تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الكويتية

almanahj.com/kw

موقع المناهج الكويتية

الملف أوراق عمل على الوحدة الخامسة

روابط مواقع التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر العلمي

روابط مواد الصف الثاني عشر العلمي على تلغرام

التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر العلمي والمادة رياضيات في الفصل الثاني

1	كراسة متابعة تعليمية علمي
2	حاول ان تحل
3	نموذج اجابة امتحان 2015 2016
4	نموذج اجابة اسئلة العام الدراسي 2015 2016
5	الوحدة 8 احصاء 12علمي

الصف الثاني عشر علمي

الفترة الدراسية الثانية

مـادة الرياضيـات

٢٠٢٣/٢٠٢٢

الإسم :

W.R.E

المشتقة العكسية

تعريف: المشتقة العكسية

تسمى الدالة F مشتقة عكسية للدالة f المعرفة على مجالها I.

إذا كان: $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

استنادًا إلى هذا التعريف:

إذا كان $f(x) = x$ فيمكن أن تكون: $F(x) = \frac{x^2}{2}$ مشتقة عكسية للدالة f.

لأن: $F'(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)x^{2-1}$

$= x = f(x)$

نظرية (1) إذا كانت F مشتقّة عكسيّة للدالّة f على الفترة I، G مشتقّة عكسيّة أيضًا للدالّة f على الفترة I فإنّ:

$$G(x) = F(x) + C \qquad \forall x \in I$$

حيث C ثابت.

نظرية (2) إذا كانت F مشتقة عكسية لِـ f على الفترة I فإن الصورة العامة للمشتقة العكسية لِـ f على الفترة I هي:

$$F(x) + C$$

حيث C ثابت اختياري

كتاب الطالب مثال صـ 14 رقم 1 :

أثبت أن : $F(x) = x^3 + 5x + 3$ هي مشتقة عكسية للدالة : $f(x) = 3x^2 + 5$

ثم أكتب الصورة العامة للمشتقة العكسية

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 14 رقم 1 :

أثبت أن: $F(x) = 5 - \frac{1}{3}x^3$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = -x^2$

ثم اكتب مشتقة عكسية أخرى لها.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 14 رقم 2 :

أثبت أن: $F(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

كراسة التمارين صـ 9 رقم 1

أثبت أن : $F(x) = (3x+2)^5 + 7$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 15(3x+2)^4$

كراسة التمارين صـ 9 رقم ٣

تحقق من أن : $F(x) = \sqrt{1+x^4}$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$

التكامل غير المحدد

تعريف: التكامل غير المحدد Indefinite Integral

التكامل غير المحدد للدالّة f بالنسبة إلى x هو مجموعة كل المشتقّات العكسيّة F ، ويكتب على الصورة: $\int f(x)dx$

قواعد التكامل غير المحدد Rules of Indefinite Integral

① $\int k\,dx = kx + C$ عدد ثابت k

قاعدة القوى

② $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\}$

خواص التكامل غير المحدد Properties of Indefinite Integral

① $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)dx \quad , \quad k \neq 0$ خاصية الضرب بعدد ثابت

② $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ خاصية الجمع والطرح

ملاحظات:

ⓐ $\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$

ⓑ $\int (f(x)+k)dx = \int f(x)dx + \int k\,dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 15 رقم 3

أوجد :

ⓐ $\int 15\,dx =$

ⓑ $\int 5x^4\,dx =$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 16 رقم 4

احسب : $\int (3x^2 - 4x - 1)\,dx$

كتاب الطالب مثال صـ 16 رقم 5 أوجد التكاملات غير المحددة التالية :

ⓒ $\int \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2 dx$

ⓐ $\int \frac{1}{x^2}\, dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 17 رقم 5

ⓐ $\int (2x-3)(x+4)dx$

ⓑ $\int \frac{x^2+5x+4}{x+1}dx$

ⓒ $\int \left(\frac{3x^2-x}{x}\right)^2 dx$

كراسة التمارين صـ 9 رقم 8

$$\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x} dx$$

كراسة التمارين صـ 9 رقم 7

$$\int \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) dx$$

كتاب الطالب مثال صـ 17 رقم 6 أوجد :

ⓐ $\int \sqrt{x}\, dx$

ⓑ $\int \sqrt[5]{x^2}\, dx$

ⓒ $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1} dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 17 رقم 6 أوجد :

ⓐ $\int x\sqrt{x}\, dx$

ⓑ $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

كراسة التمارين صـ 9 رقم 10

(10) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 17 رقم 6 أوجد :

ⓒ $\int \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{x}}dx$

يمكن تحديد واحدة من المشتقات العكسية عندما يتوفر شرط يمكننا من إيجاد قيمة الثابت C .

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 18 رقم 7

إذا كان: $F(x)=\int(2x+5)dx$ ، $F(-1)=0$ فأوجد $F(x)$

كراسة التمارين صـ 9 رقم 16

(16) إذا كان $F(x)=\int(9x^2-4x+5)dx$ وكان $F(-1)=0$، فأوجد $F(x)$.

صـ 10

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $F(x)=x^{-3}$ هي مشتقة العكسية للدالة: $f(x)=-3x^{-4}$ (a) (b)

(2) $\int(-x^{-3}+x-1)dx=\frac{1}{2}x^{-2}+\frac{1}{2}x^2-x+C$ (a) (b)

(3) $\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{x}+C$ (a) (b)

(4) إذا كانت: $f'(x)=\frac{1}{x^2}+x$, $f(2)=1$، فإن $f(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ (a) (b)

(5) إذا كانت: $F(0)=400$, $F(x)=\int(3x^2-12x+15)dx$، فإن $F(x)=x^3+6x^2+15x+400$ (a) (b)

في التمارين (12–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int\frac{4}{3}\sqrt[3]{t^2}\,dt=$

(a) $\frac{3t^{\frac{5}{3}}}{5}+C$ (b) $\frac{4t^{\frac{5}{3}}}{5}+C$

(c) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{t^5}+C$ (d) $4\sqrt[3]{t^5}+C$

(7) $\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx=$

(a) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}}+5)+C$ (b) $\frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}(x^{-\frac{2}{3}}+5)+C$

(c) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}}+5)+C$ (d) $\frac{5}{3}x^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+5)+C$

(8) إذا كان: $x=-1$, $y=-5$, $\frac{dy}{dx}=x^{-\frac{2}{3}}$ فإنّ y تساوي:

(a) $-\frac{x^2}{3}-\frac{14}{3}$ (b) $3x^{\frac{1}{3}}+2$

(c) $3x^{\frac{1}{3}}-2$ (d) $3x^{\frac{1}{3}}$

(9) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x}}dx =$

(a) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+C$

(b) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}+C$

(c) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}+C$

(d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{1}{2}}+C$

(10) $\int \sqrt{x}(2+x^2)dx =$

(a) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C$

(b) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}}+C$

(c) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}}+C$

(d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}}+C$

(11) $\int \frac{2+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx =$

(a) $x^{\frac{1}{2}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C$

(b) $4x^{\frac{1}{2}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C$

(c) $x^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}}+C$

(d) $4x^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}}+C$

(12) $\int \left(\frac{x^2-4x+4}{x-2}+2\right)^2 dx =$

(a) x^2+C

(b) $2x+C$

(c) $\frac{x^2}{2}+2x+C$

(d) $\frac{1}{3}x^3+C$

كراسة التمارين صـ 10 البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

التكامل بالتعويض

قاعدة التكامل بالتعويض

إذا كانت F هي مشتقة عكسية للدالة f فإن:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

وإذا كان $u = g(x)$ ، $du = g'(x)dx$ فإن:

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

في هذا التكامل

نتعامل مع متغير جديد نستبدل المتغير x بالمتغير u بهدف استخدام القواعد الأساسية للتكامل غير المحدد .

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 21 رقم 1 :

أوجد :

ⓐ $\int (x^3 + 4x^2 + x)^7 (3x^2 + 8x + 1)\, dx$

ⓑ $\int \sqrt[3]{x^2 - 5x + 2}\ \ (2x - 5)dx$

كتاب الطالب صـ 21 مثال رقم 1 : b

ⓑ $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}\,dx$

* تمكننا قاعدة التكامل بالتعويض من تعميم قاعدة القوى في التكامل غير المحدد كالتالي:

كتاب الطالب مثال صـ 21 رقم 2 :

ⓐ $\int \sqrt{4x-5}\;\;dx$

ⓑ $\int \frac{5}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^3}\,dx$

تابع التكامل بالتعويض

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 22 رقم 2 :

أوجد :

ⓐ $\int \sqrt[5]{3x+7}\ dx$

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 22 رقم 2 :

ⓑ $\int \frac{3(\sqrt[3]{x}-5)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

كراسة التمارين صـ 12 رقم 2 :

$\int (4x-5)^8 dx$

كراسة التمارين صـ 12 رقم 3 :

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx$$

كراسة التمارين صـ 12 رقم 4 :

$$\int (x^2-1)\sqrt{x^3-3x+5}\,dx$$

كراسة التمارين صـ 12 رقم 6 :

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4+x^3}}\,dx$$

تابع التكامل بالتعويض

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 23 رقم 3

أوجد: $\int x(2x-1)^3 dx$

كراسة التمارين صـ 12 رقم 9 :

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx$$

تابع التكامل بالتعويض

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 23 رقم 4

$$\int x^5 \sqrt{3 + x^2}\, dx$$

كتاب الطالب مثال صـ 23 رقم 4

$$\int x^5 \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

تابع التكامل بالتعويض

كراسة التمارين صـ 12 رقم 11 :

$$\int x^3 \sqrt{x^2 - 2} \quad dx$$

كراسة التمارين صـ 12 رقم 12 :

$$\int x^5 \sqrt[3]{x^3 + 1} \quad dx$$

صـ 12

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x(x^2-1)^{10}dx = \frac{1}{18}(x^2-1)^9 + C$ (a) (b)

(2) $\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x+3}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^4} + C$ (a) (b)

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = 2\sqrt{3x-2} + C$ (a) (b)

(4) $\int (2x^2-1)(2x^3-3x+4)^5 dx = \frac{1}{18}(2x^3-3x+4)^6 + C$ (a) (b)

(5) $\int x\sqrt[3]{x+2}\,dx = \frac{3}{7}(x+2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{2}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C$ (a) (b)

في التمارين (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int x(x^2+2)^7 dx =$

(a) $\frac{1}{16}(x^2+2)^8 + C$ (b) $\frac{1}{4}(x^2+2)^8 + C$

(c) $\frac{1}{12}(x^2+2)^6 + C$ (d) $\frac{1}{3}(x^2+2)^6 + C$

(7) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} dx =$

(a) $\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$ (b) $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$

(c) $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$ (d) $\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}} =$

(a) $\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$ (b) $\frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$

(c) $2(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$ (d) $\frac{1}{2}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$

(9) $\int \frac{(2+\sqrt{x})^{12}}{\sqrt{x}}dx =$

(a) $\frac{13}{2}(2+\sqrt{x})^{13}+C$ (b) $\frac{2}{13}(2+\sqrt{x})^{13}+C$

(c) $\frac{1}{26}(2+\sqrt{x})^{13}+C$ (d) $\frac{1}{22}(2+\sqrt{x})^{11}+C$

(10) $\int \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^2+2x+3}}dx =$

(a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}+C$ (b) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}+C$

(c) $3\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}+C$ (d) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2+2x+3}+C$

(11) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx =$

(a) $\frac{3}{2}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$ (b) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{x+1}+C$

(c) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$ (d) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+2\sqrt{x+1}+C$

(12) إذا كانت: $F(x)=\int (x+1)(2x^2+4x-1)dx$ ، $F(-2)=\frac{9}{8}$، فإن: $F(x)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2+\frac{5}{4}$ (b) $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2+1$

(c) $\frac{1}{4}(2x^2+4x-1)^2+1$ (d) $4(2x^2+4x-1)^2-1$

كراسة التمارين صـ 12 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

تكامل الدوال المثلثية

الجدول أدناه يبيّن قواعد التكامل غير المحدد لبعض الدوال المثلثية جنبًا إلى جنب مع مصادر المشتقة لكل منها

التكامل غير المحدد	
①	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
②	$\int \sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$
③	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
④	$\int \cos kx\,dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
⑤	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
⑥	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
⑦	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
⑧	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

تذكر:

$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$

$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) = \sin kx$

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right) = \cos kx$

$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$

$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

$\frac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$

يمكن تطبيق قواعد التكامل التي تم دراستها عند تكامل الدوال المثلثية.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 25 رقم 1 :

أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

ⓐ $\int (\cos x + \csc^2 x)\ dx$

ⓑ $\int \sec x\,(tanx + secx)\ dx$

ⓒ $\int \frac{dx}{sin^2 x}$

كراسة التمارين صـ 14 رقم 2

$$\int (cscx\,cotx + sec^2x)\ dx$$

كراسة التمارين صـ 14 رقم 1

$$\int (secx\,tanx + sinx)\ dx$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 26 رقم 3 : أوجد :

ⓐ $\int sin^3x\ .\ cosx\ dx$

ⓑ $\int csc^2x\ .\ cotx\ dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 28 رقم 5 : أوجد : $\int csc^5x\, cotx\ \ dx$

كراسة التمارين صـ 14 رقم 7 : $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx$

كراسة التمارين صـ 14 رقم 8 (8) $\int \sec^3 x \tan x\, dx$

كراسة التمارين صـ 14 رقم 12 :

$$\int \sqrt{1+\sin x}\,\cos x\,dx$$

كراسة التمارين صـ 14 رقم 13 :

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}$$

صـ 14

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$ (a) (b)

(2) $\int \csc^2 x\,dx = \cot x + C$ (a) (b)

(3) $\left(F'(x) = \sec^2 x\ ,\ F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1\right) \Longrightarrow F(x) = \tan x + 2$ (a) (b)

(4) $(F'(x) = \cos x + \sin x\ ,\ F(\pi) = 1) \Longrightarrow F(x) = \sin x - \cos x$ (a) (b)

(5) $(F'(x) = \sec x\ \tan x\ ,\ F(0) = 4) \Longrightarrow F(x) = \sec x + 3$ (a) (b)

في التمارين (12–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f حيث $f(x) = 8 + \csc x \cot x$ هي:

(a) $F(x) = 8x + \csc x + C$ (b) $F(x) = 8x - \cot x + C$

(c) $F(x) = 8x - \csc x + C$ (d) $F(x) = 8x + \cot x + C$

(7) $\int \csc(5x)\cot(5x)\,dx =$

(a) $\frac{1}{5}\csc(5x) + C$ (b) $\csc(5x) + C$

(c) $\frac{1}{5}\cot(5x) + C$ (d) $-\frac{1}{5}\csc(5x) + C$

(8) $\int \sqrt[3]{\cot x}\csc^2 x\,dx =$

(a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$ (b) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

(c) $-\frac{3}{4}\sqrt[4]{(\cot x)^3} + C$ (d) $3\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

(9) إذا كانت $y_{\theta=0}=-3$, $\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$ فإنّ y تساوي:

(a) $-\cos\theta$ (b) $2-\cos\theta$

(c) $-2-\cos\theta$ (d) $4-\cos\theta$

(10) $\int \sec^5 x\tan x\,dx=$

(a) $\frac{5}{3}\sec^5 x+C$ (b) $\frac{1}{5}\sec^6 x+C$

(c) $\frac{1}{5}\sec^5 x+C$ (d) $-\frac{5}{3}\sec^5 x+C$

(11) $\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt[3]{2+\cot x}}dx=$

(a) $\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}}+C$ (b) $-\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}}+C$

(c) $-2\sqrt{2+\cot x}+C$ (d) $\frac{4}{3}(2+\cot x)^{\frac{4}{3}}+C$

(12) $\int \frac{\sin(4x)}{\cos^5(4x)}dx=$

(a) $-\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x)+C$ (b) $\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x)+C$

(c) $-\cos^{-4}(4x)+C$ (d) $\cos^{-4}(4x)+C$

كراسة التمارين البنود الموضوعية صـ 14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

إشتقاق الدوال الأسية :

قاعدة (1) :

إذا كانت u دالة في x قابلة للإشتقاق فإن

$$\frac{d}{dx}\,a^x = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}\,a^u = a^u \ln a \ \frac{du}{dx}$$

في القاعدة (1) و بوضع $a = e$ نحصل على القاعدة التالية :

قاعدة (2) :

$$\frac{d}{dx}\,e^x = e^x$$

و حالة u دالة في x قابلة للإشتقاق فإن

$$\frac{d}{dx}\,e^u = e^u \ \frac{du}{dx}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 30 رقم 1 :

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

ⓐ $f(x) = 10^x$

ⓑ $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$

ⓒ $f(x) = 5^{cosx}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 31 رقم 2 :
أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

ⓐ $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

ⓑ $g(x) = e^{x^2-4}$

ⓒ $h(x) = e^{tanx}$

كراسة التمارين ص 16 رقم 2 :

$y = 5^{\sqrt{x+1}}$

كراسة التمارين ص 16 رقم 3 :

$y = 8^{tanx}$

إشتقاق دوال اللوغاريتمات الطبيعية

Derivatives of Natural Logarithmic Functions

قاعدة (3) :

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

إذا كانت u دالة في x قابلة للإشتقاق فإن

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

لاحظ أن :

$$\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

قاعدة (4) :

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \quad , \quad x \neq 0$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 32 رقم 3 :

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

ⓐ $f(x) = \ln(2x + x^3)$

ⓑ $g(x) = \ln\frac{1}{2x+1}$

ⓒ $f(x) = \ln(1 + \sqrt{3}\,x)$

ⓓ $h(x) = \ln(\sin x)$

كراسة التمارين ص 16 رقم 11 : أوجد $\frac{dy}{dx}$

$$y = \ln(x^3)$$

كراسة التمارين ص 16 رقم 12 : أوجد $\frac{dy}{dx}$

$$y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

كراسة التمارين ص 16 رقم 14 : أوجد $\frac{dy}{dx}$

$$y = \ln(2 - \cos x)$$

كراسة التمارين ص 16 رقم 15 : أوجد $\frac{dy}{dx}$

$$y = \ln(\ln x)$$

تابع الدوال الأسية و اللوغاريتمية

تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتمية : Integrals of some Exponential and Logarithmic Functions

قاعدة المشتقة	التكامل غير المحدد
$\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx} = u'e^u$	$\int u'e^u\,dx = e^u + C$
$\frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\frac{d}{dx}\ln\lvert u\rvert = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln\lvert u\rvert + C$

لاحظ أن: $\int \frac{g'(x)dx}{g(x)} = \ln\lvert g(x)\rvert + C$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 33 رقم 4 :

أوجـد :

ⓐ $\int e^{3x}\,dx$

ⓑ $\int (2x-1)e^{x^2-x+3}dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 34 رقم 5 :

ⓐ $\int \frac{-5}{3x-2}\,dx$

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 34 رقم 5 :

ⓑ $\int \frac{3t^2-6t}{t^3-3t^2+8}\,dt$

ⓒ $\int \frac{x^3+4}{x}dx$

كراسة التمارين صـ 16 رقم 17 :

$\int \frac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}\,dx$

كراسة التمارين صـ 16 رقم 19 :

$\int (x^2-2\,)e^{x^3-6x}\,dx$

كراسة التمارين صـ 16 رقم 20 :

$$\int \left(e^{0.5x} + \frac{0.5}{x}\right) dx$$

كراسة التمارين صـ 16 رقم 21 :

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

كراسة التمارين صـ 16 رقم 23 :

$$\int \frac{x^3 - x}{x^4 - 2x^2} dx$$

كتاب الطالب مثال صـ 35 رقم 6 : أوجد $\int tan\, x \;\; dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 35 رقم 6 : أوجد $\int cot\, x \;\; dx$

صـ 16

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت: $y = 4^{x-2}$ فإن: $\frac{dy}{dx} = 4x$ (a) (b)

(2) إذا كانت: $f(x) = e^{x^2}$ فإن: $f'(x) = 2xe^{2x}$ (a) (b)

(3) إذا كانت: $g(x) = \ln(2x+2)$ فإن: $g'(x) = \frac{1}{2x+2}$ (a) (b)

(4) إذا كانت: $y = x\ln x - x$ فإن: $y' = \ln x$ (a) (b)

(5) $\int \frac{1}{2x}dx = \frac{\ln x}{2} + C$ (a) (b)

(6) $\int \frac{1}{3x+1}dx = \ln(3x+1) + C$ (a) (b)

في التمارين (7–14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كانت $y = e^{-5x}$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) e^{-5x} (b) $-e^{-5x}$

(c) $-5e^{-5x}$ (d) $5e^{-5x}$

(8) إذا كانت $y = x^2e^x - x\,e^x$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $e^x(x^2+x-1)$ (b) $e^x(x^2-x)$

(c) $2x\,e^x - e^x$ (d) $e^x(x^2+2x+1)$

(9) إذا كانت $y = (\ln x)^2$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $\frac{\ln x}{x}$ (b) $\frac{2\ln x}{x}$

(c) $\frac{x\ln x}{2}$ (d) $\frac{2\ln^2 x}{x}$

(10) إذا كانت $y=\ln\left(\frac{10}{x}\right)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\frac{10}{x}$ (b) $\frac{10}{x}$

(c) $\frac{1}{x}$ (d) $-\frac{1}{x}$

(11) إذا كانت $y=\ln(x^2+1)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $\frac{x}{x^2+1}$ (b) $\frac{2}{x^2+1}$

(c) $\frac{2x}{x^2+1}$ (d) $-\frac{2x}{x^2+1}$

(12) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx=$

(a) $2\ln(x^2+1)+C$ (b) $\ln(x^2+1)+C$

(c) $\frac{x^2}{x^2+1}+C$ (d) $\frac{x}{\frac{1}{3}x^2+1}+C$

(13) $\int \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=$

(a) $\frac{e^x-e^{-x}}{2}+C$ (b) $\frac{e^x+e^{-x}}{2}+C$

(c) $\frac{e^{-x}-e^x}{2}+C$ (d) $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}+C$

(14) $\int \frac{e^x}{e^x-4}dx=$

(a) $-\frac{1}{2}(e^x-4)+C$ (b) $\ln|e^x-4|+C$

(c) $-\ln|e^x-4|+C$ (d) $\frac{1}{2}\ln|e^x-4|+C$

كراسة التمارين صـ 16 البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

قاعدة التكامل بالتجزيء Integration by Parts Formula

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

كتاب الطالب مثال صـ 37 رقم 1 :

أوجد : $\int x\ sinx\ dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 37 رقم 1 :

أوجد : $\int x\ cosx\ dx$

تابع التكامل بالتجزئ

كتاب الطالب مثال صـ 37 رقم 2

ⓐ $\int x\, e^{x}\, dx$

ⓑ $\int 3x\ e^{2x+1} dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 38 رقم 2 :

أوجـد :

ⓐ $\int (x-3)e^{x-3}dx$

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 38 رقم 2 :

أوجد :

ⓑ $\int 4xe^{-5x}dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 38 رقم 3 :

أوجـد : $\int \ln x \, dx$

كتاب الطالب مثال صـ 38 رقم 4 :

أوجـد : $\int x \ln(x) \, dx$

تابع التكامل بالتجزئ

كراسة التمارين صـ 18 رقم 5 : أوجـد : $\int \ln \sqrt[4]{x}\, dx$

كراسة التمارين صـ 18 رقم 8 : أوجـد : $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

كراسة التمارين صـ 18 رقم 9 : أوجـد : $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$

كراسة التمارين صـ 18 رقم 10 : أوجـد : $\int x^2 \ln x^2 \, dx$

كتاب الطالب مثال صـ 39 رقم 5 : أوجد $\int x^2 \ cosx \ dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 39 رقم 5 : أوجد $\int x^2 \ sinx \ dx$

كتاب الطالب مثال صـ 39 رقم 6 : أوجد

$$\int x^2 \ e^x \ dx$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 39 رقم 5 : أوجد

$$\int x^2 \ e^{x+2} \ dx$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos 2x + C$ (a) (b)

(2) $\int x\sin(\pi x)\,dx = -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + C$ (a) (b)

(3) $\int x\,e^{6x}\,dx = \frac{1}{6}x\,e^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} + C$ (a) (b)

(4) $\int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} + e^{-x} + C$ (a) (b)

(5) $\int x\sec^2 x\,dx = x\tan x - \ln|\sec x| + C$ (a) (b)

في التمارين (6–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int (2x+1)\sin x\,dx$

(a) $(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$
(b) $-(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$
(c) $-(x+1)\cos x - 2\sin x + C$
(d) $(2x+1)\cos x - \sin x + C$

(7) $\int x^2\ln(x)\,dx =$

(a) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{3} + C$
(b) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$
(c) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) + \frac{x^3}{9} + C$
(d) $-\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

في التمرينين (8–9)، إذا كان $\int (2x+1)\ln x\,dx = uv - \int vdu$ فإن:

(8) $uv =$

(a) $(2x+1)\ln x$ (b) $2x\ln x$

(c) $\frac{2x+1}{2}\ln x$ (d) $x(x+1)\ln x$

(9) $\int vdu =$

(a) $\frac{1}{2}x\ln x + C$ (b) $\frac{1}{2}x^2 + x + C$

(c) $(2x+1)\ln x + C$ (d) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

في التمرينين (10–11)، إذا كان $\int (3x-1)e^{3x+2}\,dx = uv - \int vdu$ فإن:

(10) $uv =$

(a) $(3x-1)e^{3x+2}$ (b) $\frac{1}{3}(3x-1)e^{3x+2}$

(c) $(3x-1)e^{x+2}$ (d) $\frac{1}{3}(x-1)e^{3x+2}$

(11) $\int vdu =$

(a) $-\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$ (b) $-e^{3x+2} + C$

(c) $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$ (d) $e^{3x+2} + C$

كراسة التمارين صـ 18 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

أولًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى) غير مكررة

المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية غير مكررة.

لتكن $f(x)=\frac{r(x)}{h(x)}$ حيث المقام $h(x)$ على الصورة:

$$h(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\dots(a_kx+b_k)$$

حيث لا يوجد عوامل مكررة ولا يوجد عامل ثابت مضروب بآخر.

في هذه الحالة تكون الدالة f على صورة كسور جزئية كالتالي:

$$\frac{r(x)}{h(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\dots+\frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 43 رقم 1 :

لتكن الدالة f : $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-4x+3}$

فأوجد : ⓐ الكسور الجزئية

ⓑ $\int f(x)\,dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 44 رقم 2 :

أوجـد : $\int \frac{x^2 - 2}{2x^3 - 5x^2 - 3\,x}\ dx$

كراسة التمارين صـ 20 رقم 2 : أوجـد الكسـور الجزئيـة لكل دالة f ثم أوجـد $\int f(x)\,dx$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+2\,x}$$

كراسة التمارين صـ 20 رقم 4 : أوجد الكسور الجزئيـة لكل دالة f ثم أوجـد $\int f(x)\,dx$

$$f(x)=\frac{12}{x^3+2x^2-3x}$$

كراسة التمارين صـ 20 رقم 5 : أوجد الكسور الجزئيـة لكل دالة f ثم أوجـد $\int f(x)\,dx$

$$\int \frac{x+17}{2x^2+5x-3}\,dx$$

ثانيًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر

المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية بعضها متكرر. لكل عامل من عوامل $h(x)$ على الصورة $(mx+n)^k$، يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها k:

$$\frac{A_1}{mx+n}+\frac{A_2}{(mx+n)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(mx+n)^k}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 45 رقم 3 :

أوجـد : $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 46 رقم 4 :

أوجـــد : $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 4x^2} \, dx$

كتاب الطالب مثال صـ 47 رقم 5 :

$$\int \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 4x + 4}\ dx$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 47 رقم 5 :

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^3 - 2\,x^2}\ dx$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \frac{4dx}{(x+3)(x+7)} = \ln|x+3| + \ln|x+7| + C$ (a) (b)

(2) $\int \frac{-6dx}{x^2+3x} = -2\ln|x+3| + 2\ln|x| + C$ (a) (b)

(3) الدالة: $f(x) = \frac{4x-11}{2x^2-x-3}$ على صورة كسور جزئية هي: $f(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{2x-3}$ (a) (b)

(4) للحدودية النسبية: $\frac{x^2-x+2}{x^3-2x^2+x}$ ثلاثة كسور جزئية. (a) (b)

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\int \frac{6}{x^2-9}dx =$

(a) $\ln|x+3| - \ln|x-3| + C$
(b) $\ln(x-3) - \ln(x+3) + C$
(c) $\ln|x+3| + \ln|x-3| + C$
(d) $\ln|x-3| - \ln|x+3| + C$

(6) $\int \frac{7x-7}{x^2-3x-10}dx =$

(a) $4\ln|x+2| + 3\ln|x-5| + C$
(b) $3\ln|x+2| + 2\ln|x-5| + C$
(c) $4\ln|x-5| + 3\ln|x+2| + C$
(d) $4\ln|x-5| - 3\ln|x+2| + C$

تابع التكامل بالكسور الجزئية – البنود الموضوعية

(7) الدالة النسبية: $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$ على صورة كسور جزئية هي $f(x)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}$

(b) $\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{2(x+2)}$

(c) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$

(d) $\frac{1}{2(x-2)}-\frac{1}{2(x+2)}$

(8) $\int \frac{2x^2-4x+3}{x^2-1}dx=$

(a) $2+2\ln|x-1|-\frac{9}{2}\ln|x+1|+C$

(b) $\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{9}{2}\ln|x+1|+C$

(c) $2x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{9}{2}\ln|x+1|+C$

(d) $x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-9\ln|x+1|+C$

(9) $\int \frac{3x^2+2x}{x^2-4}dx=$

(a) $4\ln|x-2|-2\ln|x+2|+C$

(b) $3x+2\ln|x-2|-2\ln|x-2|+C$

(c) $3x+4\ln|x-2|-2\ln|x+2|+C$

(d) $3x+4\ln|x-2|+2\ln|x+2|+C$

كراسة التمارين صـ 20 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

التكامل المحدد Definite Integral

تعلمت فيما سبق إنه إذا كانت f دالة متصلة على $[a\,,b]$ وكانت الدالة F مشتقة عكسية للدالة f فإن التكامل غير المحدد للدالة f هو:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

وفي هذا البند سوف تتعلم التكامل المحدد للدالة f من a إلى b وهو العدد الحقيقي:

$F(b) - F(a)$

حيث:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$$
$$= [F(x)]_a^b$$
$$= F(b) - F(a)$$

ويسمّى a, b حدّي التكامل، والقواعد التي سبق ذكرها في التكامل غير المحدد تطبق على التكامل المحدد.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 51 رقم 1 : أوجـد : $\int_2^7 (x^3 - 2x^2 + 2)\,dx$

كراسة التمارين صـ 22 رقم 1 : أوجـد : $\int_{-1}^{1} 3x(x-4)\,dx$

تابع التكامل المحدد

كراسة التمارين صـ 22 رقم 1 : أوجـد : $\int_0^2 (x+1)^2\,dx$

خواص التكامل المحدد

Properties of the Definite Integral

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة I ، $k \in \mathbb{R}$ ، $a, b, c \in I$ فإن:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$
4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

لاحظ في خاصية 3 أنه: إذا كان $k = 1$ فإن: $\int_a^b dx = b - a$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 52 رقم 2 أوجـد :

ⓐ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2}sin2x - csc^2x)\,dx$

ⓑ $\int_2^{-3} 5\,dx$

ⓒ $\int_3^3 (-2x^3 + x^2)\,dx$

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 52 رقم 2 أوجـد :

ⓓ $\int_2^4 \frac{dx}{x-1}$

كراسة التمارين صـ 22 رقم 5 أوجد : $\int_1^4 \frac{8-x^4}{2x^2}dx$

كراسة التمارين صـ 22 رقم 6 : أوجد : $\int_0^1 x\sqrt{x}\ dx$

كراسة التمارين صـ 22 رقم 7 أوجد : $\int_1^2 (3e^x + \frac{5}{x})\ dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 52 رقم 3 : أوجـد :

ⓐ $\int_{-3}^{4} |2x - 4|dx$

ⓑ $\int_1^2 |x + 2|dx$

كراسة التمارين صـ 22 رقم 9 :

أوجد : $\int_{-1}^{1} | x^3 | dx\, x$

كراسة التمارين صـ 22 رقم 10 :

أوجد : $\int_{-2}^{3} (x\,|x| + 3)\, dx$

تابع التكامل المحدد

تابع خواص التكامل : لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$

⑥ إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in [a,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$

⑦ إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall \quad x \in [a,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)dx \leqslant 0$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 53 رقم 4 :

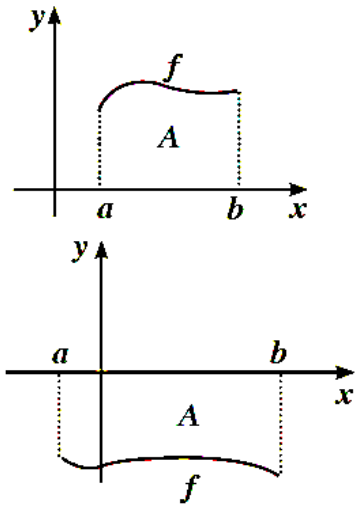
دون حساب قيمة التكامل أثبت أن : $\int_{-1}^{0} (x^2 + x)\,dx \leq 0$

كراسة التمارين صـ 22 رقم 12 :

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن : $\int_{-1}^{0} (x^3 - 5x^2 - 6x)\,dx \geq 0$

تابع التكامل المحدد

التفسير البياني للتكامل المحدد
Graphical Interpretation of Definite Integral



في المستوى الإحداثي لتكن f دالة متصلة على $[a\,,b]$،

A تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات

والمستقيمين $x=a \quad , \quad x=b$

① إذا كانت: $f(x)\geqslant 0 \quad \forall x\in[a\,,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = A$

② إذا كانت: $f(x)\leqslant 0 \quad \forall x\in[a\,,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = -A$

كتاب الطالب مثال صـ 54 رقم 6 :

a) أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = -3$ ، محور السينات ، و المستقيمين $x = 4 \;,\; x = -2$

b) تحقق بيانيا

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 55 رقم 6 :

أوجد قيمة $\int_1^5 (2-2x)\;dx$ بيانيا

تابع التكامل المحدد

التفسير البياني للتكامل المحدد

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 56 رقم 7 :

أوجـــد : ⓐ $\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx$

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 56 رقم 7 :

أوجد : ⓑ $\int_{0}^{4} -\sqrt{16 - x^2}\ dx$

تابع التكامل المحدد

تعلمت في البنود السابقة طرائق عدة لإيجاد التكامل غير المحدد منها التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزيء والتكامل بالكسور الجزئية. وتستخدم هذه الطرائق أيضًا في إيجاد التكاملات المحددة.

ويجب مراعاة ما يلي عند استخدام طريقة التعويض في إيجاد التكامل المحدد:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$$

بفرض $u = g(x)$ ، $du = g'(x)dx$

ثم كامل بالنسبة لـ u من $u = g(a)$ إلى $u = g(b)$ بحيث يكون:

$$\int_c^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\cdot du$$

كتاب الطالب مثال صـ 56 رقم 8 : أوجـد :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tanx \;\; sec^2 x \;\; dx$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 57 رقم 8 : أوجـد :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} Sin\,2x\,Cos2x \;\; dx$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 56 رقم 9 : a

أوجـــد : $\int_{-1}^{1} (x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\ dx$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 58 رقم 9 : b

أوجـــد : $\int_{2}^{5} x\ \sqrt{x-1}\ dx$

كتاب الطالب مثال صـ 58 رقم 10 : أوجـد :

$$\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x} \, dx$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 58 رقم 10 :

أوجـد :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \ sec^2 x \ dx$$

تابع التكامل المحدد

كراسة التمارين صـ 22 رقم 22 : أوجد :

$$\int_1^3 x^3 \ lnx \ dx$$

كراسة التمارين صـ 22 رقم 24 : أوجد :

$$\int_{-1}^1 \frac{4}{x^2-4} \ dx$$

تابع التكامل المحدد

كراسة التمارين صـ 22 رقم 25 :

أوجد : $\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3}\ dx$

كتاب الطالب مثال صـ 59 رقم 11 : أوجـــد :

$$\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\ dx$$

تابع التكامل المحدد

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 59 رقم 11 : أوجـــد :

$$\int_4^7 \frac{3x^2 - 17}{x^2 - x - 6}\ dx$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (7–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$ (a) (b)

(2) $\int_{-3}^{-2} (|x| + x + 5)dx = -2$ (a) (b)

(3) $\int_{-1}^{1} (|x|)^3 dx = -\frac{1}{2}$ (a) (b)

(4) $\int_0^1 12(3x-2)^3 dx = -15$ (a) (b)

(5) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx = 1$ (a) (b)

(6) $\int_2^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx - \int_5^2 f(x)dx = 0$ (a) (b)

(7) $\int_2^4 f(x)dx + \int_4^2 g(x)dx = 0$ (a) (b)

في التمارين (12–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان: $\int_3^{-1} g(x)dx = 2$, $\int_{-1}^{3} f(x)dx = 4$ فإن $\int_{-1}^{3} (2f(x) + 3g(x) + 1)dx$ تساوي:

(a) 18 (b) −6 (c) 6 (d) 12

(9) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\,dx =$

(a) 2 (b) $2\sqrt{2}$ (c) 4 (d) 8

(10) $\int_{-1}^{1} (1-|x|)dx =$

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

(11) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx =$

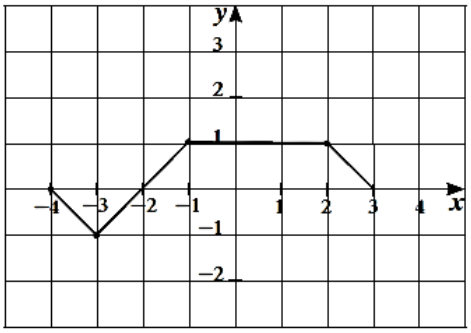
(a) 4 (b) 2 (c) 0 (d) π

(12) لتكن: $f(x) = x^2 + 5$ فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)dx > 0$ لكل قيم a تنتمي إلى:

(a) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^-$ (b) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^+$ (c) $\mathbb{R}^-$ (d) $\mathbb{R}^+$

في التمارين (13–15)، لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) لتحصل على عبارة صحيحة.

إذا كان بيان الدالة f كما في الشكل المقابل، فإن:



(1)	(2)
(13) $\int_{-4}^{3} f(x)\,dx$ يساوي:	(a) 6
(14) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي:	(b) 5
(15) $\int_{-4}^{-1} \left(f(x) + \frac{1}{6}\right)dx$ يساوي:	(c) 0
	(d) 3

كراسة التمارين صـ 22 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15