

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الكويتية



عمرو فايز

الملف المراجعة النهائية

موقع المناهج ← ملفات الكويت التعليمية ← الصف العاشر ← رياضيات ← الفصل الثاني

روابط مواقع التواصل الاجتماعي بحسب الصف العاشر



روابط مواد الصف العاشر على تلغرام

[الرياضيات](#)

[اللغة الانجليزية](#)

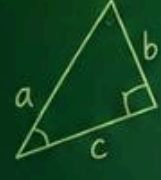
[اللغة العربية](#)

[التربية الاسلامية](#)

المزيد من الملفات بحسب الصف العاشر والمادة رياضيات في الفصل الثاني

إجابة اختبار تقويمي ثاني	1
تمارين أسئلة حاول أن تحل	2
عاشر رياضيات حل الاحصاء	3
عاشر رياضيات نموذج إجابة اختبار	4
عاشر 2	5

$x^2 + y^2 = z^2$

 π 

الرياضيات

للفيف العاشر

المراجعة النهائية

أقوى مراجعة لضمان الدرجة النهائية



مراجعة مركزة

تلخيص شامل
لجميع الوحدات
بشكل مبسط



حصص مراجعة

شرح أهم الأفكار
وحل نماذج امتحانات
سابقة



مذكرات شاملة

مذكرات منظمة
تغطي نقاط
الاختبار الأساسية



حلول دقيقة

حلول واضح
ومقترحة لأسئلة
متوقعة

بث مباشر + حصص المراجعة مسجلة + مذكرات محلولة وغير محلولة



للحجز والاستفسار (واتساب):

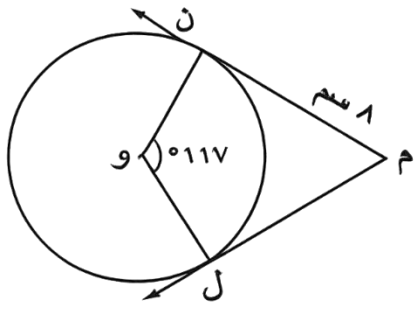
99421329

راجع صح ... وادخل الامتحان وانت واثق

بإذن الله



$y = ax^2 + bx + c$



❖ في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، م ل ، م ن مماسان للدائرة إذا كان

$$ق (ن و ل) = 117^\circ ، م ن = 8 \text{ سم} ، ن و = 4 \text{ سم}$$

١- أوجد ق (ل م ن) ٢- محيط الشكل ل م ن و

الحل

$$\overline{م ل} \text{ مماس ، } \overline{و ل} \text{ نصف قطر ، ق (م ل و) } = 90^\circ$$

$$\text{بالمثل : } \overline{م ن} \text{ مماس ، } \overline{و ن} \text{ نصف قطر ، ق (م ن و) } = 90^\circ$$

$$ق (ل م ن) = 360 - (90 + 90 + 117) = 63^\circ$$

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي 360°

$$\overline{م ن} ، \overline{م ل} \text{ مماسان للدائرة } \leftarrow \therefore م ن = م ل = 8 \text{ سم}$$

القطعتان المماستان للدائرة من نقطة خارجها متطابقتان

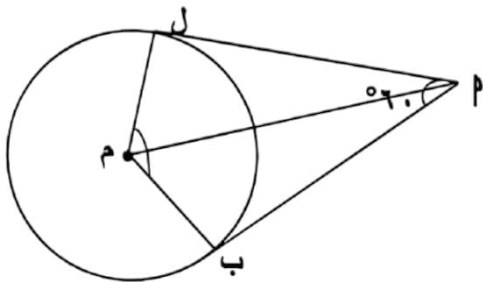
$$\overline{و ن} = \overline{و ل} = 4 \text{ سم} \quad \text{" نصف قطر "}$$

$$\therefore \text{ محيط الشكل ل م ن و } = 8 + 8 + 4 + 4 = 24 \text{ سم}$$

❖ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، ب ، ل مماسان للدائرة من النقطة م

$$ق (ل ب م) = 60^\circ ، \text{ أوجد :}$$

$$١- ق (ل م ب) \quad ٢- ق (ل ب م)$$



الحل

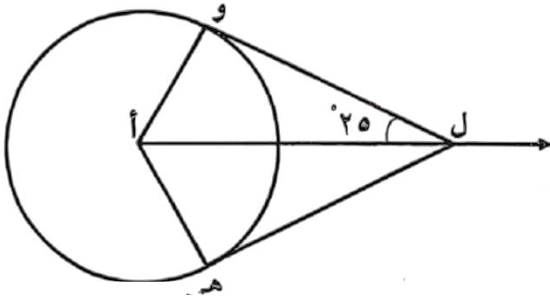
$$\overline{ب م} \text{ مماس ، } \overline{ب م} \text{ نصف قطر ، ق (ب م م) } = 90^\circ$$

$$\overline{ل م} \text{ مماس ، } \overline{ل م} \text{ نصف قطر ، ق (ل م م) } = 90^\circ$$

$$ق (ل م ب) = 360 - (60 + 90 + 90) = 120^\circ$$

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي 360°

$$\overline{م ب} \text{ منصف (ل ب م) } \therefore ق (ل ب م) = 30^\circ$$



❖ في الشكل المقابل : دائرة مركزها أ ، إذا كانت

ل هـ ، ل و تماسان الدائرة ، فأوجد :

١- ق (أ هـ ل)

٢- ق (ل أ و)

الحل

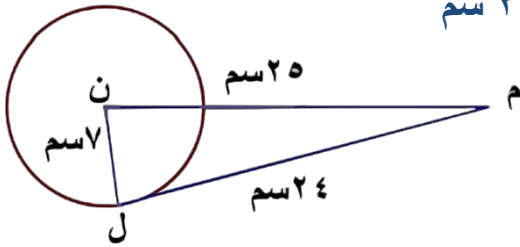
ل هـ مماس ، أ هـ نصف قطر ، ق (أ هـ ل) = 90°

ل و مماس ، أ و نصف قطر ، ق (ل و أ) = 90°

في Δ ل و أ :

$$ق (ل أ و) = 180 - (25 + 90) = 65^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°



❖ في الشكل المقابل : ن ل = ٧ سم ، ل م = ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ سم

أثبت أن : م ل مماس للدائرة التي مركزها ن

الحل

في Δ م ن ل : (م ن) $^2 = 25^2 = 625$

$$(ن ل) + (م ل) = 24^2 + 7^2 = 625 = 25^2$$

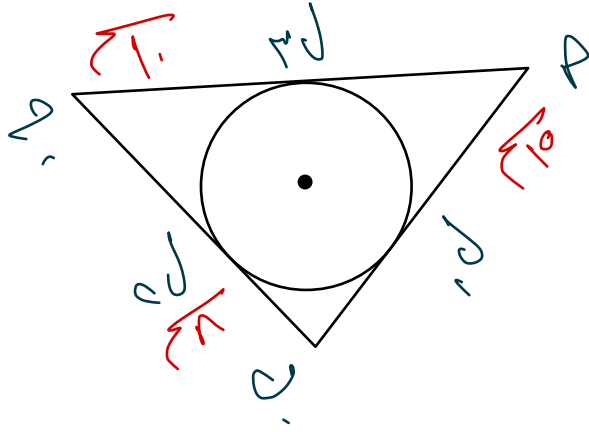
∴ Δ م ن ل قائم في ل

∴ م ل مماس

، ن ل نصف قطر

م ل \perp ن ل

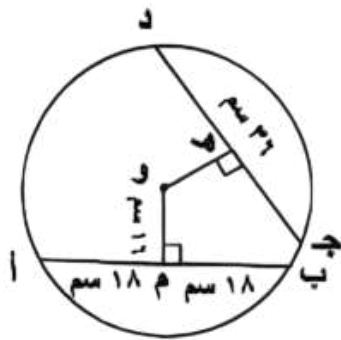
❖ في الشكل المقابل : أوجد محيط المثلث P ب ج



الحل

١. \overline{AB} مماس للدائرة في L
٢. \overline{BC} مماس للدائرة في M
٣. \overline{AC} مماس للدائرة في N
٤. $\overline{AL} = \overline{AN} = 10$ سم
٥. $\overline{BL} = \overline{BM} = 8$ سم
٦. $\overline{CN} = \overline{CM} = 10$ سم

∴ المحيط = $10 + 10 + 8 + 8 + 10 + 10 = 66$ سم



❖ في الشكل المرسوم : و مركز الدائرة ، و $\overline{AB} \perp \overline{OD}$

و $\overline{CD} \perp \overline{OD}$ ، و $OD = 16$ سم ، $OB = 18$ سم
جد $CD = 36$ سم ، أوجد طول \overline{OD}

الحل

أم = ب = م = 18 معطى

$$ب = م + أ = أ$$

$$36 = أ$$

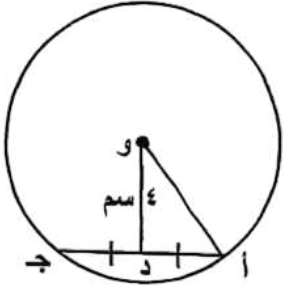
$$\therefore أ = ب = ج د$$

∴ و ه = و م نظرية

$$و ه = 16 \text{ سم}$$

❖ في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، نق = ٥ سم ، و د = ٤ سم ، د منتصف $\overline{أج}$

أوجد بذكر السبب طول $\overline{أج}$



الحل

∴ و أنصف قطر ، $\overline{أج}$ وتر

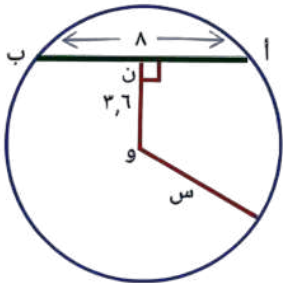
د منتصف ∴ و د \perp $\overline{أج}$

∴ Δ أو د قائم الزاوية في د

$$أد = \sqrt{(أو)^2 - (ود)^2} = \sqrt{٥^2 - ٤^2} = ٣$$

$$\therefore ٢ = ٣ + ٣ = ٦ \text{ سم}$$

❖ أوجد قيمة س



الحل

ون \perp $\overline{أ ب}$ ن منتصف $\overline{أ ب}$

$$\overline{أ ن} = \overline{ن ب} = \overline{ن س} = ٤ \text{ سم}$$

Δ أن و قائم

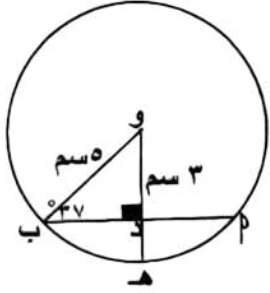
$$٥ = \sqrt{(أ ن)^2 + (ن س)^2} = \sqrt{٤^2 + (٣,٦)^2}$$

$$٥ = ٣,٦ + ٥,٣٨$$

$$\therefore س = ٥,٣٨ \text{ سم}$$

❖ في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، و هـ \perp $\overline{م ب}$ ، $\cup (م ب و) = 37^\circ$ ، أوجد :

١- طول $\overline{م ب}$ ٢- $\cup (ب هـ)$

الحل

∴ المثلث و د ب قائم الزاوية في د

$$\therefore ب د = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

∴ و د \perp $\overline{م ب}$ ، د منتصف $\overline{م ب}$

$$\therefore م ب = د ب = د م = 4 \text{ سم}$$

$$م ب = 2 \times د ب = 2 \times 4 = 8 \text{ سم}$$

∴ مجموع قياسات زوايا المثلث = 180°

$$\therefore \cup (ب و د) = 180^\circ - (37^\circ - 90^\circ) = 53^\circ$$

∴ $\cup (ب و هـ)$ زاوية مركزية مرسومة على القوس ب هـ

$$\therefore \cup (ب هـ) = \cup (ب و د) = 53^\circ$$

❖ في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، إذا كان $\cup (ج ب أ) = 50^\circ$ ، أوجد كلا مما يلي مع ذكر السبب :

١- $\cup (أ ج ب)$ ٢- $\cup (ج أ ب)$ ٣- $\cup (ج د ب)$

الحل

$\cup (أ ج ب) = 90^\circ$: السبب : $\hat{أ ج ب}$ محيطية مرسومة على $\overline{أ ب}$ قطر للدائرة

$$\cup (ج أ ب) = 180^\circ - (50^\circ + 90^\circ) = 40^\circ$$

السبب : مجموع قياسات زوايا المثلث = 180°

$$\cup (ج أ ب) = \cup (ج د ب) = 40^\circ$$

السبب : زاويتان محيطتان مرسومتان على $\overline{ب ج}$

❖ في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، $\overline{أب}$ قطر فيها ، $\overline{أه}$ مماس للدائرة عند أ

ق (ب د ج) = 30° ، أوجد :

- ١- ق (أ ج ب) ٢- ق (أ ب ج) ٣- ق (ج أ هـ)

الحل

ق (أ ج ب) = 90° : السبب : زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة

$$\text{ق (ب د ج) = ق (ب أ ج) = } 30^\circ \quad \textcircled{1}$$

السبب : زاويتان محيطتان لهما قوس مشترك

$$\therefore \text{ق (أ ب ج) = } 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ \quad \textcircled{2}$$

السبب : مجموع قياسات زوايا المثلث = 180°

$$\text{ق (ج أ هـ) = ق (أ ب ج) = } 60^\circ \quad \textcircled{3}$$

السبب : الزاوية الماسية = الزاوية المحيطية لهما قوس مشترك

❖ في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ، $\overline{أج}$ قطر فيها ، إذا كان ق (ج د ب) = 30°

ق (أ ب د) = 50° ، فأوجد كلا من :

- ١- ق (ج أ ب) ٢- ق (أ ب ج) ٣- ق (أ د)

الحل

$$\text{ق (ج أ ب) = ق (ج د ب) = } 30^\circ$$

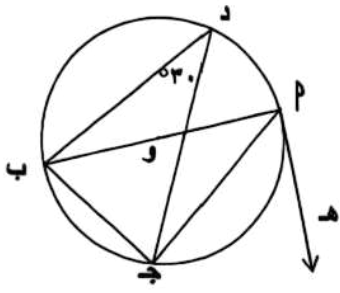
" زاويتان محيطتان مشتركتان في نفس القوس "

$$\text{ق (أ ب ج) = } 90^\circ$$

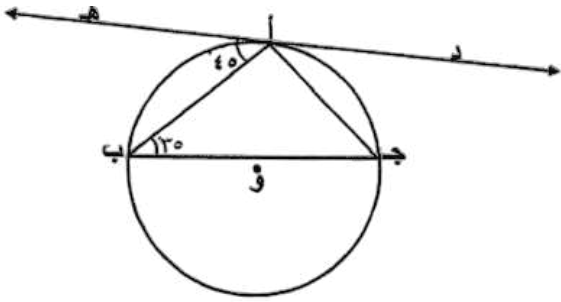
" زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة "

$$\text{ق (أ د) = } 2 \times \text{ق (أ ب د) = } 2 \times 50^\circ = 100^\circ$$

" قياس الزاوية المحيطية = $\frac{1}{2}$ قياس القوس "



❖ في الشكل المقابل د ه مماسا للدائرة عند أ ق (أ ب ج) = 35° ، ق (ه أ ب) = 45°
أوجد مع ذكر السبب :



١- ق (ج أ ب)

٢- ق (أ ب)

٣- ق (أ ج ب)

الحل



ق (أ ج ب) = ق (ب أ ه) = 45°

السبب : قياس الزاوية المماسية = قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس

ق (ج أ ب) = 180 - (35 + 45) = 100°

السبب : مجموع قياسات زوايا المثلث = 180°

ق (أ ب) = 2 × ق (أ ج ب) = 2 × 45 = 90°

" قياس الزاوية المحيطية = $\frac{1}{2}$ قياس القوس "

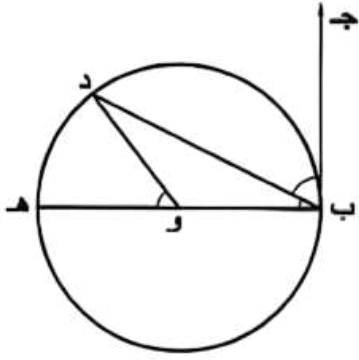
ق (أ ج ب) = 360 - ق (أ ب)

= 360 - 90 = 270°

❖ في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، ب هـ قطر فيها ، ب ج مماس للدائرة في النقطة ب ،

إذا علمت أن $\widehat{د هـ} = 52^\circ$ ، أوجد قياسات الزوايا التالية :

- ١- $\widehat{د و هـ}$ ٢- $\widehat{د ب هـ}$ ٣- $\widehat{د ب ج}$



الحل

$$\widehat{د و هـ} = \widehat{د هـ} = 52^\circ$$

قياس الزاوية المركزية = قياس القوس

$$\widehat{د ب هـ} = \frac{1}{2} \widehat{د هـ} = \frac{1}{2} \times 52 = 26^\circ$$

موقع
المناهج الكويتية
almanahi.com/kw

قياس الزاوية المحيطية = $\frac{1}{2}$ قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس

$$\widehat{ب د} = 180 - 52 = 128^\circ$$

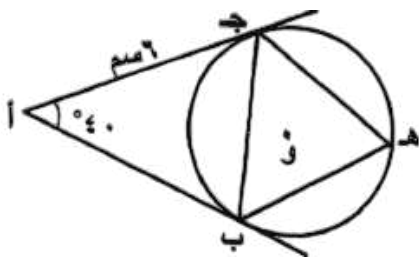
$$\widehat{د ب ج} = \frac{1}{2} \widehat{ب د} = \frac{1}{2} \times 128 = 64^\circ$$

قياس الزاوية المماسية = $\frac{1}{2}$ قياس القوس المشترك معها

❖ في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، أ ب ، أ ج قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، ج على

الترتيب ، و $\widehat{أ} = 40^\circ$ ، أ ج = 6 سم ، أوجد :

- ١- أ ب ٢- $\widehat{أ ج ب}$ ٣- $\widehat{ج هـ ب}$



الحل

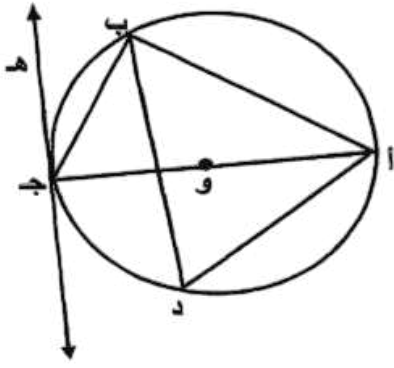
السبب : مماسان للدائرة من نقطة خارجها $\overline{أ ب} = \overline{أ ج} = 6$ سم

$\triangle أ ب ج$ متطابق الضلعين

$$\widehat{أ ج ب} = \widehat{أ ب ج} = \frac{180 - 40}{2} = 70^\circ$$

$$\widehat{أ ج ب} = \widehat{ج هـ ب} = 70^\circ$$

زاوية مماسية و زاوية محيطية مشتركتان في نفس القوس



❖ في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، هـ ج مماس للدائرة عند ج ،
 ق (ب ج هـ) = 28° ، أوجد كل من :
 ق (أ ب ج) ، ق (ب أ ج) ، ق (أ د ب)

الحل

ق (أ ب ج) = 90° **السبب** : زاوية محيطية تقابل أ ج قطر للدائرة

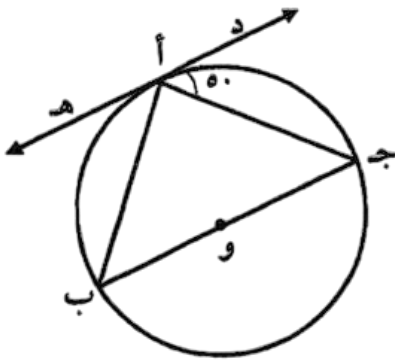
ق (ب ج هـ) = ق (ب أ ج) = 28°



السبب : زاوية مماسية و زاوية محيطية لهما قوس مشترك

ق (أ د ب) = ق (أ ج ب) = 62°

السبب : زاويتان محيطتان لهما أ ب مشترك



❖ في الشكل المقابل : دائرة مركزها و ،

إذا كان د هـ مماساً للدائرة عند أ ، ق (ج أ د) = 50°
 أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب ج

الحل

ق (أ ب ج) = ق (د أ ج) = 50°

السبب : زاوية مماسية و الزاوية المحيطة لهما أ ج مشترك

ق (ج أ ب) = 90°

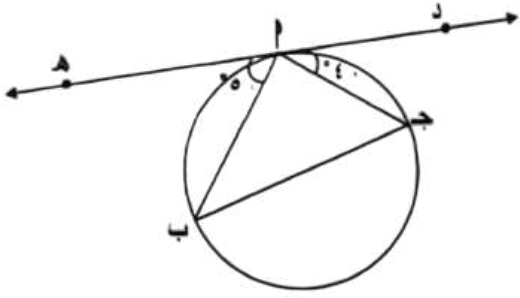
السبب : زاوية محيطية مرسومة على ج ب قطر الدائرة

ق (أ ج ب) = $180 - (50 + 90)$

$40 = 140 = 180 =$

مجموع قياسات زوايا المثلث 180°

❖ في الشكل المقابل ، إذا كان $\overline{د ه}$ مماس للدائرة عند $م$ ، و $\widehat{د م ج} = ٤٠^\circ$ ،
ق $\widehat{ه م ب} = ٥٠^\circ$ ، أوجد قياسات زوايا المثلث $ا ب ج$

**الحل**

$$ق \widehat{ا ب ج} = \widehat{د م ج} = ٤٠^\circ$$

السبب: زاوية مماسية و زاوية محيطية لهما $\widehat{ا ج}$ مشترك

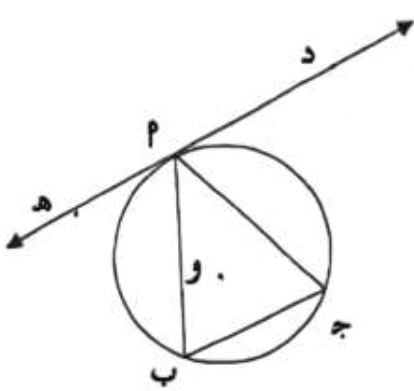
$$ق \widehat{ا ج ب} = ق \widehat{ه م ب} = ٥٠^\circ$$

السبب: زاوية مماسية و زاوية محيطية لهما $\widehat{ا ب}$ مشترك

$$ق \widehat{ج م ب} = (٤٠ + ٥٠) - ١٨٠ = ٩٠^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

❖ في الشكل المقابل دائرة مركزها $و$ ، $\overline{د ه}$ مماس لها عند النقطة $م$ ،
 $\overline{ب ج}$ وتر في الدائرة مواز للمماس $\overline{د ه}$
أثبت أن المثلث $ا ب ج$ متطابق الضلعين

**الحل**

$$\overline{د ه} \parallel \overline{ب ج}$$

$$\textcircled{١} \quad \text{تبادل توازي} \quad ق \widehat{د ا ج} = ق \widehat{ا ج ب}$$

$$\textcircled{٢} \quad \text{زاوية مماسية و زاوية محيطية لهما } \widehat{ا ج} \text{ مشترك} \quad ق \widehat{د ا ج} = ق \widehat{ا ج ب}$$

من $\textcircled{١}$ ، $\textcircled{٢}$

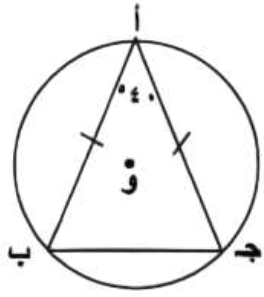
$$ق \widehat{ا ج ب} = ق \widehat{ا ج ب}$$

$$\therefore \Delta ا ب ج \text{ متطابق الضلعين} \quad \overline{ا ج} = \overline{ا ب}$$

❖ في الشكل المقابل : أ ب ج مثلث متطابق الضلعين حيث أ ، ب ، ج نقاط على الدائرة التي مركزها

و ، ق (ب أ ج) = ٤٠°

أوجد قياس كل من الأقواس



أ ب ، ب ج ، أ ج

الحل

قياس الزاوية المحيطية = $\frac{1}{2}$ قياس القوس

∴ ق (ب أ ج) = $\frac{1}{2}$ ق (ب ج)

∴ ق (ب ج) = ٤٠ × ٢ = ٨٠°

ق (ج أ ب) = ٣٦٠ - ٨٠ = ٢٨٠°

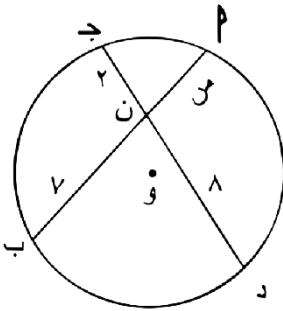
∴ أ ب = أ ج

∴ ق (أ ب) = ق (أ ج) = $\frac{280}{2}$ = ١٤٠°

موقع
المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

❖ في الشكل المقابل ، ن ج = ٢ سم ، ن د = ٨ سم ، ن ب = ٧ سم

أوجد قيمة س



الحل

ن ج × ن د = ن ب × ن أ " نظرية "

$$٧ \times س = ٨ \times ٢$$

$$٧ س = ١٦$$

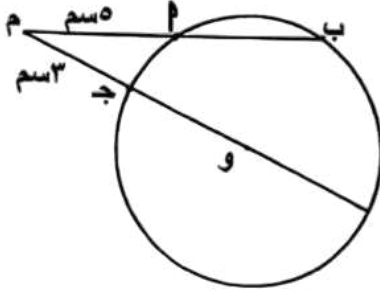
$$\frac{٧ س}{٧} = \frac{١٦}{٧}$$

$$س = \frac{١٦}{٧} \text{ سم}$$

❖ في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، طول نصف قطرها يساوي ٦ سم ،

$$ام = ٥ سم ، ج م = ٣ سم$$

أوجد طول $\overline{اب}$



الحل

$$ج د = ٦ + ٦ = ١٢ سم$$

$$ام \times ج م = ب م \times ج د$$

$$٥ \times ٣ = (ب م + ٥) \times ١٢$$

$$١٥ \times ٣ = (ب م + ٥) \times ١٢$$

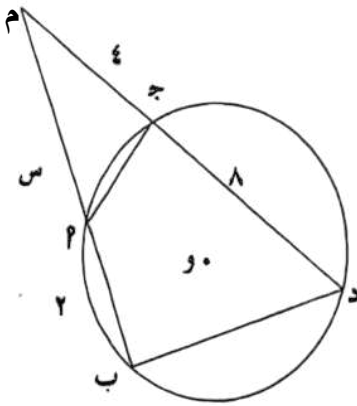
$$\frac{١٥ \times ٣}{١٢} = ب م + ٥$$

$$٩ = ب م + ٥$$

$$ب م = ٩ - ٥ = ٤ سم$$

موقع
المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

❖ في الشكل المقابل ، أوجد قيمة س



الحل

$$ام \times ج م = ب م \times ج د$$

$$س \times ٢ = (٨ + ٤) \times ٤$$

$$٢س = ٤٨ - ٤$$

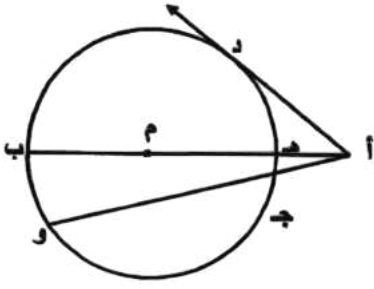
$$٢س = ٤٤$$

$$س = ٢٢$$

فتكون قيمة س = ٢٢ لأن س = ٤٤ مرفوضة

❖ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، أ د مماس للدائرة عند النقطة د ، أ ج = ٣ سم ،
أ ه = ٢ سم ، ج و = ٩ سم ، أوجد كل من :

أ د ، ه م



الحل

$$(أ د) = أ ج \times أ و$$

$$٣٦ = ١٢ \times ٣ =$$

$$① \quad أ د = \sqrt{٣٦} = ٦ \text{ سم}$$

$$أ ه \times أ ب = أ ج \times أ و$$

$$٢ \times أ ب = ١٢ \times ٣ =$$

$$أ ب = ١٨ \text{ سم}$$

$$ه م = أ ب - أ ه$$

$$١٦ = ٢ - ١٨ =$$

$$ه م = \frac{١٨}{٢} = ٩ \text{ سم}$$

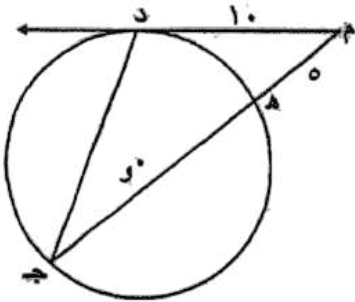
المنهج الكويتية

almanahi.com/kw/

❖ في الشكل المقابل : م د قطعة مماسية حيث م د = ١٠ ، م ه = ٥

أوجد بذكر السبب :

طول كلا من : م ج ، ه ج



الحل

$$(م د) = م ه \times م ج$$

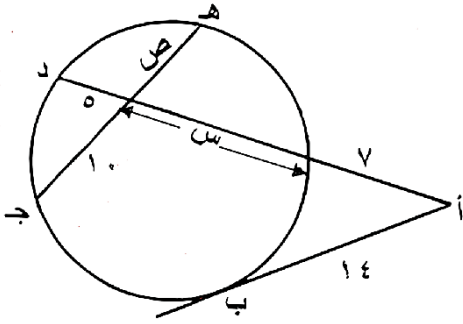
$$(١٠) = ٥ \times م ج$$

$$م ج = \frac{١٠}{٥} = ٢$$

$$ه ج = م ج - م ه$$

$$١٥ = ٥ - ٢ =$$

❖ في الشكل المقابل : أوجد قيمة كل من س ، ص



الحل

$$2 \times 14 = (10 + س) \times 7$$

$$28 = \frac{196}{7} = 10 + س$$

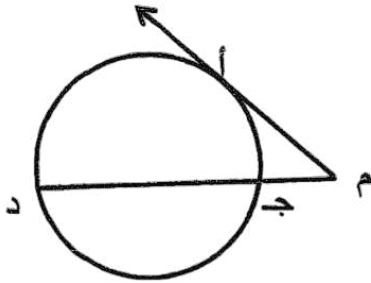
$$16 = 10 - 28 = س$$

$$5 \times 16 = ص \times 10$$

$$8 = \frac{5 \times 10}{10} = ص$$

موقع
المنهج الكويتية
almanahj.com/kw

❖ في الشكل المقابل م أ مماس للدائرة عند أ ، م أ = 6 سم ،
م ج = 3 سم ، أوجد ج د



الحل

$$م أ \times م ج = م د$$

$$6 \times 3 = م د$$

$$36 = م د$$

$$36 - 9 = م د$$

$$\frac{27}{3} = م د$$

$$م د = 9$$

❖ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، أوجد:

$$A - B$$

$$B - A$$

الحل

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times 2 = B - A$$

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 0-4 \\ 1-6 & 3-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} =$$

المنهج الكويتية
almanahj.com/kw

$$\therefore B - A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad B - A$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = B - A$$

$$|B - A| = | \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} | = |B - A|$$

$$= 2 \times 3 - (1 \times 0) = 6 - 0 = 6$$

$$= 6 - 0 = 6 \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \frac{1}{|B - A|} = B - A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \frac{1}{6} =$$

❖ إذا كانت $S = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ ، $V = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ ، أوجد:

١- $2S - V$

٢- V'

الحل

$$(1) \quad 2S - V = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \times 2 - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \times 2 - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$\therefore 2S - V = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$



$$(2) \quad V' = V \times V = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \times 0 + 2 \times 2 & 0 \times 2 + 2 \times 4 \\ 2 \times 0 + 2 \times 2 & 2 \times 2 + 4 \times 4 \end{vmatrix} =$$

$$V' = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}$$

❖ إذا كانت $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$ ، $B = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$ ، أوجد: $A \times B$

الحل

$$A \times B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$A \times B$ معرفة ورتبتها 3×2

$$= \begin{vmatrix} 1 \times 4 + 2 \times 7 & 1 \times 2 + 2 \times 1 \\ 0 \times 4 + 3 \times 7 & 0 \times 2 + 3 \times 1 \\ 4 \times 4 + 7 \times 7 & 4 \times 2 + 7 \times 1 \end{vmatrix} =$$

$$\therefore A \times B = \begin{vmatrix} 18 & 6 \\ 21 & 3 \\ 53 & 22 \end{vmatrix}$$

❖ إذا كانت $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = ب$ ، $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = ١$ أوجد :

١- أوجد قيمة محدد المصفوفة أ

٢- أ × ب

الحل

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = ب \times أ \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = |١| \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \times 4 + 2 \times 3 & 3 \times 0 + 2 \times 2 \\ 2 \times 4 + 3 \times 0 & 2 \times 0 + 3 \times 2 \end{bmatrix} =$$

$$2 \times 4 - 0 - \times 3 =$$

almanahj.com/kw

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 11 \end{bmatrix} =$$

$$٧ =$$

❖ أثبت أن $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = ب$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = ١$

الحل

$$١ = ب \times و$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = ب \times ١$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 3 + 2 \times 2 & 3 \times 2 + 2 \times 1 \\ 2 \times 3 + 1 \times 2 & 2 \times 2 + 1 \times 1 \end{bmatrix} =$$

$$١ = ب \times و$$

∴ ب نظير ضربي لـ ١

❖ حل المعادلة المصفوية الآتية :

$${}^1_9 \begin{vmatrix} \cdot & 8 \end{vmatrix} = {}^1_0 \begin{vmatrix} 2 & - \\ 2 & \end{vmatrix} - \text{س } 2$$

الحل

$${}^1_9 \begin{vmatrix} \cdot & 8 \end{vmatrix} = {}^1_0 \begin{vmatrix} 2 & - \\ 2 & \end{vmatrix} - \text{س } 2$$

$${}^1_0 \begin{vmatrix} 2 & - \\ 2 & \end{vmatrix} + {}^1_9 \begin{vmatrix} \cdot & 8 \end{vmatrix} = \text{س } 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & - \\ 14 & 10 \end{bmatrix} = \text{س } 2 \iff \begin{bmatrix} 2 & - \\ 14 & 10 \end{bmatrix} = \text{س } 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & - \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \text{س}$$

❖ حل المعادلة :

$${}^1_2 \begin{vmatrix} \cdot & 10 \end{vmatrix} = {}^1_4 \begin{vmatrix} 3 & - \\ 1 & - \end{vmatrix} + \text{س } 4$$

الحل

$${}^1_2 \begin{vmatrix} \cdot & 10 \end{vmatrix} = {}^1_4 \begin{vmatrix} 3 & - \\ 1 & - \end{vmatrix} + \text{س } 4$$

$${}^1_2 \begin{vmatrix} \cdot & 10 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 2 & - \end{bmatrix} + \text{س } 4$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 2 & - \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cdot & 10 \\ 2 & - \end{bmatrix} = \text{س } 4$$

$$\begin{bmatrix} 8 & - \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \text{س } 4 \iff \begin{bmatrix} 8 & - \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \text{س } 4$$

$$\begin{bmatrix} 2 & - \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \text{س}$$

$$\diamond \text{ إذا كانت } \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \text{ ، أوجد } s$$

الحل

$$2 - 3 = 0 - 3$$

$$2 - 3 = 0 - 3$$

$$3 = 3$$

$$3 = 3$$

∴ المصفوفتين متساويتين

$$2 = 4 + s$$

$$2 - 4 = s$$

$$-2 = s$$

$$s = -2$$



$$\diamond \text{ إذا كانت } \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & s \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \text{ أوجد قيمة كلا من } s \text{ ، } s$$

أوجد قيمة كلا من s ، s

الحل

$$4 \cdot 2 = 0 \cdot 2$$

$$8 = 0$$

$$8 = (0 - 2) \cdot 2$$

$$8 = 0$$

$$8 = 0$$

$$9 = s$$

$$9 \pm 2 = s$$

$$s = 7 \pm 2$$

❖ أوجد س بحيث: $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & \varepsilon \end{vmatrix} = س \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & \varepsilon \end{vmatrix}$ ، أوجد س

الحل

نوجد النظير الضربي للمصفوفة : $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & \varepsilon \end{vmatrix} = أ$

$$. \neq 2 = \varepsilon \times (3-) - (2-) \times 0 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & \varepsilon \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1- \\ 0 & 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2- \\ 0 & \varepsilon- \end{bmatrix} \times \frac{1}{2} = أ$$



$$\begin{bmatrix} 1 \times 3 + 0 \times 1- \\ 1 \times 0 + 0 \times 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1- \\ 0 & 2- \end{bmatrix} = س$$

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = س$$

❖ إذا كانت $\begin{vmatrix} \varepsilon & س \\ 6 & 12 \end{vmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س

الحل

∴ أ منفردة ∴ $|أ| = صفر$

$$. = \begin{vmatrix} \varepsilon & س \\ 6 & 12 \end{vmatrix}$$

$$. = 12 \times \varepsilon - س 6$$

$$. = \varepsilon 8 - س 6$$

$$6 \div$$

$$\varepsilon 8 = س 6$$

$$س = 8$$

❖ استخدم النظر الضربي للمصفوفة لحل النظام :

$$\begin{cases} \text{س} + ٣ \text{ص} = ٥ \\ \text{س} + ٤ \text{ص} = ٦ \end{cases}$$

الحل

نكتب النظام مع معادلة المصفوفات :

$$\begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} \quad (١)$$



$$\text{حيث } \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} = \text{أ} , \quad \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \text{ب} , \quad \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix} = \text{ج}$$

$$\Delta \neq ١ = ١ \times ٣ - ٤ \times ١ = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٣- & ٤ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣- & ٤ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} \times \frac{١}{١} = \text{أ}^{-١}$$

و بضرب طرفي المعادلة (١) من جهة اليمين في $\text{أ}^{-١}$:

$$\begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣- & ٤ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٦ \times (٣-) + ٥ \times ٤ \\ ٦ \times ١ + ٥ \times (١) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{س} = ٢ , \quad \text{ص} = ١$$

$$\diamond \text{ حل النظام } \begin{cases} 0 = 3ص + 3س \\ 0 = 2ص + 3س \end{cases}$$

باستخدام النظر الضربي للمصفوفة

الحل

المعادلة المصفوفية للنظام هي :

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\text{حيث } \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \text{أ} , \quad \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \text{ع} , \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \text{ب}$$

$$\Delta \neq 0 = 3 \times 3 - 2 \times 0 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \times \frac{1}{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

و بضرب المعادلة المصفوفية للنظام (1) من جهة اليمين في $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{س} = 1 \quad , \quad \text{ص} = 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ٦- = ٣ \text{ س} + ٢ \text{ ص} \\ ٠ = ٧- - ٣ \text{ ص} - ٤ \text{ س} \end{array} \right\} \text{ استخدم قاعدة كرامر لحل النظام}$$

الحل

$$٦- = ٣ \text{ س} + ٢ \text{ ص}$$

$$٧ = ٣ \text{ ص} - ٤ \text{ س}$$

$$١- = ٨ + ٩- = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & -٤ \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\Delta = ١٤ - ١٨ = \begin{vmatrix} ٢ & ٦- \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix} = \Delta \text{ س}$$

$$\Delta \text{ ص} = ٣- = ٢٤ - ٢١ = \begin{vmatrix} ٦- & ٣ \\ ٧ & -٤ \end{vmatrix}$$

$$\text{ص} = \frac{٣-}{١-} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta}$$

$$\text{س} = \frac{\Delta}{١-} = \frac{\Delta \text{ س}}{\Delta}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} ٧- = ٥ \text{ ص} - ٤ \text{ س} \\ ٣- = ٣ \text{ ص} + ٦ \text{ س} \end{array} \right\} \text{ استخدم قاعدة كرامر لحل النظام}$$

الحل

$$١٨- = ((٥-) \times (٦-)) - (٣ \times ٤) = \begin{vmatrix} ٥- & ٤ \\ ٣ & ٦- \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\Delta \text{ س} = ٣٦- = ((٥-) \times (٣-)) - (٣ \times ٧-) = \begin{vmatrix} ٥- & ٧- \\ ٣ & ٣- \end{vmatrix}$$

$$\Delta \text{ ص} = ٥٤- = ((٧-) \times (٦-)) - (٣-) \times ٤ = \begin{vmatrix} ٧- & ٤ \\ ٣- & ٦- \end{vmatrix}$$

$$\text{ص} = \frac{٥٤-}{١٨-} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta}$$

$$\text{س} = \frac{٣٦-}{١٨-} = \frac{\Delta \text{ س}}{\Delta}$$

❖ اكتب المعادلات المصفوفية التالية على شكل نظام معادلات ، ثم حل المعادلة المصفوفية إن أمكن :

$$\begin{vmatrix} 8 \\ 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س \\ ص \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

الحل

$$س + ص = 8$$

$$س + 2ص = 10$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 2 \times 1 = -1 \neq 0$$

$$\Delta س = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times 10 - 2 \times 8 = 10 - 16 = -6$$

$$\Delta ص = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = 8 \times 1 - 10 \times 1 = 8 - 10 = -2$$

$$ص = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{-6}{-1} = 6$$

$$س = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2$$

❖ حل المعادلة : 2 جا س - 1 = 0

الحل

$$2 \text{ جا س} = 1 \quad \leftarrow \text{ جا س} = \frac{1}{2}$$

$$\text{جا س} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{جا س} < 0$$

س تقع في الربع الأول

$$س = \frac{\pi}{6} + 2ك \pi$$

أو تقع في الربع الثاني

$$س = \pi - \frac{\pi}{6} + 2ك \pi$$

$$س = \frac{5\pi}{6} + 2ك \pi$$

$$\sqrt[2]{\frac{2}{r}} = \text{جا س} : \text{ حل المعادلة} \quad \diamond$$

الحل

$$\sqrt[2]{\frac{2}{r}} = \text{جا س} \quad \therefore$$

$$\frac{\pi}{\varepsilon} = \text{جا س} \quad \therefore$$

$$\therefore \text{جا س} < \cdot$$

∴ س تقع في الربع الأول

$$\text{س} = \frac{\pi}{\varepsilon} + 2\text{ك} \pi$$

$$\text{س} = \frac{\pi}{\varepsilon} + 2\text{ك} \pi$$

أو الربع الثاني

$$\text{أو س} = \left(\frac{\pi}{\varepsilon} - \pi\right) + 2\text{ك} \pi$$

$$\text{أو س} = \frac{\pi}{\varepsilon} + 2\text{ك} \pi$$

موقع
الأسئلة المقالية
almanahj.com/kw

$$\sqrt[3]{\frac{3}{r}} = \text{جا س} : \text{ حل المعادلة} \quad \diamond$$

الحل

$$\sqrt[3]{\frac{3}{r}} = \text{جا س} \quad \therefore$$

$$\frac{\pi}{3} = \text{جا س} \quad \therefore$$

$$\therefore \text{جا س} < \cdot$$

∴ س تقع في الربع الأول

$$\text{س} = \frac{\pi}{3} + 2\text{ك} \pi$$

أو الربع الثاني

$$\text{أو س} = \left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) + 2\text{ك} \pi$$

$$\text{س} = \frac{\pi}{3} + 2\text{ك} \pi$$

❖ حل المعادلة : $2 \cos \theta - 1 = 0$

الحل

$$2 \cos \theta = 1$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \theta < 0$$

س تقع في الربع الأول

أو تقع في الربع الرابع

$$\cos \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{\pi}{3}$$

موقع
المنهج الكويتية
almanahj.com/kw

❖ حل المعادلة : $2 \cos \theta - \sqrt{3} = 0$

الحل

$$2 \cos \theta = \sqrt{3}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\cos \theta < 0$$

∴ س تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

$$\cos \theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{أو} \quad \cos \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\diamond \text{ حل المعادلة : جتا س} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

الحل

$$\therefore \text{جتا س} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \text{جتا س} = \text{جتا } \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \text{جتا س} < .$$

∴ س تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

$$\text{س} = \frac{\pi}{4} + 2\text{ك} \pi \quad \text{أو} \quad \text{س} = \frac{\pi}{4} - 2\text{ك} \pi$$



$$\diamond \text{ حل المعادلة : ظا س} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

الحل

$$\text{ظا س} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ظا س} = \text{ظا } \frac{\pi}{3}$$

$$\text{ظا س} < .$$

س تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث

$$\text{س} = \frac{\pi}{3} + 2\text{ك} \pi \quad \text{أو} \quad \text{س} = \frac{\pi}{3} + 2\text{ك} \pi$$

❖ بدون استخدام الآلة الحاسبة :

إذا كان θ جاً $\frac{12}{13}$ ، جتا $\theta > 0$ ، أوجد جتا θ ، ظتا θ

الحل

$$1 = \theta \text{ جتا} + \theta \text{ جتا}$$

$$1 = \theta \text{ جتا} + \left(\frac{12}{13}\right)$$

$$\frac{20}{169} = \left(\frac{12}{13}\right) - 1 = \theta \text{ جتا}$$

$$\sqrt{\frac{20}{169}} \pm = \theta \text{ جتا}$$

$$\text{جتا} = \frac{0^-}{13} \quad \text{أو} \quad \text{جتا} = \frac{0}{13} \quad (\text{مرفوض لأن جتا } \theta > 0)$$

$$\text{ظتا } \theta = \frac{\text{جتا } \theta}{\theta \text{ جتا}} = \left(\frac{12}{13} \div \frac{0^-}{13}\right) = \frac{0^-}{12}$$

❖ بدون استخدام الآلة الحاسبة ، إذا كان θ جاً $\frac{3}{5}$ ، $\frac{\pi}{6} > \theta > 0$ ،

فأوجد كلا من : جتا θ ، ظا θ ، قا θ ، ظتا θ ، قتا θ

الحل

$$1 = \theta \text{ جتا} + \theta \text{ جتا}$$

$$1 = \theta \text{ جتا} + \left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\left(\frac{17}{25}\right) \pm = \theta \text{ جتا} \quad \leftarrow \quad \frac{17}{25} = \left(\frac{3}{5}\right) - 1 = \theta \text{ جتا}$$

$$\text{جتا } \theta = \frac{4}{5} \quad \text{أو} \quad \text{جتا } \theta = \frac{4}{5} \quad \text{مرفوض لأن } \frac{\pi}{6} > \theta > 0$$

$$\text{ظا} = \frac{\theta \text{ جتا}}{\theta \text{ جتا}} = \left(\frac{4}{5} \div \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\text{قا } \theta = \frac{1}{\theta \text{ جتا}} = \frac{5}{4} \quad , \quad \text{ظتا } \theta = \frac{1}{\theta \text{ ظا}} = \frac{4}{3} \quad , \quad \text{قتا } \theta = \frac{1}{\theta \text{ جتا}} = \frac{5}{4}$$

- ❖ بدون استخدام الآلة الحاسبة : إذا كان $\cos \theta = \frac{1}{3}$ ، $\theta > 0$.
أوجد : $\sin \theta$ ، $\tan \theta$ ، $\cot \theta$

الحل

$$\cos \theta + \sin \theta = 1$$

$$\cos \theta + \left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$\cos \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \leftarrow \sin \theta = \sqrt{\frac{4}{9}}$$



$$\sin \theta = \frac{2}{3} \text{ أو } \sin \theta = -\frac{2}{3} \text{ لأن } \theta > 0$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = 1$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = 1$$

- ❖ بدون استخدام الآلة الحاسبة : إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$ ، $\theta < 0$.
فأوجد : $\sin \theta$ ، $\tan \theta$

الحل

$$\cos \theta + \sin \theta = 1$$

$$\cos \theta + \left(\frac{3}{5}\right) = 1$$

$$\cos \theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{2}{5} \leftarrow \sin \theta = \sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$\sin \theta = \frac{4}{5} \text{ أو } \sin \theta = -\frac{4}{5} \text{ مرفوضة لأن } \theta < 0$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}} = 2$$

❖ بدون استخدام الآلة الحاسبة: إذا كان $\theta = \frac{12}{10}$ ، جا $\theta < 0$.
أوجد: جا θ ، جتا θ

الحل

$$\text{قا } \theta + 1 = \text{ظا } \theta$$

$$\sqrt{\frac{169}{100}} \pm = \text{قا } \theta \quad \leftarrow \quad \frac{169}{100} = \left(\frac{12}{10}\right)^2 + 1 =$$

$$\frac{13}{10} = \text{قا } \theta \quad \text{أو} \quad \frac{3}{10} = \text{قا } \theta$$

$$\text{جا } \theta < 0 \quad \text{أو} \quad \text{جتا } \theta < 0$$

$$\frac{13}{10} = \text{قا } \theta \quad \therefore \text{جتا } \theta = \frac{1}{\text{قا } \theta} = \frac{10}{13}$$

$$\text{جا } \theta = \text{ظا } \theta \times \text{جتا } \theta = \frac{12}{10} \times \frac{10}{13} = \frac{12}{13}$$



❖ بدون استخدام الآلة الحاسبة: إذا كان $\theta = \sqrt{2} - 2$ ، جتا $\theta > 0$.
أوجد: جتا θ ، جا θ ، قتا θ

الحل

$$\text{قا } \theta + \text{جتا } \theta + 1 = \text{ظا } \theta$$

$$\sqrt{9} \pm = \text{قا } \theta \quad \leftarrow \quad 9 = (\sqrt{2} - 2)^2 + 1 =$$

$$\text{قا } \theta = 3 \quad \text{أو} \quad \text{قا } \theta = -3$$

$$\therefore \text{جتا } \theta > 0 \quad \therefore \text{قا } \theta = 3$$

$$\therefore \text{جتا } \theta = \frac{1}{\text{قا } \theta} = \frac{1}{3}$$

$$\text{جا } \theta = \text{ظا } \theta \times \text{جتا } \theta \quad \leftarrow \quad \sqrt{2} - 2 = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} - 2 = \text{جا } \theta$$

$$\text{قتا } \theta = \frac{1}{\text{جتا } \theta} = \frac{3}{\sqrt{2} - 2}$$

❖ بدون استخدام الآلة الحاسبة: إذا كان $\frac{\theta}{\pi} = \frac{1}{8}$ ، جتا $\theta < 0$.
أوجد: جا θ ، جتا θ

الحل

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{1}{8} = \theta \text{ ظا}$$

$$\frac{\sqrt{89}}{20} \pm = \theta \text{ قا} \leftarrow \frac{\sqrt{89}}{20} = \left(\frac{\theta}{\pi}\right) + 1 = \theta \text{ ظا} + 1 = \theta \text{ قا}$$

$$\frac{\sqrt{89}}{20} = \theta \text{ قا} \quad \text{لأن جتا } \theta < 0 \quad \frac{\sqrt{89}}{20} = \theta \text{ قا}$$

$$\frac{\sqrt{89}}{20} = \theta \text{ قا} \quad \therefore \frac{\sqrt{89}}{20} = \frac{1}{\theta \text{ قا}} = \text{جتا}$$

$$\text{جا} = \text{ظا} \times \text{جتا} = \frac{\sqrt{89}}{20} \times \frac{\sqrt{89}}{20} = \frac{89}{400}$$

❖ بسط التعبير التالي لأبسط صورة: جتا $(-\theta)$ + جتا $(\theta - \pi)$ - جتا $(\theta + \pi)$

الحل

$$\text{جتا } (-\theta) + \text{جتا } (\theta - \pi) - \text{جتا } (\theta + \pi)$$

$$= \text{جتا } (\theta) - \text{جتا } (\theta) + \text{جتا } (\theta) = \text{جتا } (\theta)$$

$$= \text{جتا } (\theta)$$

❖ بسط التعبير التالي لأبسط صورة :

$$\text{جا س} + \text{جا } (90^\circ - \text{س}) + \text{جا } (180^\circ + \text{س}) + \text{جا } (90^\circ - \text{س})$$

الحل

$$\text{جا س} + \text{جا } (90^\circ - \text{س}) + \text{جا } (180^\circ + \text{س}) + \text{جا } (90^\circ - \text{س})$$

$$= \text{جا س} + \text{جتا س} - \text{جا س} + \text{جتا س}$$

$$= 2 \text{ جتا س}$$



❖ أثبت أن : $\text{جا } (90^\circ + \text{س}) + \text{جتا } (180^\circ - \text{س}) + \text{جا } (270^\circ) + \text{جتا } (180^\circ) = 2 -$

الحل

$$\text{جا } (90^\circ + \text{س}) + \text{جتا } (180^\circ - \text{س}) + \text{جا } (270^\circ) + \text{جتا } (180^\circ)$$

$$= \text{جتا س} - \text{جتا س} - 1 - 1$$

$$= 2 -$$

❖ أثبت صحة المتطابقة : $\text{قا }^2 \theta = \frac{(1 + \text{قا } \theta)(1 - \text{قا } \theta)}{\text{جا }^2 \theta}$

الحل

$$\frac{\text{ظا }^2 \theta}{\text{جا }^2 \theta} = \frac{1 - \text{قا }^2 \theta}{\text{جا }^2 \theta} = \frac{(1 - \text{قا } \theta)(1 + \text{قا } \theta)}{\text{جا }^2 \theta}$$

$$\text{قا }^2 = \frac{1}{\text{جتا }^2 \theta} = \frac{1}{\cancel{\text{جا }^2 \theta}} \times \frac{\cancel{\text{جا }^2 \theta}}{\text{جتا }^2 \theta} =$$

❖ أثبت صحة المتطابقة : $\text{جتا}^3 \text{س} = \text{جتا} \text{س} + \text{جتا} \text{س} \times \text{جا} \text{س} = \text{جتا} \text{س}$

الحل

$$\text{جتا}^3 \text{س} = \text{جتا} \text{س} + \text{جتا} \text{س} \times \text{جا} \text{س}$$

$$= \text{جتا} \text{س} (\text{جتا} \text{س} + \text{جا} \text{س})$$

$$\text{جتا} \text{س} = 1 \times \text{جتا} \text{س}$$



❖ أثبت صحة المتطابقة التالية : $(\text{ظا} \text{س} + 1) \text{جتا} \text{س} = 1$

الحل

$$(\text{ظا} \text{س} + 1) \text{جتا} \text{س}$$

$$= \cancel{\text{جتا} \text{س}} \times \frac{1}{\cancel{\text{جتا} \text{س}}} = \text{قا} \text{س} \times \text{جتا} \text{س} = 1$$

❖ أثبت صحة المتطابقة : $(\text{قا} \text{س} + \theta \text{قتا} \text{س}) - (\text{ظا} \text{س} + \theta \text{ظتا} \text{س}) = 2$

الحل

$$(\text{قا} \text{س} + \theta \text{قتا} \text{س}) - (\text{ظا} \text{س} + \theta \text{ظتا} \text{س})$$

$$= \text{قا} \text{س} - \text{ظا} \text{س} + \theta \text{قتا} \text{س} - \theta \text{ظتا} \text{س}$$

$$= 1 + 1 = 2$$

❖ إذا كان أ (٣، ٥-)، ب (٧، -٤)، فأوجد نقطة تقسيم \overline{AB} من جهة أ

بنسبة ٣ : ١ من الداخل

الحل

أ (٣، ٥-)، ب (٧، -٤)

٣ : ١



$$\left(\frac{m \cdot x_1 + n \cdot x_2}{m+n}, \frac{m \cdot y_1 + n \cdot y_2}{m+n} \right) = \text{نقطة التقسيم}$$

$$\left(\frac{3 \times 3 + (-4) \times 1}{3+1}, \frac{(5-) \times 3 + (7) \times 1}{3+1} \right) =$$

$$\left(\frac{5}{4}, \frac{8-}{4} \right) =$$

$$\left(\frac{5}{4}, 2- \right) =$$

❖ إذا كان أ (٤، ٢)، ب (٥، ٩)، فأوجد ج التي تقسم \overline{AB} من الداخل

بنسبة ٣ : ٥ من جهة ب

الحل

أ (٤، ٢)، ب (٥، ٩)

٥ : ٣

$$\left(\frac{m \cdot x_1 + n \cdot x_2}{m+n}, \frac{m \cdot y_1 + n \cdot y_2}{m+n} \right) = \text{نقطة التقسيم}$$

$$\left(\frac{4 \times 5 + 9 \times 3}{5+3}, \frac{2 \times 5 + 9 \times 4}{5+3} \right) =$$

$$\left(\frac{47}{8}, \frac{20}{8} \right) =$$

❖ إذا كان $a(3, -2)$ ، $b(-4, 3)$ ، فأوجد $ج$ بحيث $aج = جب$ ، $ج \ni أ$

(إرشاد: $ا ج = ج ب = ١ : ٢$)

الحل

$ا ج = ج ب$ ∴ نسبة التقسيم = $١ : ٢$ جهة $ا$

$a(3, -2)$ ، $b(-4, 3)$

$١ : ٢$

موقع
المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

$$\left(\frac{م ص_٢ + ن ص_١}{ن+م}, \frac{م س_٢ + ن س_١}{ن+م} \right) = \text{نقطة التقسيم}$$

$$\left(\frac{٤ \times ٢ + ٣ \times ١}{٢+١}, \frac{٣ \times ٢ + (-٢) \times ١}{٢+١} \right) =$$

$$\left(\frac{٤}{٣}, \frac{٤}{٣} \right) =$$

❖ أثبت أن النقاط: $a(2, -1)$ ، $b(-1, 0)$ ، $ج(3, -3)$ على استقامة واحدة

الحل

$$٢- = \frac{٦}{٣-} = \frac{(١-)-٥}{٢-١-} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \text{ميل } ا ب$$

$$٢- = \frac{٦}{٣-} = \frac{(١-)-٣-}{٢-٣-} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \text{ميل } ا ب$$

$$\text{ميل } ا ب = \text{ميل } ا ج \quad \text{ا ب} // \text{ا ج}$$

ا نقطة مشتركة

∴ $a, b, ج$ على استقامة واحدة

❖ اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ (٣ ، ١) ، ب (-٢ ، ٠)

الحل

$$1 = \frac{3-0}{1-(-2)} = m \quad \leftarrow \quad \text{ميل } \overleftrightarrow{AB} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

معادلة \overleftrightarrow{AB} :

$$ص - ص_1 = m (س - س_1)$$

$$ص - 3 = 1 (س - 1)$$

$$ص - 3 = س - 1$$

$$ص = س + 2$$

$$\text{ص} = \text{س} + 2$$



❖ اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{2}{3}$ و يمر بالنقطة (-٦ ، ٥)

الحل

معادلة الخط المستقيم :

$$ص - ص_1 = m (س - س_1)$$

$$ص - 5 = \frac{2}{3} (س + 6)$$

$$ص - 5 = \frac{2}{3} س + 4$$

$$ص = \frac{2}{3} س + 9$$

$$\text{ص} = \frac{2}{3} \text{س} + 9$$

❖ أوجد معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل و الذي يمر بالنقطة (٢ ، ٣ -) حيث ل : ص = ٢ س + ١

الحل

∴ المستقيمان ل ، هـ متوازيان ∴ ميل المستقيم هـ = ميل المستقيم ل = ٢

∴ معادلة المستقيم هـ هي :

$$ص - ص_١ = م (س - س_١)$$

$$ص - (٣ -) = (٢ -) (س -)$$

$$ص - ٣ = ٢ س - ٤$$

$$ص = ٢ س - ٧$$



❖ إذا كان المستقيم ك : ٣ ص + س + ٣ = ٠ فأوجد :

معادلة المستقيم ل الموازي للمستقيم ك و الذي يمر بالنقطة (٣ ، ٢)

الحل

$$\text{ميل المستقيم ك} = \frac{-١}{٣}$$

∴ المستقيمان ك ، ل متوازيان ∴ ميل المستقيم ك = ميل المستقيم ل = $\frac{-١}{٣}$

معادلة المستقيم ل هي :

$$ص - ص_١ = م (س - س_١)$$

$$ص - ٢ = \frac{-١}{٣} (س - (٣ -))$$

$$ص - ٢ = \frac{-١}{٣} (س + ٣)$$

$$ص - ٢ = \frac{-١}{٣} س - ١$$

$$ص = \frac{-١}{٣} س + ١$$



❖ إذا كان المستقيم ل : ص = ٢ س + ١

أوجد معادلة المستقيم ك العمودي على المستقيم ل و يمر بالنقطة (٣- ، ٤)

الحل

∴ ميل المستقيم ل = ٢ ← ∴ المستقيمان ل ، ك متعامدان

∴ ميل المستقيم ك = $\frac{-1}{\text{ميل المستقيم ل}}$ ← ∴ ميل المستقيم ك = $-\frac{1}{2}$

معادلة المستقيم ك هي :

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م} (\text{س} - \text{س}_1)$$

$$\text{ص} - (٣-) = (\text{س} - ٤) \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{ص} + ٣ = \text{س} + \frac{1}{2}$$

$$\text{ص} - \frac{1}{2} = \text{س} - ١$$



❖ إذا كان المستقيم ك : ٣ ص + س + ٣ = ٠ ، فأوجد معادلة المستقيم ب العمودي على المستقيم ك و الذي يمر بالنقطة (١ ، ٤)

الحل

ك : ص = $\frac{-1}{3} \text{س} - ١$ ← ∴ ميل ك = $-\frac{1}{3}$ ← ∴ ميل ب = ٣

المستقيمان ك ، ب متعامدان

ميل المستقيم ب = $\frac{-1}{\text{ميل المستقيم ك}}$ = $\frac{-1}{-\frac{1}{3}}$ = ٣

∴ معادلة المستقيم ب :

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م} (\text{س} - \text{س}_1)$$

$$\text{ص} - ٤ = ٣ (\text{س} - ١)$$

$$\text{ص} - ٤ = ٣ \text{س} - ٣$$

$$\text{ص} = ٣ \text{س} - ١$$

$$\text{ص} = ٣ \text{س} - ١$$

❖ أوجد البعد بين النقطة ج (١، ٢) و المستقيم : ٣ - ص - ١ = ٠

الحل

$$\text{البعد ف} = \frac{|أس١ + ب١ص١ + ج١|}{\sqrt{أ١^2 + ب١^2}}$$

أ = ٣ ب = ١- ج = ١-

$$\text{ف} = \frac{|(١-)+ (١) (١-)+ (٢) (٣)|}{\sqrt{(١-)^2 + (٣)^2}}$$

س١ = ٢ ص١ = ١

موقع
المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

$$\text{ف} = \frac{|(١-)+ (١-)+ (٦)|}{\sqrt{١+٩}} = \frac{|٤|}{\sqrt{١٠}}$$

$$\text{ف} = \frac{٤}{\sqrt{١٠}} = \frac{٢\sqrt{١٠}}{١٠} \text{ وحدة طول}$$

❖ أوجد البعد بين المستقيم ل : ص - ٣ + س = ٠ و النقطة د (٢ ، ٥)

الحل

$$\text{معادلة ل : س} + \text{ص} - ٣ = ٠$$

$$\text{ف} = \frac{|أس١ + ب١ص١ + ج١|}{\sqrt{أ١^2 + ب١^2}}$$

أ = ٣ ب = ١- ج = ١-

س١ = ٢ ص١ = ١

$$\text{ف} = \frac{|(٣-)+ ٥ \times ١ + ٢ \times ١|}{\sqrt{(١)^2 + (١)^2}}$$

$$\text{ف} = \frac{|٣ - ٥ + ٢|}{\sqrt{١+١}}$$

$$\text{ف} = \frac{٤}{\sqrt{٢}}$$

$$\text{ف} = \frac{٢\sqrt{٢}}{٢}$$

❖ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، ٢-) و طول نصف قطرها ٧ وحدات

الحل

$$\text{المركز (٣ ، ٢-)} \quad \text{د} = ٣ \quad \text{هـ} = ٢-$$

$$\text{نصف القطر " نق " } = ٧$$

$$\text{معادلة الدائرة (س - د) + (ص - هـ) = نق}$$



موقع
المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

$$٤٩ = (٣ - س) + (٢ + ص)$$

❖ أوجد مركز و طول نصف قطر الدائرة التي معادلتها :

$$٩ = (٣ - ص) + (٢ + س)$$

الحل

$$\therefore (س - د) + (ص - هـ) = نق$$

$$\text{د} = ٢- \quad \text{هـ} = ٣$$

$$\text{نق} = ٩ \Leftrightarrow \text{نق} = ٣$$

مركز الدائرة (٣ ، ٢-) و طول نصف قطر الدائرة = ٣ وحدات

❖ عين مركز و طول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة :

$$3س^2 + 3ص^2 - 6س + 9ص - 12 = 0$$

الحل

$$3س^2 + 3ص^2 - 6س + 9ص - 12 = 0 \quad (3 \div)$$

$$س^2 + ص^2 - 2س + 3ص - 4 = 0$$

و هي معادلة دائرة على الصورة العامة :

$$\therefore ل = 2- ، ك = 3 ، ب = 4-$$

$$\text{المركز} = \left(\frac{ل-}{2} ، \frac{ك-}{2} \right)$$

$$\therefore \text{مركز الدائرة} = \left(1 ، \frac{3-}{2} \right)$$

نوجد طول نصف قطر الدائرة :

$$\text{نق} = \sqrt{\frac{1}{4} (ل^2 + ك^2 - 4ب)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} (2^2 + 3^2 - 4(4-))}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} (29)}$$

$$\text{نق} = \sqrt{\frac{1}{4} (29)} \text{ وحدة طول}$$

❖ أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{أب}$ حيث $أ(4، 2)$ ، $ب(2، 4)$

الحل

$$\text{مركز الدائرة} = \left(\frac{4+2}{2} ، \frac{2+4}{2} \right) = (3 ، 1)$$

$$\text{نق} = \sqrt{\frac{1}{4} ((ص_1 - ص_2)^2 + (س_1 - س_2)^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} ((2-4)^2 + (4-2)^2)} = 1$$

∴ معادلة الدائرة هي :

$$(س - 3)^2 + (ص - 1)^2 = 1$$

$$10 = (س - 3)^2 + (ص - 1)^2$$

❖ أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها: $(س - ١) + (ص - ٢) = ٥$

عند نقطة التماس أ (٣، ١)

الحل

مركز الدائرة النقطة و (١، ٢)

$$\text{ميل } \overline{OA} = \frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢} = \frac{١ - ٢}{٣ - ١} = \frac{-١}{٢} = -\frac{١}{٢}$$

∴ معادلة المماس هي :

$$ص - ص_١ = م(س - س_١)$$

$$ص - ١ = م(س - ٣)$$

$$ص - ١ = ٢ - ٦$$

$$ص = ٢ - ٥$$

∴ نصف قطر التماس و \overline{OA} عمودي على مماس الدائرة

$$\text{ميل المماس} = \frac{١}{\text{ميل نصف قطر التماس}} = ٢$$

❖ أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها: $(س - ٢) + ص = ٨$

عند نقطة أ (٠، ٢)

الحل

مركز الدائرة (٢، ٠)

$$\text{ميل نصف القطر} = \frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢} = \frac{٢ - ٠}{٠ - ٢} = \frac{٢}{-٢} = -١$$

∴ معادلة المماس هي :

$$ص - ص_١ = م(س - س_١)$$

$$ص - ٢ = م(س - ٠)$$

$$ص - ٢ = ٢س$$

$$ص = ٢ + ٢س$$

∴ نصف قطر التماس عمودي على مماس الدائرة

$$\text{ميل المماس} = \frac{١}{\text{ميل نصف قطر التماس}} = ١$$