $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$; $[0,3]$

∵ f دالة حدودية نسبية ،

$\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+2\neq 0$ ∴ f متصلة على $\mathbb{R}$

$[0,3]\subseteq f$ ∴ f متصلة على $[0,3]$

ⓑ $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$; $[0,2]$

$\forall x\in\{1,-1\}$ $x^2-1=0$

∵ f دالة حدودية نسبية متصلة $\forall x\in\mathbb{R}-\{1,-1\}$

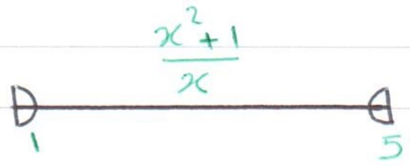
∵ f ليست متصلة عند $x=1$ ، $1\in[0,2]$

∴ الدالة f متصلة $\forall x\in[0,2]-\{1\}$

∴ الدالة f متصلة على كل من $[0,1)$ و $(1,2]$

P. 63 ② ادرس اتصال الدالة f على $[1,5]$ حيث :

$$f(x)=\begin{cases} 2 & : x=1 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & : 1<x<5 \\ \dfrac{26}{5} & : x=5 \end{cases}$$



$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x} \;:\; x\in(1,5)$ *

$\forall c\in(1,5) \;:\; f(c)=\dfrac{c^2+1}{c}$

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{c^2+1}{c}$

$\therefore \lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c) \;;\; \forall c\in(1,5)$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $(1,5)$ ... ①

* دراسة اتصال f عند $x=1$ من اليمين

$f(1)=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{1^2+1}{1}=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=2$

$\therefore$ f متصلة عند $x=1$ من اليمين ... ②

* دراسة اتصال f عند $x=5$ من اليسار

$f(5)=\dfrac{26}{5}$

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{5^2+1}{5}=\dfrac{26}{5}$

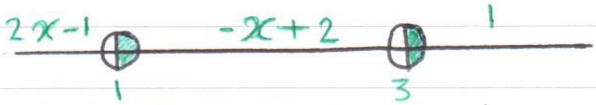
$\therefore \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=f(5)=\dfrac{26}{5}$

$\therefore$ f متصلة عند $x=5$ من اليسار ... ③

من ① ② ③ f متصلة على $[1,5]$

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & : x<1\\ -x+2 & : 1\leq x<3\\ 1 & : x\geq 3\end{cases}$$

③ P.64



ⓐ مجال f = مجال $f = (-\infty,1)\cup[1,3)\cup[3,\infty) = \mathbb{R}$

ⓑ $g(x)=2x-1$ كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ إذن

$f(x)=g(x)=2x-1 \; : \; x\in(-\infty,1)$

متصلة على $(-\infty,1)$ ... ①

وكذلك $f(x)=h(x)=-x+2 \; : \; x\in[1,3)$ متصلة على $[1,3)$ ... ②

وكذلك $f(x)=J(x)=1 \; : \; x\in[3,\infty)$ متصلة على $[3,\infty)$ ... ③

دراسة اتصال f عند $x=1$ من اليسار:

$f(1)=-1+2=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x-1)=2(1)-1=1$$

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$$

$\therefore$ f متصلة عند $x=1$ من اليسار ... ④

دراسة اتصال f عند $x=3$ من اليسار:

$f(3)=1$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(-x+2)=-(3)+2=-1$$

$$f(3)\neq\lim_{x\to 3^-} f(x)$$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x=3$ من اليسار ... ⑤

من ① ② ③ ④ ⑤ f متصلة على $[3,\infty)$ و $(-\infty,3)$

④ P.65 لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} 5 & : x = 1 \\ ax+b & : 1 < x < 4 \\ b+8 & : x = 4 \end{cases}$$

متصلة على $[1 ، 4]$ أوجد قيم الثابتين $a ، b$

f متصلة عند $x=1$ من اليمين إذن

$f(1) = 5$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x = 1^+} (ax+b) = a(1)+b = a+b$$

$$\therefore \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow a+b = 5 \quad \dots (1)$$

f متصلة عند $x=4$ من اليسار إذن

$f(4) = b+8$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4} (ax+b) = a(4)+b = 4a+b$$

$$\therefore \lim_{x \to 4^-} f(x) = f(4) \Rightarrow 4a+b = b+8 \quad \dots (2)$$

$4a+b = b+8$

$4a+b-b = 8$

$4a = 8 \Rightarrow a = 2$

$a+b = 5 \Rightarrow 2+b = 5$

$b = 3$

P. 66 ⑤ اوجد D_f ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-1 ، 2]$:

$f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$

$D_f=\{x : x^2-7x+10\geq 0\}$

$x^2-7x+10=0$

$(x-5)(x-2)=0$

$x=5 \qquad x=2$

$\therefore\ x^2-7x+10\geq 0 \quad \forall\, x\in[-1 ، 2]$ ...①

$\therefore$ مجال f : $D_f=\mathbb{R}-(2 ، 5)$

$\because$ الدالة g : $g(x)=x^2-7x+10$ دالة كثيرة حدود

متصلة على $[-1 ، 2]$ ...②

$\therefore$ f متصلة على $[-1 ، 2]$

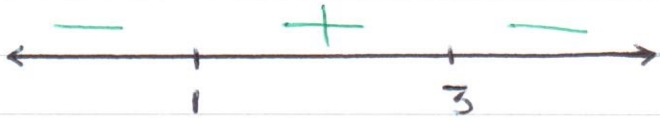
P. 66 ⑥ ادرس اتصال الدالة f على $[1 ، 3]$

$f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$

$-x^2+4x-3=0$

$(x-3)(x-1)=0$

$x=3 \quad ، \quad x=1$



$-x^2+4x-3\geq 0 \quad \forall\, x\in[1 ، 3]$ ...①

②... الدالة $g(x)=-x^2+4x-3$ دالة كثيرة حدود متصلة على $[1 ، 3]$

$\therefore$ f متصلة على $[1 ، 3]$

⑦ ابحث اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$ P. 67

$$f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$$

بفرض

$$g(x) = \sqrt[3]{x} \text{ ، } h(x) = -x^2 + 2x + 5$$

$$f(x) = (g \circ h)(x)$$
$$= g(-x^2 + 2x + 5)$$
$$= \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$$

$\because$ h متصلة على $\mathbb{R}$ ، g متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$

[illegible] P. 68

$$f(x) = \frac{x^4 + kx^3 - 15x^2 + 2x - 10}{x^2 - 3x - 10}$$

ⓐ اوجد مجال f : يجب ان يكون المقام $\neq 0$

$$x^2 - 3x - 10 \neq 0 \implies x \neq -2 \text{ ، } x \neq 5$$

$$\therefore D_f = \mathbb{R} - \{-2 , 5\}$$

ⓑ اوجد قيمة k ثم اعد تعريف f لتصبح متصلة

$$x^4 + kx^3 - 15x^2 + 2x - 10 = (x^2 - 3x - 10)(ax^2 + bx + c)$$
$$= ax^4 + (b - 3a)x^3 + (-10a - 3b + c)x^2 + (-3c - 10b)x - 10c$$

بالمطابقة $k = -1$ ، $b = 2$ ، $c = 1$ ، $a = 1$

$$f(x) = \frac{(x^2 \cancel{- 3x} + 10)(x^2 + 2x + 1)}{(x^2 \cancel{- 3x} + 10)} = x^2 + 2x + 1$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2}(x^2 + 2x + 1) = (-2)^2 + 2(-2) + 1 = 1$$

عندها يمكن إعادة تعريف الدالة وتسميتها g

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - x^3 - 15x^2 + 2x - 10}{x^2 - 3x - 10} & ; x \neq -2 \\ 1 & ; x = -2 \end{cases}$$