التاريخ / / ٢٠

وزارة التربية

الإدارة العامة لمنطقة الفروانية التعليمية

ثانوية سلمان الفارسي للبنين

قسم الرياضيات

٢٠١٩/ ٢٠٢٠

أوراق عمل الصف الحادي عشر علمي

الفصل الدراسي الثاني

*الوحدة السابعة *

*الاعداد المركبة *

هذه الأوراق لاتغني عن الكتاب المدرسي

إعداد قسم الرياضيات

التاريخ / / ٢٠

1–7 الأعداد المركبة

الوحدة التخيلية **Imaginary Unit**

هي العدد الذي مربعه (-1) ويرمز إليه بالرمز i

$$i = \sqrt{-1} \quad , \quad i^2 = -1$$

الأعداد التخيلية:

- لأي عدد حقيقي موجب m ،

$$\sqrt{-m} = \sqrt{m}\, i$$

- تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b \in \mathbb{R}^*$ أعدادًا تخيلية.

تعريف: العدد المركب **Complex Number**

العدد المركب هو عدد على الصورة $a + bi$ حيث a , b عددان حقيقيان، i الوحدة التخيلية.

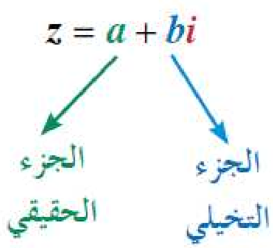
يمكن كتابة أي عدد مركب على الصورة $z = a + bi$

الصورة $a + bi$ تسمى **الصورة الجبرية** للعدد المركب.

ويسمى a **الجزء الحقيقي Real Part**

ويسمى b **الجزء التخيلي Imaginary Part**

ويرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$.



حاول أن تحل

1 بسِّط كل عدد مما يلي مستخدمًا الوحدة التخيلية i:

a $\sqrt{-2}$ **b** $-\sqrt{-12}$ **c** $\sqrt{-36}$

2 اكتب كلًّا من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

a $\sqrt{-18}+7$ **b** $\dfrac{10-\sqrt{-100}}{5}$ **c** $\dfrac{\sqrt{-9}+5}{7}$

تساوي عددين مركبين — Equal Complex Numbers

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.

ليكن:
$$z_1 = a_1 + b_1 i \quad , \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$
$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \; , \; b_1 = b_2$$

مثال (3)

أوجد قيم كل من $x , y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

a $x + 5i = 7 - 3yi$

التاريخ   /   /   ٢٠

b $(x+3)+y^2 i = 5 - yi$

c $3i = 2x - 5yi$

وتعرف **بالصورة الديكارتية** للعدد المركب.

الصورة الديكارتية		الصورة الجبرية
$M(a, b)$	$\longleftrightarrow$	$z = a + bi$

4 مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

a $z_1 = 4 - i$

b $z_2 = -3i$

c $z_3 = -4 - 3i$

d $z_4 = 2$

التاريخ / / ٢٠

حاول أن تحل

5 اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط $N(-4, 1)$, $H(1,-2)$, $K(7,0)$.

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ عددين مركبين فإن:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

خواص عملية الجمع على الأعداد الحقيقية تستمر مع عملية الجمع على الأعداد المركبة كما يلي:

الخاصية	$\forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
التجميعية	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

مثال (6)

إذا كان: $z_3 = 2i$, $z_2 = 4 - 7i$, $z_1 = 2 + 3i$ فأوجد:

a $z_1 + z_2$

التاريخ / / ٢٠

b $z_1 - z_2$

c $z_3 - z_2 - z_1$

حاول أن تحل

6 إذا كان $z_3 = -0.3i$, $z_2 = 3.4 - 1.2i$, $z_1 = -2 + 5i$ فأوجد:

a $z_1 + z_2$

b $z_2 - z_1$

c $z_3 + z_2 + z_1$

التاريخ / / ٢٠

إذا كان $z_1 , z_2 \in \mathbb{C} , c \in \mathbb{R}$

حيث $z_1 = a_1 + b_1 i , z_2 = a_2 + b_2 i$ فإن:

1. $c z_1 = ca_1 + c b_1 i$
2. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

حاول أن تحل

7 أوجد الناتج:

b $(9+4i)(4-9i)$

a $(6-5i)(4-3i)$

مثال (8)

إذا كان $z_1 = 2+3i \quad , \quad z_2 = 5-i$ فأوجد:

b $z_1 \cdot z_2$

a $\frac{1}{2} z_1$

التاريخ   /   /   ٢٠

إذا كان p عدد كلي فإن:

$$i^{4p}=1\ ,\ i^{4p+1}=i\ ,\ i^{4p+2}=-1\ ,\ i^{4p+3}=-i$$

مثال (9)

إذا كان $z_1=i\ ,\ z_2=-2i\ ,\ z_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

فأوجد:

b z_2^6

a z_1^{21}

d z_3^3

التاريخ / / ٢٠

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $\overline{z} = \overline{a+bi} = a - bi$

خواص مرافق العدد المركب:

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i \ , \ z_2 = a_2 + b_2 i$

فإن:

- $z_1 + \overline{z_1} = 2a_1$
- $z_1 - \overline{z_1} = 2bi$
- $z_1 \cdot \overline{z_1} = a_1^2 + b_1^2$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$

مثال (10)

إذا كان $z_1 = 3 + 4i \ , \ z_2 = 5 - 2i$ فأوجد:

b $z_1 - \overline{z_1}$

a $z_1 + \overline{z_1}$

f $\overline{z_1 \cdot z_2}$

e $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + bi$ يرمز له بالرمز z^{-1}:

ويكون: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi}$

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

حاول أن تحل

11 أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a $z_1 = -3i - 7$

b $z_2 = 5 + 11i$

c $z_3 = 6i$

مثال (12)

أوجد ناتج قسمة $5 - 6i$ على $2 + 3i$

التاريخ   /   /   ٢٠

حاول أن تحل

12 أوجد ناتج قسمة $3 - 2i$ على $1 + 2i$

مثال (13)

اكتب كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية للعدد المركب:

b $\dfrac{2 - i}{2 + i}$

c $\dfrac{\overline{5 + i}}{\overline{2 - 3i}}$

التاريخ / / ٢٠

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة الجبرية للعدد: $3+\sqrt{-4}$ هي: $3+2i$ (a) (b)

(2) مرافق العدد المركب: $z=3+4i$ هو: $\overline{z}=-3-4i$ (a) (b)

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب $z=3-2i$ هو: $-z=3+2i$ (a) (b)

(4) الصورة المبسّطة للتعبير: $(12+5i)-(2-i)$ هي: $10+6i$ (a) (b)

في التمارين (5–14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) العدد: $32+\sqrt{-225}$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي:

(a) $-15+6i$ (b) $6+15i$ (c) $6-15i$ (d) $32+15i$

(6) حل المعادلة: $-10-6i=2x+3yi$ هو:

(a) $x=5\ ,\ y=-2$ (b) $x=-5\ ,\ y=-2$ (c) $x=-5\ ,\ y=2$ (d) $x=5\ ,\ y=2$

(7) إذا كان $z_1=5i+2$ ، $z_2=-3-i$ فإنّ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ تساوي:

(a) $\frac{1}{10}+\frac{17}{10}i$ (b) $\frac{-1}{10}-\frac{17}{10}i$ (c) $\frac{-1}{10}+\frac{17}{10}i$ (d) $\frac{1}{10}-\frac{17}{10}i$

(8) إذا كان: $x\,i^2+3\,y\,i=5+3\,i^5$ فإن $(x\ ,\ y)$ تساوي

(a) $(5,\ 1)$ (b) $(-5,\ -1)$ (c) $(5,\ -1)$ (d) $(-5,\ 1)$

(9) أبسط صورة للتعبير: $(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{-9})$ هي:

(a) $18+17i$ (b) $18+3\sqrt{-9}+4\sqrt{-4}$

(c) $6+17i$ (d) 18

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(1+2i)^2$ هي:

(a) $z=-3+4i$ (b) $z=5+4i$ (c) $z=-3$ (d) $z=5$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(2-i)^3$ هي:

(a) $z=14+13i$ (b) $z=14-13i$ (c) $z=2-11i$ (d) $z=2-13i$

(12) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\frac{i}{i+2}$ هي:

(a) $z=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ (b) $z=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

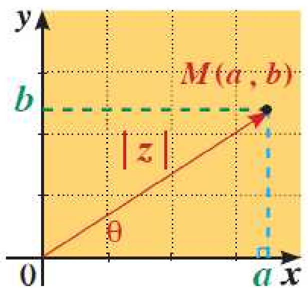
(c) $z=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ (d) $z=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$

التاريخ   /   /   ٢٠

7–2 الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

القيمة المطلقة لعدد مركب Absolute Value of a Complex Number

القيمة المطلقة للعدد المركب هي المسافة بين النقطة التي تمثل هذا العدد ونقطة الأصل في المستوى الإحداثي المركب والتي يمكنك إيجادها باستخدام نظرية فيثاغورث.



بصفة عامة إذا كان $z = a + bi$

فإن: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

الإحداثيات القطبية

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

مثال (1)

أوجد:

b $|3 - 4i|$

a $|5i|$

حاول أن تحل

2 أوجد الزوج المرتب (x , y) الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين:

a $A(5 , 300^\circ)$

b $B\left(2 , \frac{2\pi}{3}\right)$

مثال (3)

حوّل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية (r , θ) لكل مما يلي:

a $L(1 , -\sqrt{3})\ ,\ 0 \leq \theta < 2\pi$

b $M(-3 , -4)\ ,\ 0^\circ \leq \theta < 360^\circ$

التاريخ / / ٢٠

3 أوجد الزوج المرتب (r, θ) لكل نقطة مما يلي حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$

a $D(3\sqrt{3}, 3)$

b $C(4, -2\sqrt{5})$

يمكن كتابة العدد المركب $z = x + yi$ على الصورة:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وتعرف **بالصورة المثلثية** للعدد المركب z.

مثال (4)

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

a $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$

التاريخ   /   /   ٢٠

b $z_2 = -2 - 2i$

---

c $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

التاريخ / / ٢٠

a $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} i$

6 ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b $z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

التاريخ   /   /   ٢٠

7 ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

a $z_1 = 2i$

b $z_2 = 5$

c $z_3 = \frac{-3}{4}$

d $z_4 = -\frac{5}{2}i$

مثال (5)

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

a $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b $z_2 = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}$

c $z_3 = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

---

d $z_4 = \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin 390^\circ)$

---

c $-\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$ هي: $A(-2\sqrt{3}, 2)$ — (a) (b)

(2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2}, 135^\circ)$ هي: $B(-1, 1)$ — (a) (b)

(3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي: $M\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$ — (a) (b)

(4) العدد المركب: $z = \sqrt{3} - i$ بصورة المثلثية هو: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ — (a) (b)

(5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي: $z = 1 - i$ — (a) (b)

(6) السعة الأساسية للعدد $z = \cos 30^\circ + i\cos 240^\circ$ هي 330° — (a) (b)

في التمارين (7–13)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4, \frac{5\pi}{3}\right)$ هي:

(a) $A(2, 2\sqrt{3})$ (b) $A(-2, 2\sqrt{3})$ (c) $A(-2, -2\sqrt{3})$ (d) $A(2, -2\sqrt{3})$

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:

(a) $B\left(1, \frac{-\pi}{4}\right)$ (b) $B\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ (c) $B\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $B\left(1, \frac{-3\pi}{4}\right)$

9) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$ هي:

(a) $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ (b) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(c) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (d) $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

10) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = \frac{-4}{1-i}$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

(a) $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ (b) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

(c) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

(a) $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ (b) $z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(c) $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ (d) $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

التاريخ   /   /   ٢٠

3—7 حل معادلات

أولًا: حل معادلات من الدرجة الأولى في $\mathbb{C}$

مثال (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $3z + 1 - i = 7 + 3i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

حاول أن تحل

1 أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i = 3 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

التاريخ / / ٢٠

أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(4) $z+3(1+i)z-8(2-i)=0$

التاريخ   /   / ٢٠

مثال (2)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i\bar{z} = 5 - 2i$ في $\mathbb{C}$.

التاريخ / / ٢٠

حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + i = 2\overline{z} + 1$ في $\mathbb{C}$.

التاريخ   /   / ٢٠

ثانيًا: حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد في $\mathbb{C}$

حاول أن تحل

3 أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي حيث $x \in \mathbb{C}$:

a $3x^2 + 48 = 0$

b $-5x^2 - 150 = 0$

4 أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$ في $\mathbb{C}$.

(8) $z^2 - 2z + 4 = 0$

(9) $z + \dfrac{4}{z} = 2$

حاول أن تحل

5 لتكن المعادلة: $2z^2 - 6z + 5 = 0$

a أثبت أن العدد المركب $z_1 = \frac{3-i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

b أوجد الجذر الثاني.

الجذر التربيعي لعدد مركب Square Root of a Complex Number

لإيجاد جذر تربيعي لعدد مركب z نبحث عن عدد w يكون مربعه يساوي z.

ليكن $z = a + bi$

ابحث عن $w = m + ni$، بحيث يكون $w^2 = z$

$$(m+ni)^2 = a + bi$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = a + bi$$

$$\therefore \begin{cases} m^2 - n^2 = a \\ 2mn = b \end{cases}$$

للمساعدة على حل هذا النظام ندخل معادلة ثالثة ناتجة عن كون $|w|^2 = |z|$،

أي $(\sqrt{m^2+n^2})^2 = \sqrt{a^2+b^2}$.

مثال (6)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 3 + 4i$

التاريخ / / ٢٠

حاول أن تحل

6 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3 - 4i$

مثال (7)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 - 24i$.

التاريخ   /   /   ٢٠

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة: $\overline{z}+2=5-i$ هو: $z=3+i$ (a) (b)

(2) حل المعادلة: $2z+\overline{z}-3-5i=0$ هو: $z=1-5i$ (a) (b)

(3) مجموعة حل المعادلة: $z^2-4z+5=0$ هي: $\{-2-i, 2+i\}$ (a) (b)

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $-1, 1$ (a) (b)

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z=16+30i$ هما: $z_1=5+3i,\ z_2=-5-3i$ (a) (b)

(6) إذا كان z_1, z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1+z_2=0$ (a) (b)

في التمارين (7—10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة: $2z-5+6i=-3\overline{z}$ هو:

(a) $z=1+6i$ (b) $z=-1+6i$ (c) $z=1-6i$ (d) $z=-1-6i$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2-4z+20=0$ هي:

(a) $\{2-4i, -2-4i\}$ (b) $\{-2+4i, -2-4i\}$

(c) $\{2-4i, -2+4i\}$ (d) $\{2-4i, 2+4i\}$

(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z=33-56i$ هما:

(a) $\begin{cases} z_1=-7-4i \\ z_2=7+4i \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z_1=7-4i \\ z_2=-7+4i \end{cases}$

(c) $\begin{cases} z_1=7+4i \\ z_2=7-4i \end{cases}$ (d) $\begin{cases} z_1=-7-4i \\ z_2=-7+4i \end{cases}$

(10) حل المعادلة $(3-4i)z=5-2i$ هو:

(a) $\frac{5}{3}+\frac{1}{2}i$ (b) $\frac{5}{3}-\frac{1}{2}i$ (c) $\frac{23}{25}+\frac{14}{25}i$ (d) $\frac{23}{25}-\frac{14}{25}i$