(1 ـ 6) المساحات فى المستوى

المساحات

دالة واحدة $f(x)$

فترة واحدة $[a,b]$

$$A=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

فترتين $[a,b],[b,c]$

$$A=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|+\left|\int_b^c f(x)\,dx\right|$$

دالتين $g(x), f(x)$

فترة واحدة $[a,b]$

$$A=\left|\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx\right|$$

فترتين $[a,b],[b,c]$

$$A=\left|\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx\right|+\left|\int_b^c (f(x)-g(x))\,dx\right|$$

في حالة الأسئلة الموضوعية اذا علمت فترة التكامل $[a,b]$ يمكن حساب المساحة على الحاسبة مباشرة

$$A=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

أولاً: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a , b]$

علمنا من دراستنا السابقة أنه إذا كانت f دالة متصلة على $[a , b]$ فإن مساحة المنطقة A المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$

إذا كانت:	$f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a , b]$
فإن	$A = \int_a^b f(x)\,dx$
إذا كانت:	$f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in [a , b]$
فإن	$A = -\int_a^b f(x)\,dx$

دالة واحدة f (x)

مثال (2)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ ومحور السينات.

كن ايجابيا ولا تنظر خلفك

حاول أن تحل

2 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 5x + 4$ ومحور السينات.

هل تريد النجاح والتفوق ؟؟

مثال (1)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 4 - 4x$

ومحور السينات والمستقيمين $x = 2\ ,\ x = 5$

اذهب وقبل يدي والديك واشكرهم
او ادعى لهما بالمغفرة والرحمة

حاول أن تحل

1 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 4 - 4x$

ومحور السينات والمستقيمين $x = 4$, $x = -1$.

لايوجد مستحيل

لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a , b]$ ، $c \in (a , b)$ حيث $f(c) = 0$
فإن مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة $[a , b]$ هي:

$$A = \left| \int_a^c f(x)\,dx \right| + \left| \int_c^b f(x)\,dx \right|$$

مثال (3)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

a $f(x) = x^3 - 4x \quad , \quad \left[-1 , \frac{3}{2}\right]$

تستطيع ان تفعلها مهما كانت

حاول أن تحل

3 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

a $f(x) = x^3 - 9x \quad , \quad [-2 , 1]$

ثق في نفسك

مثال (3)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

b $f(x) = \sin x \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$

هل اديت فروضك ؟؟

حاول أن تحل

3 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة.

b $f(x) = \cos x \quad , \quad [0 \,,\, \pi]$

كن طموح وحقق اهدافك

دالتين $f(x), g(x)$

ثانيا: مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين في الفترة $[a , b]$

مساحة منطقة محددة بين منحنيين

إذا كانت كل من g , f متصلتين على الفترة $[a , b]$، حيث

$$f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in [a , b]$$

فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين g ، f والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ هي:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$A = \left| \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)dx \right| = \left| \int_{-1}^{2} (y_2 - y_1)dx \right|$$

مثال (6)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى القطع المكافئ $y_1 = 2 - x^2$ والمستقيم $y_2 = -x$

لا ياس مع الحياة ولا حياة مع الياس

حاول أن تحل

6 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $y_2 = -2x + 5$ ، $y_1 = x^2 + 2$

من لم يتعلم في صغره لم يتقدم في كبره

مثال (7)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي: $f(x) = x^2 + 1 \quad , \quad g(x) = -x^2 + 9$

نحن من نصنع مصائرنا

حاول أن تحل

7 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $f(x) = -2x^2 + 2 \quad , \quad g(x) = x^2 - 1$

انار الله
دربك
ووفقك
لما يحب
ويرضاه

مثال (8)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة g حيث:

$f(x) = x^3 - 1 \quad , \quad g(x) = x - 1$

النجاح
ملك من
يدفع
ثمنه

حاول أن تحل

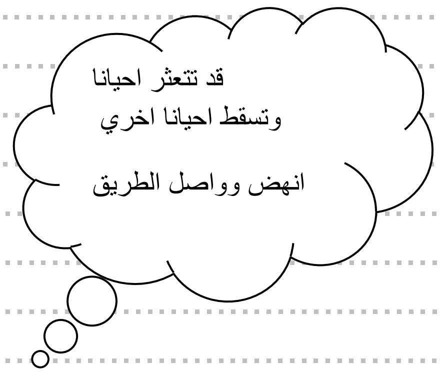
8 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة g في كل مما يلي:

$f(x) = 1 - x^3 \quad , \quad g(x) = -4x + 1$

لا نحقق الاعمال بالامنيات وانما بالارادة نصنع المعجزات

مثال (9)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين: $g(x) = 3 - 3x^2$, $f(x) = x^3 - x$



حاول أن تحل

9 أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين: $g(x)=\frac{x}{2}$ ، $f(x)=\sqrt{x}$

والمستقيمين $x=9$ ، $x=0$

بدل ان تلعن الظلام اوقد شمعة

دالتين g ، f غير متقاطعتين

مثال (5)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = e^x$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = -1 - x^2$
والمستقيمين $x = 3$, $x = 0$ علمًا بأن المنحنيين للدالتين g , f غير متقاطعين.

يقول اينشتاين : ليس الامر اني عبقري ،كل
ماهنالك اني اجاهد مع المشاكل لفترة اطول

حاول أن تحل

5 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 1$ ومنحنى الدالة g: $g(x) = -x^2 - 3$

والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$ علمًا بأن المنحنيين للدالتين g , f غير متقاطعين.

من لا يشكر الناس لا يشكر الله

مثال (4)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = \sqrt[3]{x}$ والمستقيمين $x = 1$, $x = 0$

علمًا بأن: $\forall x \in [0,1]$, $f(x) > g(x)$

ان الاجابة الوحيدة علي الهزيمة علي الانتصار

حاول أن تحل

4 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 3$
ومنحنى الدالة g : $g(x) = x^2 + 1$ والمستقيمين $x = 1$, $x = -1$
علمًا بأن: $\forall x \in [-1, 1]$, $f(x) > g(x)$

اشكر ثلاث اشخاص غدا

(2 – 6) حجوم الاجسام الدورانية

الحجوم

فترة واحدة $[a,b]$

دالة واحدة $f(x)$

$$A=\pi\int_a^b (f(x))^2 \ dx$$

فترة واحدة $[a,b]$

دالتين $g(x),f(x)$

$$A=\pi\int_a^b \left[(f(x))^2-(g(x))^2\right] dx$$

$f(x)\ge g(x)\ge 0$ حيث $f(x)\le g(x)\le 0$

في حالة الأسئلة الموضوعية اذا علمت فترة التكامل $[a,b]$ يمكن حساب الحجم على الحاسبة مباشرة

دالة واحدة $f(x)$

$$A=\pi\left|\int_a^b (f(x))^2 \ dx\right|$$

دالتين $g(x),f(x)$

$$A=\pi\left|\int_a^b \left[(f(x))^2-(g(x))^2\right] dx\right|$$

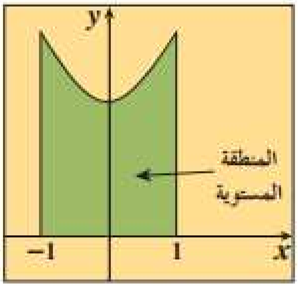
دالة واحدة f (x)

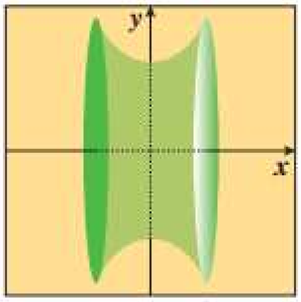
إذا نتج مجسم من دوران منطقة محددة بمنحنى دالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = b$ ، $x = a$ حيث $a < b$ دورة كاملة حول محور السينات فإن حجم هذا المجسم يساوي:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$$

مثال (1)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ ومحور السينات في الفترة $[-1 , 1]$.





شكل توضيحي

ابتسم للحياة

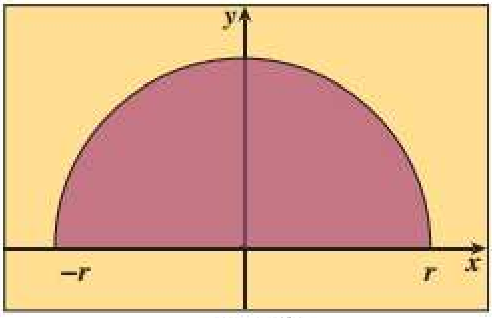
حاول أن تحل

1 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f:
$f(x) = \sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1,5]$.

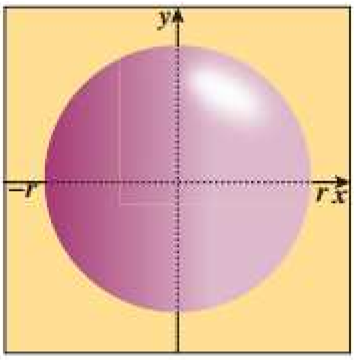
ساصير يوما ما ما اريد

مثال (2)

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة
$y = \sqrt{r^2 - x^2}$



شكل توضيحي



احد اسرار النجاح في الصبر والمثابره

حاول أن تحل

2 باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f : $r \neq 0$, $f(x) = r$ في الفترة $[0 , h]$

في لفظ القمة شيء يقول لك قم

كراسة التمارين

باستخدام التكامل المحدد استنتج الصيغة التي تعطى حجم مخروط دائري قائم ارتفاعه h (وحدة طول) وطول نصف قطر قاعدته r (وحدة طول) من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول محور السينات.

(إرشاد: استخدم الدالة f : $f(x)=\frac{r}{h}x$ في الفترة $[0,h]$)

تعود على العادات الحسنة وهي سوف تصنعك

دالتين $f(x), g(x)$

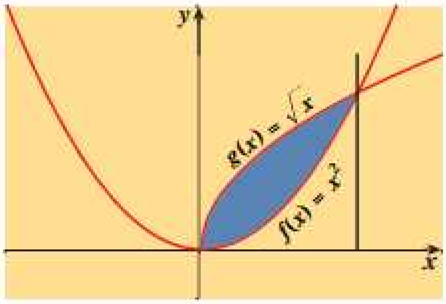
إذا نتج مجسم عن دوران منطقة محددة بمنحنيي الدالتين g , f والمستقيمين $x=a$, $x=b$ دورة كاملة حول محور السينات، بحيث f, g لهما الإشارة نفسها في الفترة $[a , b]$، فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة:

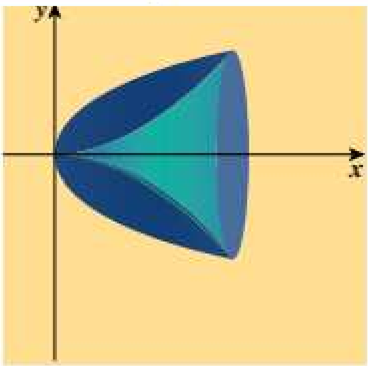
$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$

حيث: $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ أو $f(x) \leqslant g(x) \leqslant 0$

مثال (3)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$: g





نتعلم من الفشل اكثر من النجاح

حاول أن تحل

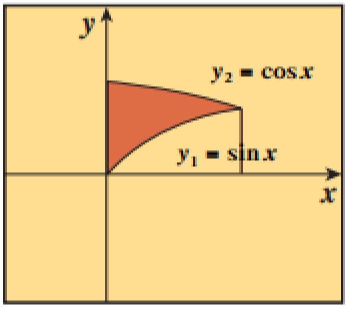
3 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين

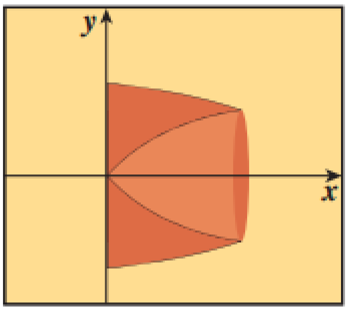
$f(x) = \frac{x^2}{2} + 1 \quad , \quad g(x) = \frac{x}{2} + 2$

الجميع يفكر في تغيير العالم ،لكن لا احد يفكر في تغيير نفسه

مثال (4)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين $y_2 = \cos x$ ، $y_1 = \sin x$ على الفترة $\left[0 , \frac{\pi}{4}\right]$.

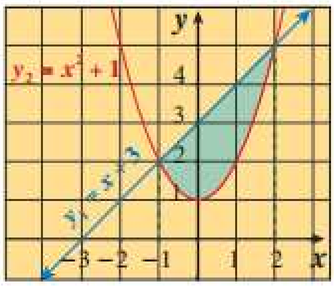


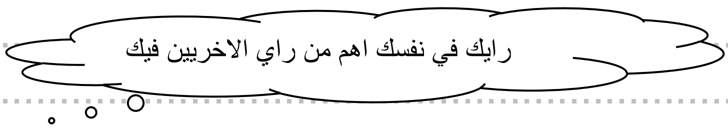


تستطيع ان تفعلها

حاول أن تحل

4 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين: $y_1 = x + 3$ ، $y_2 = x^2 + 1$





أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات المحددة بكل من المستقيمات والمنحنيات التالية:

$y = \sec x \ , \ y = \sqrt{2} \ , \ -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$

$y = \sqrt{x} \ , \ y = 0 \ , \ x = 4$

قمة النجاح ليست في عدم الفشل، بل في القيام بعد كل عثرة

(3 – 6) طول القوس

طول القوس

$$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx$$

(1) نوجد $f'(x)$ ← نوجد المشتقة

(2) نوجد $\left(f'(x)\right)^2$ ← تربيع

(3) تعويض بالقانون $L=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx$

(4) اختيار احدى طرق التكامل لإيجاد قيمة التكامل المحدد يمكن استخدام هذه الطريقة

يمكن استخدام هذه الطريقة لحل معظم المسائل

$$\int (ax+b)^n\,dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1}+c$$

M ATA

(3 – 6) طول القوس

قاعدة طول القوس

إذا كانت الدالة f' متصلة على $[a, b]$ فإن طول القوس من منحنى $y = f(x)$ في $[a, b]$ هو:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

مثال (1)

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^3}$ في الفترة $[0 , 4]$

لا ياس مع الحياة ولا حياة مع الياس

حاول أن تحل

1. أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$ في الفترة $[3 , 8]$

الامال العظيمة تصنع الاشخاص العظماء

مثال (2)

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x)=\frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0,6]$

بالسؤال يتعلم الانسان

حاول أن تحل

2 أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2 , 5]$

اذهب وقبل يدي والديك واشكرهم
او ادعى لهما بالمغفرة والرحمة

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f، $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ في الفترة $[1,2]$.

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

(3 – 6) معادلة منحنى دالة

(3 ـ 6) معادلة منحنى دالة

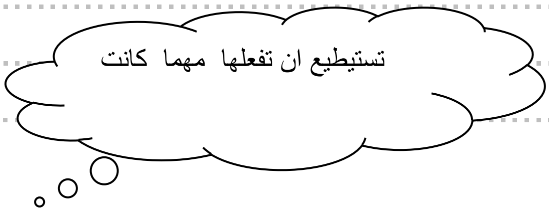
مثال (3)

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x\,,y)$ يساوي: $3x^2 - 4x + 1$ ويمر بالنقطة $A(1\,,2)$

كل عسير اذااستعنت بالله فهو يسير

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ويمر بالنقطة $(-1 , -5)$



مثال (5)

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x , y) يساوي $\sqrt{5 - 4x}$ فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5 , 3)$

لا تبحث عن الاخطاء بل ابحث عن الصواب

حاول أن تحل

5 إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه $(x\,.\,y)$ هو $2x - 1$
فأوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $B(1\,.\,0)$

وفقك الله دائما

مثال (6)

لتكن: $f''(x) = 6x - 6$ فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $(-1 , 15)$ نقطة حرجة للدالة.

المنافسة الحقيقية بينك وبين نفسك

حاول أن تحل

6 لتكن: $f''(x) = 5x - 2$

فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $P(2, -2)$ نقطة حرجة للدالة.

لايوجد مستحيل

(4 ـ 6)المعادلات التفاضلية

تعريف (1)

المعادلات التفاضلية: هي معادلات تحتوي على دالّة مجهولة وبعض مشتقاتها.
تستخدم عادة y بدلًا من $f(x)$.

تعريف (2)

رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.

تعريف (3)

درجة المعادلة التفاضلية: هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.

تدريب:

أكمل الجدول التالي محدّدًا رتبة ودرجة كل معادلة من المعادلات التفاضلية فيه.

المعادلة التفاضلية	الرتبة	الدرجة
$y' = 5y$		
$y'^2 = \frac{4x}{y}$		
$y'' = 5y' + xy$		
$(y'')^2 = 1 + (y')^3$		
$y''' = (y')^2 + x^3$		

مثال (1) أثبت أن الدالة: $y = e^{x^2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 1 أثبت أنّ الدالة: $y = 2e^{3x} + 1$ هي حل للمعادلة: $y' + 3 = 3y$

....

....

....

....

....

اننا نصنع مصائرنا،اننا نصبح ماتفعله

....

المعادلات التفاضلية

y' في الطرف الأيسر بمفردها

y' دالة في x

$$y' = f(x)$$

حل المعادله:

$$y = \int y'\, dx$$

تكامل مرتين

$$y'' = f(x)$$

حل المعادله:

$$y' = \int y''\, dx$$

تكامل مرتين

y' دالة في y

$$y' = a\,y + b$$

حل المعادله:

$a \neq 0$
$b \neq 0$

$$y = k\,e^{ax} + \frac{b}{a}$$

$a \neq 0$
$b = 0$

$$y = k\,e^{ax}$$

y' دالة في x, y

$$y' = f(x).h(y)$$

ترتيب الخطوات

$$\frac{dy}{dx} = f(x).h(y)$$

ثم فصل المتغيرات

$$\frac{dy}{h(y)} = f(x)\,dx$$

بأخذ تكامل الطرفين

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int f(x)\,dx$$

نكمل الحل بالطريقه العاديه

الطموح هو الوقود للوصول الي النجاح

مثال (3)

حل المعادلة: $y' = 3x^2 - 1$، التي تحقق $y = 2$ عند $x = 1$

حاول أن تحل

3 حل المعادلة: $y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$، والتي تحقق $y = 5$ عند $x = 1$

حاول ان تصنع النجاح

مثال (7)

حل المعادلة: $y'' = 3x^2 - 2x$

حاول أن تحل

7 حل المعادلة: $y'' = -3x^2 + 6x$

مالم تبداه اليوم لن يكتمل الغد

مثال (6)

a حلّ المعادلة: $2y' + y = 1$

b أوجد الحل الذي يحقق $y = 2$ عند $x = -1$

حاول أن تحل

6 حل المعادلة $3y' - 2y = 4$ ، ثم أوجد الحل الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 0$

الفشل ليس عند الخسارة الفشل عند الانسحاب

مثال (5) أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = 4y$ إذا كان $y = 2$ عند $x = 0$

حاول أن تحل (5) أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = -2y$ إذا كان $y = 3$ عند $x = 0$

اذا لم تجد طريق اصنع واحدا

مثال (4)

حل المعادلة التفاضلية:

a $y' - 2xy = 0$

الياس ليس من شيم الابطال

حاول أن تحل

4 حل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

نطمح
نحلم
نتامل
نحاول
نجتهد
ننجح
ننال
المستحيل