حسام بيومي

الملف مراجعة محلولة للكورس الأول
موقع المناهج ⇦ المناهج الكويتية ⇦ الصف الثاني عشر العلمي ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الأول

مراجعه الفصل الدراسي الأول

٢٠٢٤_٢٠٢٥

رياضيات

الصف الثاني عشر علمي

اعداد
الاستاذ: حسام بيومي

أوجد إن أمكن:

(a) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$

عند التعويض المباشر عن $x=1$ نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$= \lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{x\cancel{(x-1)}}$, $x\neq1$

$=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1}=3$

شرط المقام:

$\lim_{x\to1} x = 1 \neq 0$

(b) $\lim_{x\to0}\frac{(x+2)^3-8}{x}$

بالتعويض المباشر عن $x=0$ نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$=\lim_{x\to0}\frac{(x+\cancel{2}-\cancel{2})((x+2)^2+2(x+2)+4)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}(x^2+4x+4+2x+4+4)}{\cancel{x}}$, $x\neq0$

$=\lim_{x\to0}(x^2+6x+12) = 0^2+6(0)+12 = 12$

(c) $\lim_{x\to-2}\frac{|x+2|}{x^2+3x+2}$

بالتعويض المباشر عن $x=-2$ نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

نفرض

$f(x)=\frac{|x+2|}{x^2+3x+2} = \begin{cases}\frac{\cancel{x+2}}{\cancel{(x+2)}(x+1)} & : x>-2\\ \frac{-\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x+1)} & : x<-2\end{cases}$, $x\neq-2$

النهاية من جهة اليمين

$\lim_{x\to-2^+} f(x)$

$\lim_{x\to-2^+}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{-1} = \boxed{-1} \to ①$

شرط المقام:

$\lim_{x\to-2}(x+1) = -2+1=-1\neq0$

النهاية من جهة اليسار

$\lim_{x\to-2^-} f(x)$

$\lim_{x\to-2^-}\frac{-1}{x+1} = \frac{-1}{-1} = \boxed{1} \to ②$

شرط المقام:

$\lim_{x\to-2^-}(x+1) = -2+1=-1\neq0$

من ① و ② نستنتج أن

$\lim_{x\to-2^+}f(x) \neq \lim_{x\to-2^-}f(x)$

إذاً $\lim_{x\to-2}f(x)$ غير موجودة

$\lim_{x\to7}\frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$, $\lim_{t\to2}\frac{t^2-3t+2}{t^2-4}$, $\lim_{x\to5}\frac{|x+2|-7}{x^2-25}$

أوجد إن أمكن:

(a) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

بالتعويض المباشر عن $x=2$ نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$= \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{2x-3}-1)}{x-2} \times \frac{(\sqrt{2x-3}+1)}{(\sqrt{2x-3}+1)}$

بالضرب في مرافق البسط

$= \lim_{x \to 2} \frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{2x-3}+1)} \quad , x \neq 2$

$= \lim_{x \to 2} \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} = \frac{\lim_{x \to 2} 2}{\lim_{x \to 2}(\sqrt{2x-3}+1)} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$

شرط المقام

$\lim_{x \to 2}(\sqrt{2x-3}+1)$

$= \lim_{x \to 2}\sqrt{2x-3} + \lim_{x \to 2} 1$

$= 1+1 = 2 \neq 0$

شرط الجذر

نهاية ما تحت الجذر > 0

$\lim_{x \to 2}(2x-3) = 2(2)-3$

$= 1 > 0$

نهاية الجذر

$\lim_{x \to 2}\sqrt{2x-3} = \sqrt{\lim_{x \to 2}(2x-3)}$

$= \sqrt{1} = 1$

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

عند التعويض المباشر عن $x=1$ نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\cancel{\sqrt[3]{x}-1}} \quad , x \neq 1$

$= \lim_{x \to 1} (\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1) = \lim_{x \to 1}\sqrt[3]{x^2} + \lim_{x \to 1}\sqrt[3]{x} + \lim_{x \to 1} 1$

$= \sqrt[3]{\lim_{x \to 1} x^2} + \sqrt[3]{\lim_{x \to 1} x} + 1 = 1+1+1 = 3$

(c) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

عند التعويض المباشر عن $x=-2$ نحصل على صيغة غير معينة

ملحوظة هامة: مرافق $\sqrt[3]{a}$ هو $\sqrt[3]{a^2}$

بالضرب في مرافق المقام

$\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} \times \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$

$= \lim_{x \to -2} \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\cancel{x+2}} \quad , x \neq -2$

$= \lim_{x \to -2} (x-2)(\sqrt[3]{(x+2)^2}) = \lim_{x \to -2}(x-2) \cdot \lim_{x \to -2}\sqrt[3]{(x+2)^2} = (-2-2) \cdot \sqrt[3]{\lim_{x \to -2}(x+2)^2}$

$= -4 \times \sqrt[3]{(-2+2)^2} = 0$

إضافي

$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{9}}$ $\qquad$ $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

إعداد: أ. حسام بيومي

أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$$

عند التعويض المباشر عن $x=3$ نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

نستخدم القسمة التركيبية

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & -4 & 3 \\ & & 3 & 3 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

الناتج x^2+x-1 ، والباقي 0

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3-2x^2-4x+3}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} (x^2+x-1)$$

$$= 3^2+3-1$$

$$= 11$$

إضافي

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^5+32}{x+2}$$

أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$\sqrt{x^2} = |x|$

عندما $x \to \infty$

يكون $|x| = x$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}} \quad , \; x \neq 0$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to \infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x \to \infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{1-0}{1} = \boxed{1}$$

شرط الجذر

≥ 0 نهاية ما تحت الجذر

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} 1 + \lim_{x \to \infty}\frac{2}{x} - \lim_{x \to \infty}\frac{4}{x^2}$$

$$= 1+0-0 = 1 > 0$$

شرط المقام

$$\lim_{x \to \infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$= \sqrt{1} = 1 \neq 0$$

إضافي

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2}-x}{x+1}$$

أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{4x^2+5x+6}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(1-\frac{3}{x}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}} \quad , x \neq 0$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{-\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}$$

$$= \frac{1-0}{-1} = \boxed{-1}$$

$\sqrt{x^2} = |x|$

عندما $x \to -\infty$

يكون $|x| = -x$

شرط الجذر

نهاية ماتحت الجذر ≥ 0

$$\lim_{x \to -\infty}\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 4 + \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \to -\infty} \frac{6}{x^2}$$

$$= 4+0+0 = 4$$

شرط المقام

$$\lim_{x \to -\infty} -\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}$$

$$= -\sqrt{\lim_{x \to -\infty}\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}$$

$$= -\sqrt{1} = -1 \neq 0$$

إضافي

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$$

أوجد إن أمكن:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x} \times \dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}$ (بالضرب × مرافق المقام)

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$

تذكرات
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\cdot(1+\cos x)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x) = \left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0} 1 + \lim\limits_{x\to 0}\cos x\right)$

$= (1)^2\cdot(1+1) = 1\times 2 = \boxed{2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\cos x - 1}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\cos x - 1} \times \dfrac{\cos x + 1}{\cos x + 1}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x(\cos x+1)}{\cos^2 x - 1}$

تذكر
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x(\cos x+1)}{-\sin^2 x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{x}{\sin x}\cdot(\cos x + 1)$

$= -\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\cos x + \lim\limits_{x\to 0} 1\right)$

$= -(1)\times(1+1) = 1\times 2 = 2$

إضافي

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x\cos x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x^2 - x}$

أوجد إن أمكن:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5\tan x - 3\sin x}{4x}$

فك توحيد المقامات

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{5\tan x}{4x} - \dfrac{3\sin x}{4x} \right)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5\tan x}{4x} - \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\sin x}{4x}$

$= \dfrac{5}{4} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} - \dfrac{3}{4} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

$= \dfrac{5}{4} \times (1) - \dfrac{3}{4} \times (1) = \dfrac{1}{2}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x \tan x - 2x\cos x}{3x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\cos x \tan x}{3x} - \dfrac{2\cancel{x}\cos x}{3\cancel{x}} \right)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\cos x}{3} \cdot \dfrac{\tan x}{x} - \dfrac{2}{3}\cos x \right)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{3} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} - \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{3}\cos x$

$= \dfrac{1}{3} \times 1 - \dfrac{2}{3} \times 1$

$= -\dfrac{1}{3}$

إضافي

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x + \sin x}{x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sin x - x^2}{3x^2}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x}$

إعداد: أ. حسام بيومي

لتكن f :
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & : x \geq 1 \\ 5x - 1 & : x < 1 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f : عند $x = 1$

$$-\infty \quad 5x - 1 \quad 1 \quad x^2 + 3x \quad \infty$$

أ: نختار الدالة

$$f(1) = 1^2 + 3(1) = 4 \longrightarrow (1)$$

النهاية من جهة اليمين	النهاية من جهة اليسار
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + 3x)$	$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (5x - 1)$
$= 1^2 + 3(1)$	$= 5(1) - 1$
$= \boxed{4}$	$= \boxed{4}$

$$\because \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 4$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 4 \longrightarrow (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن

الدالة متصلة عند $x = 1$

إضافي

لتكن f :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & : x > 3 \\ 7 & : x \leq 3 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 3$

لتكن f :
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & : x > 0 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f : عند $x = 0$

ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{|x|} & : x \neq 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$ عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{x} & ; x > 0 \\ -3 & ; x = 0 \\ \frac{x^2-3x}{-x} & ; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\cancel{x}(x-3)}{\cancel{x}} & ; x > 0 \\ -3 & ; x = 0 \\ \frac{\cancel{x}(x-3)}{-\cancel{x}} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & ; x > 0 \\ -3 & ; x = 0 \\ -(x-3) & ; x < 0 \end{cases}$$

$-\infty$ $-(x-3)$ | 0 | $(x-3)$ ∞

$f(0) = -3 \rightarrow (1)$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -(x-3) = -(0-3) = \boxed{3}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x-3) = 0-3 = \boxed{-3}$

$\because \lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة

$\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x=2$

ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$ عند $x = -2$

نفرض أن $h(x) = x^2+4$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$

الدالة g دالة جذر تكعيبي (جذر فردي) متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=-2$

الدالة h كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore$ الدالة h متصلة عند $x=-2$

حيث أن $h(-2) = (-2)^2 + 4 = 8 \neq 0$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=-2$

لتكن: $f(x) = x^2 + 5$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ابحث اتصال الدالة gof عند $x = -2$

أولاً ندرس اتصال الدالة f عند $x=-2$

الدالة f كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\rightarrow$ ① ∴ الدالة f متصلة عند $x=-2$

نوجد $f(-2) = (-2)^2 + 5 = 9$

ثانياً ندرس اتصال الدالة g عند $f(-2)=9$

الدالة g دالة جذر x متصلة عند $x \in R^+$

∴ الدالة g متصلة عند $x = 9$

$\rightarrow$ ② أي أن الدالة g متصلة عند $x = f(-2)$

من ①، ② نجد أن

gof متصلة عند $x=-2$

لتكن: $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

نفرض أن

$g(x) = |x|$ ، $h(x) = x^2 - 5x + 6$

∴ $f(x) = (goh)(x)$

أولاً ندرس اتصال الدالة h عند $x=2$

الدالة h كثيرة حدود متصلة على R

$\rightarrow$ ① ∴ الدالة h متصلة عند $x = 2$

$h(2) = 2^2 - 5(2) + 6 = 0$

ثانياً ندرس اتصال الدالة g عند $h(2) = 0$

الدالة g دالة مطلق x متصلة على R

∴ الدالة g متصلة عند $x = 0$

$\rightarrow$ ② ∴ الدالة g متصلة عند $x = h(2)$

من ①، ② نجد أن goh متصلة عند $x = 2$

∴ الدالة f متصلة عند $x=2$

إضافي

لتكن: $g(x) = 2x + 3$ ، $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$

لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$ حيث: $f(x)=\begin{cases}-2 & : x=1\\ x^2-3 & : 1<x<3\\ 6 & : x=3\end{cases}$

يمينا $\quad x^2-3 \quad$ يسار

1 $\qquad\qquad$ 3

أولاً ندرس اتصال الدالة f على $(1,3)$

الدالة f كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

① $\therefore$ الدالة f متصلة على $(1,3)$

ثانياً ندرس اتصال الدالة f عند $x=3$ من جهه اليسار

$f(3)=6$

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x^2-3)$

$=3^2-3=6$

$\because f(3)=\lim_{x\to 3^-} f(x)$

② $\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=3$ من جهه اليسار

ثالثاً ندرس اتصال الدالة f عند $x=1$ من جهه اليمين

$f(1)=-2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2-3)$

$=1^2-3=-2$

$\because f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$

③ $\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=1$ من جهه اليمين

من ① ، ② ، ③ (أولاً وثانياً ، ثالثاً) نجد أن

الدالة f متصلة على $[1,3]$

إثرائي

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$ حيث: $f(x)=\begin{cases}-2 & : x=1\\ x^2-3 & : 1<x<3\\ 6 & : x=3\end{cases}$

ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث: $f(x) = \begin{cases} x+3 & : x \leq -1 \\ \frac{4}{x+3} & : x > -1 \end{cases}$

$-\infty$ $\quad x+3 \quad$ -1 $\quad \frac{4}{x+3} \quad$ ∞

مجال الدالة f: $D_f = (-\infty, -1] \cup (-1, \infty) = \mathbb{R}$

أولاً ندرس اتصال الدالة f على $(-\infty, -1]$

نفرض $g(x) = x+3$

g دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\because f(x) = g(x) \quad \forall x \in (-\infty, -1]$

$\therefore f$ متصلة على $(-\infty, -1]$

ثانياً: ندرس اتصال الدالة f على $(-1, \infty)$

نفرض $h(x) = \frac{4}{x+3}$

h دالة حدودية نسبية متصلة لكل $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

$\because f(x) = h(x) \quad \forall x \in (-1, \infty)$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $(-1, \infty)$

ثالثاً ندرس اتصال الدالة f عند $x = -1$ من جهة اليمين

$f(-1) = -1 + 3 = \boxed{2}$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \left(\frac{4}{x+3}\right) = \frac{4}{2} = \boxed{2}$

شرط المقام

$\lim\limits_{x \to -1^+} (x+3) = -1+3 = 2 \neq 0$

$f(-1) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = -1$

من أولاً وثانياً وثالثاً نجد أن

الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ أي على مجالها

لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & : x < 0 \\ 2 & : x = 0 \\ ax + b & : x > 0 \end{cases}$ متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

أوجد قيمة الثابتين a , b

$$-\infty \quad x^2 - a \quad 0 \quad ax + b \quad \infty$$

مجال الدالة f

$D_f = (-\infty, 0) \cup \{0\} \cup (0, \infty)$

∵ الدالة f متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

∴ الدالة f متصلة عند $x = 0$

$f(0) = 2$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 - a)$

$= 0^2 - a = -a$

$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$

$2 = -a$

$\boxed{a = -2}$

$f(0) = 2$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (ax + b)$

$= a(0) + b$

$= b$

$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$\boxed{2 = b}$

إضافي

لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & : x < 0 \\ 2 & : x = 0 \\ ax + b & : x > 0 \end{cases}$ متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

أوجد قيمة الثابتين a , b

إعداد: أ. حسام بيومي

لتكن الدالة f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6, 10]$

نفرض أن $f(x) = \sqrt{g(x)}$

$g(x) = x^2 - 7x + 10$

أولاً المجال

$g(x) \geq 0$

$x^2 - 7x + 10 \geq 0$

المعادلة المناظرة

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x - 2)(x - 5) = 0$

$x = 2$ و $x = 5$

$-\infty \quad + \quad 2 \quad - \quad 5 \quad + \quad \infty$

$\therefore$ مجال الدالة هو $(-\infty, 2] \cup [5, \infty)$

ثانياً الاتصال

الدالة g كثيرة حدود متصلة على R

$\therefore$ الدالة g متصلة $[6, 10]$ $\rightarrow$ (1)

$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty, 2] \cup [5, \infty)$

$\because$ $[6, 10]$ مجموعة جزئية من D_f

$\therefore$ $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [6, 10]$ $\rightarrow$ (2)

من (1) ، (2) نجد أن

الدالة f متصلة على $[6, 10]$

إضافي

لتكن الدالة f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5, 0]$

لتكن الدالة f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

ادرس اتصال الدالة f على $[-3, 3]$

لتكن الدالة f: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$. ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$

نفرض

$g(x) = \sqrt[3]{x}$ ، $h(x) = x^2 - 5x + 4$

$\therefore f(x) = (g \circ h)(x)$

$\because$ الدالة h كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

الدالة g جذر تكعيبي لـ x متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore$ الدالة $(g \circ h)(x)$ متصلة لأنها تركيب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$

إضافي

لتكن الدالة f: $f(x) = |3x^2 + 4x - 1|$. ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$

إعداد: أ. حسام بيومي

لتكن f : $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & : x\le 2 \\ 3x-2 & : x>2 \end{cases}$

ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x=2$

$-\infty$ x^2-4x 2 $3x-2$ ∞

نبحث اتصال الدالة f عند $x=2$

$$f(2)=2^2-4=0$$

النهاية من جهة اليمين

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(3x-2)$$

$$=3(2)-2=\boxed{4}$$

النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-4x)$$

$$=2^2-4(2)=\boxed{-4}$$

$$\because \lim_{x\to 2^-} f(x)\ne \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة

$\therefore$ الدالة f غير متصلة عند $x=2$

$\therefore$ الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x+5 & : x \le 3 \\ x^2-1 & : x > 3 \end{cases}$

أوجد إن أمكن $f'(3)$

$$f(3) = 3 + 5 = \boxed{8}$$

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$ إن وجدت

المشتقة من جهة اليسار

$$f'_{-}(3) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x+5-8}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{x-3}} = 1$$

$$f'_{-}(3) = 1$$

المشتقة من جهة اليمين

$$f'_{+}(3) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2-1-8}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2-9}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} (x+3) = 3+3 = 6$$

$$f'_{+}(3) = 6$$

$$\because f'_{-}(3) \neq f'_{+}(3)$$

$\therefore f'(3)$ غير موجودة

إضافي

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2+x & : x \le -1 \\ x^2-x-2 & : x > -1 \end{cases}$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1,0)$

البداية

$(x-1)'=1$

$(x+2)'=1$

$$f'(x)=\frac{(1)(x+2)-(1)(x-1)}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{x+2-x+1}{(x+2)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}$$

الميل

$$m=f'(1)=\frac{3}{(1+2)^2}=\frac{1}{3}$$

معادلة المماس

$m=\frac{1}{3}$

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-0=\frac{1}{3}(x-1)$

$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

معادلة الناظم

$\frac{-1}{m}=-3$

$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$

$y-0=-3(x-1)$

$y=-3x+3$

إضافي

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x)=\frac{-4}{x^2+2x+5}$ عند النقطة $(1,0)$

إعداد: أ. حسام بيومي

لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & : x \le 1 \\ 2x+1 & : x > 1 \end{cases}$ والدالة متصلة على مجالها

أوجد إن أمكن $f'(x)$

$$-\infty \quad x^2+2 \quad 1 \quad 2x+1 \quad \infty$$

$$D_f = (-\infty, 1] \cup (1, \infty) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & ; x < 1 \\ \text{نبحث} & ; x = 1 \\ 2 & ; x > 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 1^2 + 2 = \boxed{3}$$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$ اذ وجدت

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+2-3}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$$
$$= \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 1+1$$
$$= \boxed{2}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x+1-3}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{2x-2}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$
$$= \lim_{x \to 1^+} 2 = \boxed{2}$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) = 2 \Rightarrow f'(1) = 2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & ; x < 1 \\ 2 & ; x = 1 \\ 2 & ; x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & ; x \le 1 \\ 2 & ; x > 1 \end{cases}$$

ومنه

إضافي

لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : x < 1 \\ 2\sqrt{x} & : x \ge 1 \end{cases}$ والدالة متصلة على مجالها

أوجد إن أمكن $f'(x)$

أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي لمنحنى الدالة $f(x) = \tan x$ عند النقطة $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

ملحوظة هامة $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

ممكن كسب أولاً $\cos \frac{\pi}{4}$ ثم نقلبه و نربعه

$$f'(x) = \sec^2 x$$

$$m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$m = 2$$

معادلة المماس

$m = 2$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$$

معادلة العمودي

$$\frac{-1}{m} = \frac{-1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$$

إضافي

أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي لمنحنى الدالة $f(x) = \sec x$ عند النقطة $F\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$

لتكن: $g(x) = x^{13}$ ، $f(x) = -2x^3 + 4$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(fog)(x)$ ، $(gof)'(0)$

$\boxed{(f\circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$

$f'(x) = -6x^2$

$g'(x) = 13x^{12}$

$f'(g(x)) = -6(x^{13})^2$

$= -6x^{26}$

$(f\circ g)'(x) = -6x^{26} \cdot 13x^{12}$

$= -78x^{38}$

$(g\circ f)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0)$

$f(0) = -2(0) + 4 = 4$

$\therefore (g\circ f)'(0) = g'(4) \cdot f'(0)$

$g'(x) = 13x^{12}$

$g'(4) = 13(4)^{12}$

$f'(x) = -6x^2$

$f'(0) = -6(0)^2$

$= 0$

$(g\circ f)'(0) = 13(4)^{12} \times 0$

$= 0$

لتكن: $g(x) = \sqrt{x}$ ، $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(fog)'(1)$

$(f\circ g)'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1)$

$g(1) = \sqrt{1} = 1$

$\therefore (f\circ g)'(1) = f'(1) \cdot g'(1)$

$(x^2+4)' = 2x$

$f'(x) =$

$= \frac{(2x)(x^2+4) - (2x)(x^2-4)}{(x^2+4)^2}$

$f'(1) = \frac{2(1)(1^2+4) - 2(1)(1^2-4)}{(1^2+4)^2}$

$= \frac{16}{25}$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

$(f\circ g)'(1) = \frac{16}{25} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{25}$

إعداد: أ. حسام بيومي

لتكن: $f(x) = u^2 + 4u - 3 \;,\; u = 2x^2 + x$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = 2u + 4 \qquad , \qquad \frac{du}{dx} = 4x + 1$$

$$= 2(2x^2 + x) + 4$$

$$= 4x^2 + 2x + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = (4x^2 + 2x + 4)\cdot(4x + 1)$$

$$= 16x^3 + 8x^2 + 16x + 4x^2 + 2x + 4 = 16x^3 + 12x^2 + 18x + 4$$

إذا كانت $y = \sin x$ بين أن $y^{(4)} = y$

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$y'' = -\sin x$$

$$y''' = -\cos x$$

$$y^{(4)} = \sin x$$

$\therefore$

$$y^{(4)} = y$$

إضافي

لتكن $y = \cos x$ بين أن $y^{(4)} + y'' = y$

أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1,1)$

ضرب

باستخدام الاشتقاق الضمني

$$2x - 2yy' + y'x + y = 0$$

$$-2yy' + y'x = -2x - y$$

$$y'(-2y + x) = -2x - y$$

$$y' = \frac{-2x - y}{-2y + x}$$

لايجاد الميل نعوض بالنقطة $(1,1)$

$$m = y'\big|_{(1,1)} = \frac{-2(1) - (1)}{-2(1) + (1)} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$m = 3$$

∴ ميل المماس $= 3$

إضافي

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$

للمنحنى الذي معادلته: $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1,1)$

باستخدام الاشتقاق الضمني

$$2yy' + \frac{y'}{2\sqrt{y}} + 2x = 0$$

$$2yy' + y' \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = -2x$$

$$y'\left(2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right) = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}}$$

لإيجاد الميل نعوض بالنقطة $(1,1)$

$$m = y'|_{(1,1)} = \frac{-2(1)}{2(1) + \frac{1}{2\sqrt{1}}} = \frac{-2}{\frac{5}{2}} = -\frac{4}{5}$$

ميل المماس $= -\frac{4}{5}$

إذا كانت $y = \sqrt{1-2x}$ فأثبت أن $yy'' + (y')^2 = 0$

بتربيع الطرفين

$$y = \sqrt{1-2x}$$

$$y^2 = 1 - 2x$$

$$\frac{2y\,y'}{2} = \frac{-2}{2}$$

$$\underbrace{y\,y'}_{\text{ضرب}} = -1$$

$$y'y' + yy'' = 0$$

$$yy'' + (y')^2 = 0$$

وهو المطلوب

إضافي

للمنحنى الذي معادلته: $2\sqrt{y} + y = x$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3,1)$

إذا كانت $y = x\sin x$ فأثبت أن $y''' + y' + 2\sin x = 0$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2, 1]$

∵ الدالة متصلة على $[-2, 1]$

∴ الدالة لها قيم قصوى مطلقة في هذه الفترة

أولاً النقاط الطرفية

$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = \boxed{-1}$

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = \boxed{-1}$

ثانياً النقاط الحرجة

$f'(x) = 3x^2 - 3$

بوضع $f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0$

$3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \begin{cases} 1 \notin (-2, 1) \\ -1 \in (-2, 1) \end{cases}$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = \boxed{3}$

من أولاً وثانياً نجد أن أكبر قيمة للدالة f هي 3 ∴ 3 قيمة عظمى مطلقة

أصغر قيمة للدالة f هي -1 ∴ -1 قيمة صغرى مطلقة

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة f : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1, 3]$

∵ الدالة f متصلة على $[1, 3]$

∴ يوجد قيم عظمى وصغرى مطلقة في الفترة $[1, 3]$

أولاً النقاط الطرفية

$f(1) = \frac{1}{1^2} = \boxed{1}$

$f(3) = \frac{1}{3^2} = \boxed{\frac{1}{9}}$

ثانياً النقاط الحرجة

$f(x) = x^{-2}$

$f'(x) = -2x^{-3}$

$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

لاحظ أن $f'(x) \neq 0$ لأنه البسط لا يساوي صفر

$f'(x)$ غير موجودة "عندما يكون المقام يساوي صفراً"

$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 , \quad 0 \notin (1, 3)$

∴ لا يوجد نقاط حرجة للدالة f في الفترة $(1, 3)$

من أولاً وثانياً أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[1, 3]$ هي 1 ⟸ ∴ 1 قيمة عظمى مطلقة

أصغر قيمة للدالة f " " " هي $\frac{1}{9}$ ⟸ ∴ $\frac{1}{9}$ قيمة صغرى مطلقة

إضافي

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2, 3]$

بين أن الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,4]$، ثم أوجد c الذي تعني به النظرية وفسر إجابتك.

∵ الدالة f كثيرة حدود متصلة على R

∴ الدالة f متصلة على الفترة $[0,4]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0,4)$

∴ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[0,4]$

∴ يوجد على الأقل $c \in (-3,3)$ بحيث

$$f(4) = 4^3 - 3(4) + 2 = \boxed{54}$$

$$f(0) = 0^3 - 3(0) + 2 = \boxed{2}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$$

$$f'(c) = \frac{54 - 2}{4} = 13 \rightarrow ②$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(c) = 3c^2 - 3 \rightarrow ①$$

بالتعويض من ① في ②

$$3c^2 - 3 = 13$$

$$3c^2 = 13 + 3 \Rightarrow \frac{\cancel{3}c^2}{\cancel{3}} = \frac{16}{3} \Rightarrow c = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$\frac{4\sqrt{3}}{3} \in (0,4)$

$-\frac{4\sqrt{3}}{3} \notin (0,4)$

التفسير: يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(4,54)$ و $(0,2)$

إضافي

بين أن الدالة f : $f(x) = x^2 + 2x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3,1]$، ثم أوجد c الذي تعني به النظرية وفسر إجابتك.

لتكن الدالة f : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. أوجد كلاً مما يلي:

a) النقاط الحرجة للدالة

b) الفترات التي تكون فيها الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها

c) القيم القصوى المحلية

الدالة f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق عند كل $x \in \mathbb{R}$

نوجد أولاً النقاط الحرجة

$f'(x) = -3x^2 + 6x$

بوضع $f'(x) = 0$

$-3x^2 + 6x = 0$

$-3x(x-2) = 0$

$x = 0$ و $x = 2$

$f(0) = -4$

$f(2) = 0$

∴ النقاط الحرجة هي

$(0, -4)$ و $(2, 0)$

نكون الجدول

الفترات	$-\infty$ إلى 0	0 إلى 2	2 إلى ∞
اشارة $f'(x)$	$-$	$+$	$-$
سلوك $f(x)$	↘ تناقص	↗ تزايد	↘ تناقص

* الدالة f متزايدة على الفترة $(0, 2)$

* الدالة f متناقصة على الفترات

$(-\infty, 0)$ و $(2, \infty)$

للدالة f قيمة عظمى محلية قيمتها 0 عند $x = 2$

للدالة f قيمة صغرى محلية قيمتها -4 عند $x = 0$

إضافي

لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 12x^2 - 5$. أوجد كلاً مما يلي:

a) النقاط الحرجة للدالة

b) الفترات التي تكون فيها الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها

c) القيم القصوى المحلية

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها

① المجال: الدالة f كثيرة حدود متصلة على وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

② النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x^3) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$$

③ النقاط الحرجة

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

بوضع $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

$$x = 3 \qquad x = 1$$

$$f(3) = -4$$

$$f(1) = 0$$

النقاط الحرجة هي

$(1, 0)$ و $(3, -4)$

④ نكون الجدول

الفترات	$-\infty$ — 1	1 — 3	3 — ∞
اشارة $f'(x)$	+	−	+
سلوك $f(x)$	↗ تزايد	↘ تناقص	↗ تزايد

- الدالة f متزايدة على الفترات $(-\infty, 1)$ و $(3, \infty)$
- الدالة f متناقصة على الفترة $(1, 3)$

للدالة f قيمة عظمى محلية عند $x = 1$ وقيمة صغرى محلية عند $x = 3$

$$f''(x) = 6x - 12$$

بوضع $f''(x) = 0$

$$6x - 12 = 0 \Rightarrow 6x = 12$$

$$x = 2 \Rightarrow \boxed{f(2) = -2}$$

⑤ نقطة الانعطاف هي $(2, -2)$

الفترات	$-\infty$ — 2	2 — ∞
اشارة $f''(x)$	−	+
بيان $f(x)$	∩	∪

منحنى الدالة f مقعر لأعلى على الفترة $(2, \infty)$

منحنى الدالة f مقعر لأسفل على الفترة $(-\infty, 2)$

إضافي

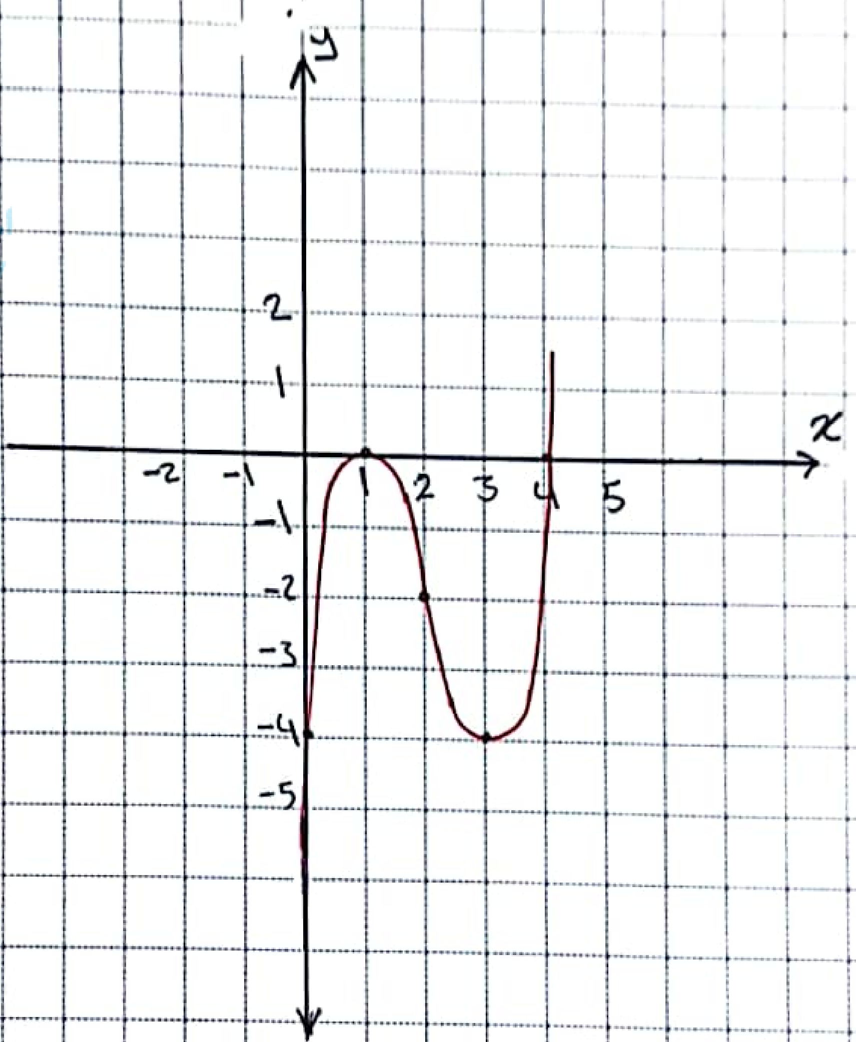
ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها

إعداد: أ. حسام بيومي

⑥ نقاط اضافية

ملحة بيانيا

x	0	1	2	3	4
y	-4	0	-2	-4	0



ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها

* الدالة f كثيرة حدود مجالها R متصلة على R وقابلة للاشتقاق على R

* النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x)) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (-x^3) = -\infty$$

* نوجد النقاط الحرجة

$$f'(x) = -3x^2$$

نضع $f'(x) = 0$

$$-3x^2 = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

$\therefore$ $(0, 1)$ نقطة حرجة

* نكون الجدول

الفترات	$-\infty$ إلى 0	0 إلى ∞
إشارة $f'(x)$	$-$	$-$
سلوك $f(x)$	تناقص ↘	تناقص ↘

الدالة f متناقصة على الفترات $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$

لا توجد نقاط محلية عظمى أو صغرى كلية

$$f''(x) = -6x$$

نضع $f''(x) = 0$

$$-6x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

	$-\infty$ إلى 0	0 إلى ∞
إشارة $f''(x)$	$+$	$-$
بيان $f(x)$	∪ تقعر لأعلى	∩ تقعر لأسفل

منحنى الدالة f مقعر لأعلى على $(-\infty, 0)$

منحنى الدالة f مقعر لأسفل على $(0, \infty)$

نقطة انعطاف $(0, 1)$

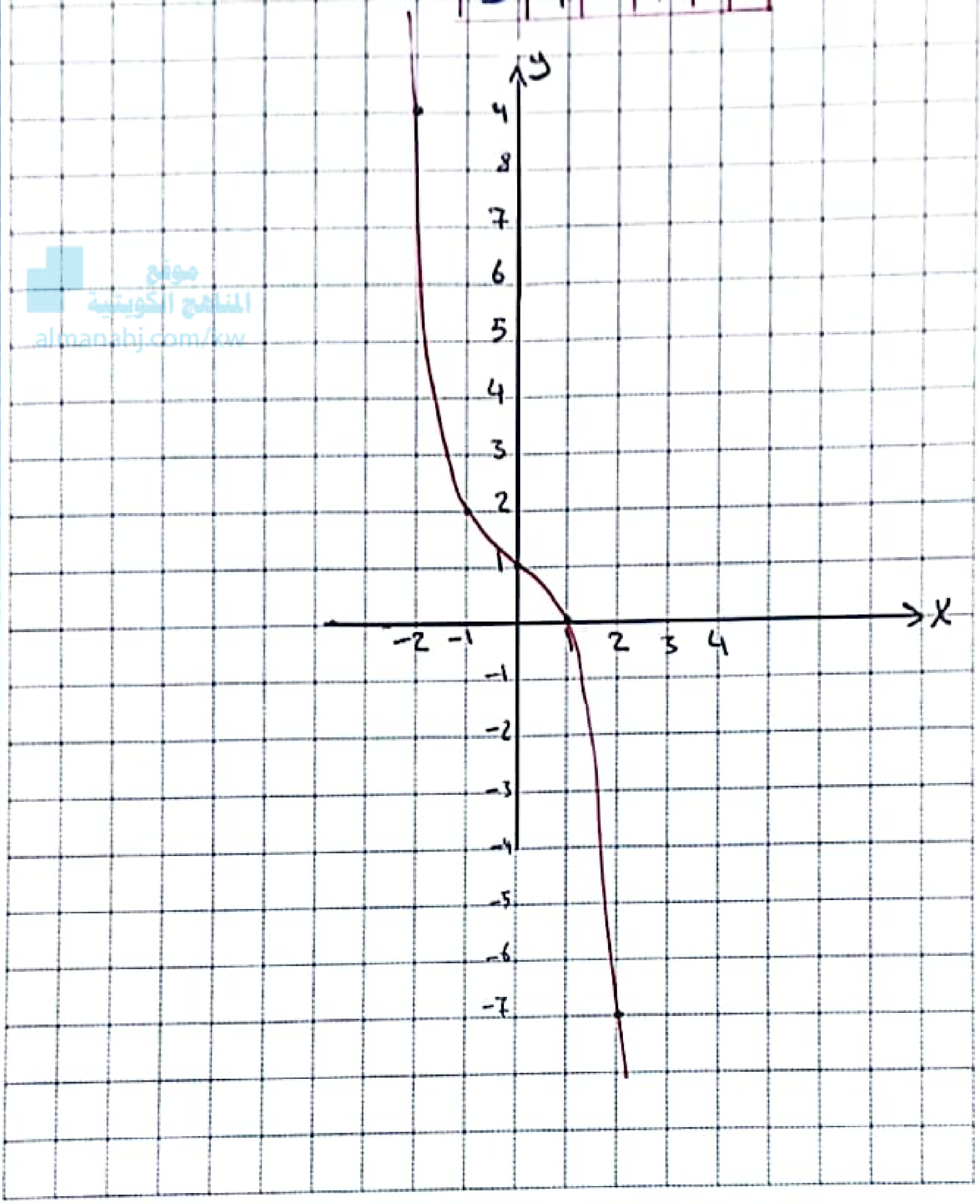
إضافي

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها

ملاحظة بيانية

نقاط إضافية

x	-2	-1	0	1	2
y	9	2	1	0	-7



تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h.

a) أوجد الارتفاع $h(cm)$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

b) ما قيمة هذا الحجم؟

$$V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h) \quad , \quad h \in (0, \infty)$$

$$V'(h) = 2\pi(-3h^2 + 36)$$

بوضع $V'(h) = 0$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow -3h^2 + 36 = 0$$

$$\frac{\cancel{-3}h^2}{\cancel{-3}} = \frac{-36}{-3} \Rightarrow h^2 = 12 \Rightarrow h = \pm 2\sqrt{3}$$

$$h = -2\sqrt{3} \notin (0, \infty)$$

$$h = 2\sqrt{3} \in (0, \infty)$$

اختبار المشتقة الثانية

$$V''(h) = 2\pi(-6h)$$

$$V''(2\sqrt{3}) = 2\pi(-6(2\sqrt{3}))$$

$$\approx -130.6 < 0$$

∴ قيمة $h = 2\sqrt{3}$ هي قيمة عظمى مطلقة

∴ أكبر حجم للأسطوانة عند $h = 2\sqrt{3}\ cm$

ويكون الحجم

$$V(2\sqrt{3}) = 2\pi(-(2\sqrt{3})^3 + 36(2\sqrt{3})) \simeq 522.37\ cm^3$$

إضافي

أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها 8m، والذي مساحته أكبر مساحة يكون مربعًا.

أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الاناث 25 والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 18.4$ باستخدام مستوى ثقة 95 %

1- أوجد هامش الخطأ.

2- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3- فسر فترة الثقة.

$\sigma = 3.6$, $\bar{X} = 18.4$ $n = 25$

(1) ∵ مستوى الثقة 95%

∴ القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

∵ σ معلومة يكون هامش الخطأ

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{3.6}{\sqrt{25}} = 1.4112$$

(2) فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

$$(\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (18.4 - 1.4112, 18.4 + 1.4112)$$

$$= (16.99, 19.81)$$

(3) التفسير

عند اختيار 100 عينة عشوائية حجم كل منها $n=25$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحتوى على القيمة الحقيقية لـ μ .

إضافي

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ وبمتوسط حسابي $\bar{x} = 50$ و الانحراف المعياري $S = 9$ باستخدام مستوى الثقة 95%.

a) أوجد هامش الخطأ.

b) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ، علماً بأن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.
إذا كان لدينا $n = 13$, $s = 0.3$, $\bar{x} = 8.4$

∵ σ غير معلومة ، $n \leq 30$

∴ نستخدم توزيع t

درجات الحرية $n-1 = 13-1 = 12$

∵ مستوى الثقة

$$1-\alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

من جدول التوزيع t فإن

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.179$$

هامش الخطأ

$$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.179 \times \frac{0.3}{\sqrt{13}} \simeq 0.1813$$

∴ فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ.

$$(\bar{x}-E, \bar{x}+E) = (8.4 - 0.1813, 8.4 + 0.1813)$$

$$= (8.2187, 8.5813)$$

بيّنت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو $\mu = 1800\ kg$ مع انحراف معياري $\sigma = 150\ kg$. ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الاسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك و تأكيدًا على ذلك تم اختبار عينة من 40 سلكًا. فتبين أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي 1840 kg

هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$؟

① صياغة الفروض

فرض العدم $H_0: \mu = 1800$ مقابل فرض البديل $H_1: \mu \neq 1800$

② المقياس الإحصائي ∵ σ معلومة نستخدم المقياس

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1840 - 1800}{\frac{150}{\sqrt{40}}} \simeq 1.686$$

③ مستوى الثقة ∵ 95%

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

④ منطقة القبول $(-1.96, 1.96)$

⑤ القرار ∵ $1.686 \in (-1.96, 1.96)$

∴ القرار قبول فرض العدم $\mu = 1800$

إضافي

متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\bar{x} = 1570$ بانحراف معياري $S = 120$. يقول صاحب المصنع إن متوسط العمر بالساعات المصنع $\mu = 1600$ للمصابيح المصنعة في

اختبر صحة الفرض $\mu = 1600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1600$ وباختيار مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$

يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 دينارًا كويتيًا. فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل تبين أن متوسطها الحسابي (دينار) $\bar{x}=283$ و الانحراف المعياري $S = 32$ فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟

استخدم مستوى ثقة 95 % (علمًا بأن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًا)

1) صياغة الفروض

فرض العدم

$H_0: \mu = 290$ مقابل

الفرض البديل

$H_1: \mu \neq 290$

2) المقياس الإحصائي

∵ σ غير معلومة ، $n \leq 30$ ∴ نستخدم المقياس

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{283 - 290}{\frac{32}{\sqrt{10}}} \approx -0.6917$$

3) $n = 10$ ∴ درجات الحرية $n-1 = 10-1 = 9$

مستوى الثقة 95% $1 - \alpha = 0.95$

$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

من جدول التوزيع t

$t_{0.025} = 2.262$

4) منطقة القبول

$(-2.262, 2.262)$

5) القرار

∵ $-0.6917 \in (-2.262, 2.262)$

∴ القرار هو قبول فرض العدم $\mu = 290$