أوجد مشتقات الدوال التالية بالنسبه الى x مستخدماً تعريف المشتقة

دعنا نفكر وناقش

(1) اثبات مشتقة $Sin\ x$

(2) اثبات مشتقة $cos\ x$

(1) اثبات مشتقة $\sin x$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$\sin x \cosh + \cos x \sinh$$

باستخدام متطابقة مجموع زاويتين

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cosh + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-\sin x(1-\cos h) + \cos x \sin h}{h}$$

$$f'(x) = -\sin x \lim_{h \to 0} \frac{(1-\cos h)}{h} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \cdot \frac{(1+\cos h)}{(1+\cos h)}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1-\cos^2 h)}{h(1+\cos h)}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)}$$

$$\lim_{h \to 0} 1 \cdot \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

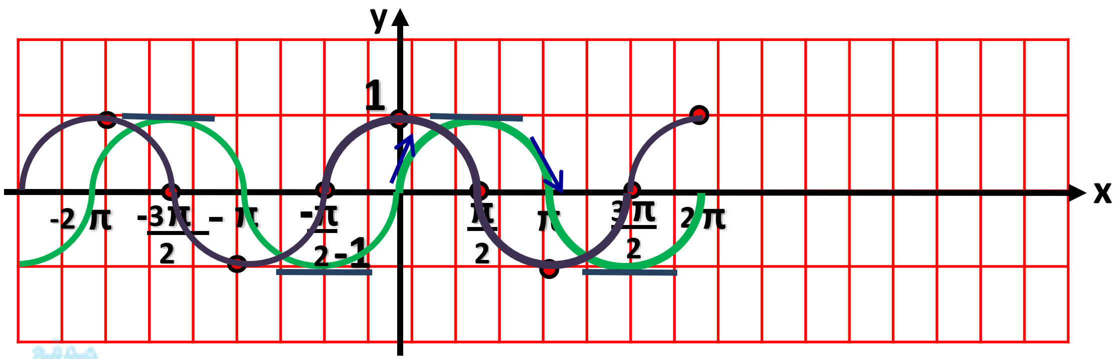
$$f'(x) = -\sin x \cdot (0) + \cos x \cdot (1)$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$\frac{d}{x} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

مماس أفقي ← المشتقة عندها = صفر



وبالمثل بالنسبة :

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

(2) إثبات مشتقة cos x

لذا سوف نلجا الي التعريف العام للمشتقة

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$\cos x \cosh - \sin x \sinh$

بإستخدام متطابقة مجموع زاويتين

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\cos x \ \cos h) - (\sin x \ \sin h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\cos x \ \cos h) - \cos x}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{(\sin x \ \sin h)}{h}$$

$$= \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$= 1$

$$\lim_{h \to 0} \quad \cdot \quad \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)}$$

$$= -\lim_{h \to 0} \frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1}$$

$$= -\lim_{h \to 0} \frac{\sin h \cdot \sin h}{h(\cos h + 1)}$$

$$= -\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{(\cos h + 1)}$$

$$= -1 \times 0 = 0$$

$$\cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{(\cos h + 1)} - \sin x$$

$$(\cos x \cdot 0) - \sin x$$

$$= -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

مشتقة دالة الجيب هي موجب دالة جيب التمام

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

مشتقة دالة جيب التمام هي سالب دالة الجيب

ملاحظة

قواعد الأشتقاق التي تم دراستها صحيحة في الدوال الجيبية

مثال (1) صـ 100

أوجد مشتقات الدوال التالية :

a $y = x^2 \sin x$

مشتقة (ضرب دالتيين)

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \cdot \frac{d}{dx}(x^2) + x^2 \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= 2x \sin x + x^2 \cos x$$

تذكـــــــر

اذا كان x قياس زاوية بالرديان فإن :

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \tan x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

b

مثال (1) صـ 100

b

$$u = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(1-\sin x)\frac{d}{dx}\cos x - \cos x \cdot \frac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}$$

قاعدة القسمـــــة

$$= \frac{(1-\sin x)(-\sin x) - \cos x \, (0-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$$

= 1

$$= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{1}{1-\sin x}$$

حــل آخـــر

$$u = \frac{\cos x}{1 - \sin x} \cdot \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x}$$

$$u = \frac{\cos x\ (1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x}$$

$$u = \frac{\cos x\ (1 + \sin x)}{\cos^2 x}$$

$$u = \frac{(1 + \sin x)}{\cos x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\cos x \cdot (\frac{d}{dx}\ (1 + \sin x) - (1 + \sin x) \cdot \frac{d}{dx}\ \cos x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\cos x\ \ \cos x\ \ - (1 + \sin)\ \ - \sin x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(1 + \sin x)}{\cos^2 x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$$

$$= \frac{1}{(1 - \sin x)}$$

مثال (1) صـ100

أوجد المشتقات الداله التالية

في هذا البند لاتحل إلا بهذه الطريقة

c

$$f(x) = \sin^2 x$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \sin^2 x$$

$$= \frac{d}{dx} (\sin x \cdot \sin x)$$

$$= \sin x \cdot \frac{d}{dx} (\sin x) + \sin x \cdot \frac{d}{dx} (\sin x)$$

$$= \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x$$

$$= 2 \sin x \cos x$$

$$= \sin 2x$$

حاول ان تحل (1) ص101
((أوجد المشتقات للدوال التالية))

الحل

a

$h(x) = \cos^2 x$

$$\frac{d}{dx} h(x) = \frac{d}{dx} \cos^2 x$$

$$= \frac{d}{dx} (\cos x \cdot \cos x)$$

$$= \cos x \frac{d}{dx} \cdot \cos x + \cos x \frac{d}{dx} \cos x$$

$$= \cos x \cdot (-\sin x) + \cos x (-\sin x)$$

$$= -2 \sin x \cos x$$

$$= -\sin 2x$$

حل أخر

$$h(x) = \cos^2 x$$

$$h(x) = (\cos x)^2$$

$$\frac{d}{dx} h(x) = \frac{d}{dx} (\cos x)^2$$

$$= 2 (\cos x) . (-\sin x)$$

$$= -2 \sin x \cos x$$

هذا الحل يمكن استخدامه بعد دراسة قاعدة سلسلة القوي

لاحظ

$$h(x) = \cos(x)^2$$

$(\cos x)^2$ X

$$h(x) = \cos^2 x$$

$(\cos x)^2$ ✓

اوجد مشتقة الدالة التالية

حاول ان تحل (1) (b) صـــــ 101

$$g(x) = \frac{x}{\cos x}$$

الحـــــــــل

قاعدة القسمة

$$\frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^2}$$

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{\cos x \cdot \frac{d}{dx} x - x \frac{d}{dx} \cos x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x \cdot 1) - [x \cdot (-\sin x)]}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + x \sin x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x}{\cos^2 x} + \frac{x \sin x}{\cos^2 x}$$

$\boxed{\sec x}$ $\boxed{\sec x}$ $\boxed{\tan x}$

$$= \sec x + x \tan x \sec x$$

$$= \sec x \, (1 + x \tan x)$$

حاول ان تحل صـــ 101 رقم C 1

قاعدة القسمة

$$y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

الحـــــــل

$$\frac{d}{dx} = \frac{(\sin x + \cos x) . \frac{d}{dx} \sin x - \sin x \frac{d}{dx} (\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x) . \cos x - \sin x (\cos x + - \sin x)}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x}{1 + 2 \sin x \cos x}$$

$$= \frac{1}{1 + \boxed{2 \sin x \cos x}}$$

تطبيق قوانين النسبه المثلثية

$$= \frac{1}{1 + \sin 2x}$$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

حل آخر

$$y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \cdot \frac{\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$y = \frac{\sin^2 x - \cos x \sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$$

مناقشة

ورقه عمل (1)

مشتقات الدوال المثلثيه

مشتقه داله الجيب هي موجب داله جيب التمام

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

مشتقه داله جيب التمام هي سالب داله الجيب

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

باستخدام قواعد الاشتقاق

اوجد

$$\frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x)$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x)$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x)$$

مشتقات الدوال المثلثيه

ورقه عمل (1)

مشتقه داله الجيب هي موجب دال جيب التمام

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

مشتقه داله جيب التمام هي سالب داله الجيب

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

باستخدام قواعد الاشتقاق

اوجد

$$\frac{d}{dx}(\tan x)$$

مشتقات الدوال المثلثيه

ورقه عمل (1)

مشتقه داله الجيب هي موجب دال جيب التمام

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

مشتقه داله جيب التمام هي سالب داله الجيب

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

باستخدام قواعد الاشتقاق

اوجد

$$\frac{d}{dx}(\cot x)$$

مشتقات الدوال المثلثيه

ورقه عمل (1)

مشتقه داله الجيب هي موجب داله جيب التمام

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

مشتقه داله جيب التمام هي سالب داله الجيب

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

باستخدام قواعد الاشتقاق

اوجد

$$\frac{d}{dx}(\sec x)$$

مشتقات الدوال المثلثيه

ورقه عمل (1)

مشتقه داله الجيب هي موجب دال جيب التمام

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

مشتقه داله جيب التمام هي سالب داله الجيب

$$(\cos x)=-\sin x$$

باستخدام قواعد الاشتقاق

اوجد

$$\frac{d}{dx}(\csc x)$$

ثانياً

مشتقات الدوال المثلثية الأخري

الدالتان $g(x) = \cos x$ ، $f(x) = \sin x$ دالتان قابلتان للاشتقاق ، لذا فإن الدوال المثلثية التالية هي ايضاً قابله للاشتقاق عند كل قيمه للمتغير x تكون معرفه عندها

1

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{\cos x \cdot \boxed{\cos x} - \sin x \cdot \boxed{-\sin x}}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x}}{\cos^2 x}$$

$= 1$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x$$

$= 1 + \tan^2 x$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

نعلم أن

2 $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$\frac{d}{dx}\cot x = \frac{d}{dx}\,\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin x \boxed{-\sin x} - \cos x \boxed{\cos x}}{\sin^2 x}$$

قاعدة القسمة

$$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$= -\csc^2 x$$

2 $\dfrac{d}{dx}\cot x = \boxed{-\csc^2 x}$

$= -(1+\cot^2 x)$

نعلم ان

$$Sec\,x = \frac{1}{Cos\,x}$$

سالب الثابت X مشتقة المقام
---
^{2}(المقام)

$$\frac{d}{dx} Sec\,x = \frac{-1 \cdot \frac{d}{dx}(Cos\,x)}{(Cos^2 x)}$$

$$\frac{d}{dx} Sec\,x = \frac{-(-\sin x)}{(Cos\,x)^2} = \frac{Sin\,x}{(Cos\,x)^2}$$

$$= \frac{Sin\,x}{Cos\,x} \cdot \frac{1}{Cos\,x} = \tan x \sec x$$

3

$$\frac{d}{dx} Sec\,x = \sec x \tan x$$

نعلم أن

4 $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

$$\frac{d}{dx} \csc x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{-1\left(\frac{d}{dx}(\sin x)\right)}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{-(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \boxed{-\cot x} \cdot \boxed{\csc x}$$

4 $\dfrac{d}{dx} \text{Csc} = -\cot x \,.\, \csc x$

ملحوظة

الدوال المثلثية الأخري هي ايضاً دوال قابلة للاشتقاق عند كل قيمة للمتغير تكون معرفة عندها وتعطي مشتقاتها بالقواعد السابق برهانها وهي

1. $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$ $= 1 + \tan^2 x$

2. $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$ $= -(1 + \cot^2 x)$

3. $\frac{d}{dx} \sec x = -\sec x \tan x$

4. $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$

مثـــال
(2 صـ 102)

أوجد مشتقة الدالة التالية

$$f(x) = \tan x + \cot x$$

$$f'(x) = \sec^2 x + (-\csc^2 x)$$

$$f'(x) = \sec^2 x - \csc^2 x$$

يمكن حل $f(x)$ عن طريق فك كل من

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

أوجد مشتقة الدالة التالية

مثال

2 (b) ص 102

b $g(x) = \sec x\,(1 + \sin x)$

$g'(x) = \sec x\,(1 + \sin x)' + (1 + \sin x)\,(\sec x)'$

$g'(x) = \sec x\,(\cos x) + (1 + \sin x)\,(\sec x . \tan x)$

$g'(x) = \sec x\,(\cos x) + \sec x . \tan x + \sec x . \tan x . \sin x$

$g'(x) = 1 + \sec x . \tan x + \sec x . \tan x . \sin x$

$g'(x) = 1 + \sec x . \tan x + \tan^2 x$

حل أخـــــــر

$g(x) = \sec x + \sin x \sec x$ tanx

$g'(x) = \frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)$

$g'(x) = \frac{d}{dx}\sec x + \frac{d}{dx}\tan x$

$g'(x) = \sec x . \tan x + \sec^2 x$

$1 + \tan^2 x$

$g'(x) = 1 + \sec x \tan x + \tan^2 x$

أوجد مشتقة الدالة التالية

مثال
2(c) صـ 102

$$h(x) = \csc x + \sin x \cdot \tan x$$

$$h'(x) = \frac{d}{dx}\csc x + \frac{d}{dx}(\sin x \cdot \tan x)$$

$$h'(x) = -\csc x \cdot \cot x + \left(\sin x \cdot \frac{d}{dx}\tan x + \tan x \cdot \frac{d}{dx}\sin x\right)$$

$$h'(x) = -\csc x \cdot \cot x + \sin x \cdot \sec^2 x + \tan x \cdot \cos x$$

$$h'(x) = -\csc x \cdot \cot x + \boxed{\sin x \cdot \sec x} \cdot \sec x + \frac{\sin x}{\cos x}\cancel{\tan x}\ \cos x$$

$$h'(x) = -\csc x \cdot \cot x + \tan x \ \sec x + \sin x$$

تـــــذكـــــر

أن ميل المماس = المشتقة الأولـي

معادلة المستقيم

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

m هو ميل المستقيم ((المماس للمنحنـي))

نقطة التماس (x_1, y_1)

معادلة المستقيم العمودي

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

ميل المستقيم العمودي = $\frac{-1}{m}$

مثال 3 صـ 102

اوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحني الدالة $y = \tan x$ عند النقطة $p(\frac{\pi}{4}, 1)$

نوجد أولاً مشتقة الدالة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sec^2 \frac{\pi}{4} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

وعليه ميل المستقيم العنودي للمنحني عند $p(\frac{\pi}{4}, 1)$ هو $\frac{-1}{m} = \frac{-1}{2}$

معادلة المستقيم العمودي

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y - 1 = \frac{-1}{2}X + \frac{\pi}{8}$$

$$y = \frac{-1}{2}X + \frac{\pi}{8} + 1$$

حاول ان تحل صـ 102 رقم 3

اوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحني الدالة $y = \sec x$ عند النقطة $F\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sec x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec x \tan x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\sqrt{3}$$

وعليه ميل المستقيم العمودي للمنحني عند $F\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$ هو

$$m = \frac{-1}{m} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

معادلة المستقيم العمودي

$$y - 2 = \frac{-1}{2\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

معادلة المستقيم العمودي

$$y = \frac{-1}{2\sqrt{3}}x + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + 2$$

حاول ان تحل صـ 101 رقم (1) b

حل آخر

قاعدة الضرب

$$g(x) = x \cdot \boxed{\sec x}$$

$$= X \cdot \frac{d}{dx}(\sec x) + \frac{1}{\cos x}\,\frac{d}{dx}\,x$$

$$= X \sec x \tan x + \sec x \cdot 1$$

$$= \sec x (x \tan x + 1)$$

أوجد اشتقاق الدوال التالية :

حاول ان تحل

(2) صـ102

4 $f(x) = \frac{1+\tan x}{\tan x}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\tan x} + \frac{\tan x}{\tan x}\right]$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\cot x + 1)$$

$$= \frac{d}{dx}\cot x + \frac{d}{dx}1$$

$$= -\csc^2 x$$

يمكن استخدام قاعدة القسمة

حاول ان تحل صـ 102 b

$g(x) = \sec x + \csc x$

$g'(x) = \frac{d}{dx}\sec x + \frac{d}{dx}(\csc x)$

خطأ مطبعي

$g'(x) = \sec x \tan x - \csc x . \cot x$

حاول ان تحل صـ 102 c

$h(x) = \frac{\sec x}{\csc x}$

قاعده القسمه

$h'(x) = \frac{\csc x \sec x \tan x - (\sec x) . (-\csc x \cot x)}{\csc^2 x}$

$h'(x) = \tan^2 x + 1$

$h'(x) = \sec^2 x$