١٠ ـ ١

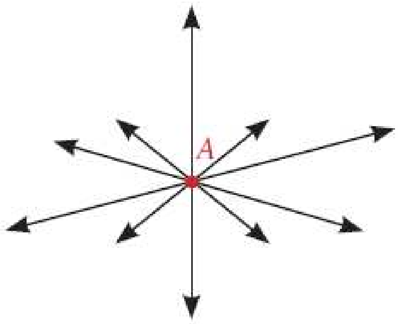
المستقيمات والمستويات في الفضاء

Lines and Planes in Space

مسلمات (موضوعات) الفضاء

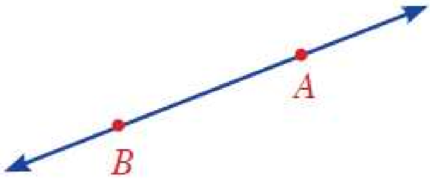
(i) أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد (واحد فقط).

(ii) كل مستقيم يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين.



نقطة واحدة

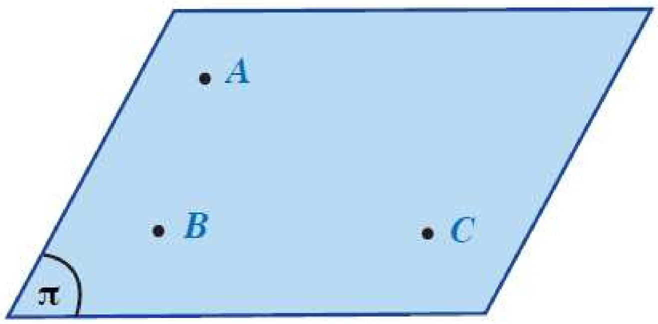
عدد لا نهائي من المستقيمات



نقطتان مختلفتان

مستقيم واحد فقط

(i) في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

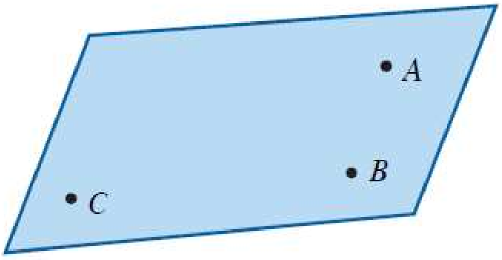


A, B, C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

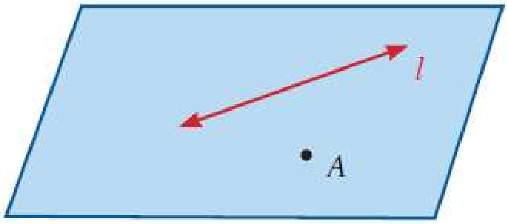
(ii) أي ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يحويها مستوٍ وحيد.

حالات تعيين المستوي في الفضاء

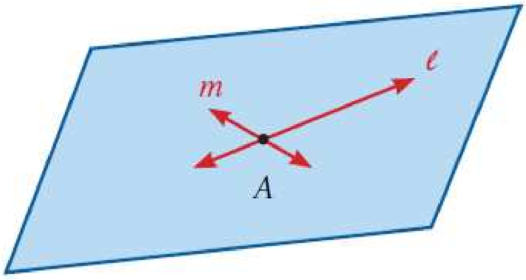
- أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعيّن مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويًا واحدًا فقط.



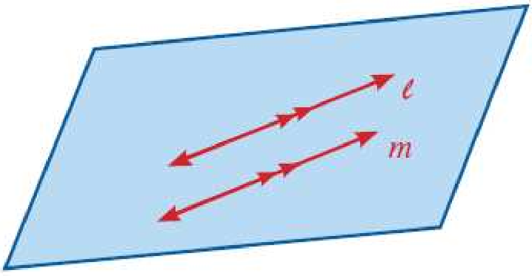
ثلاث نقاط غير مستقيمة



مستقيم ونقطة خارجة عنه

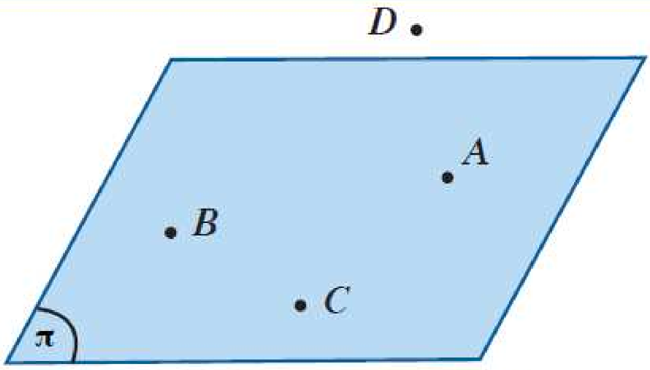


مستقيمان متقاطعان



مستقيمان متوازيان

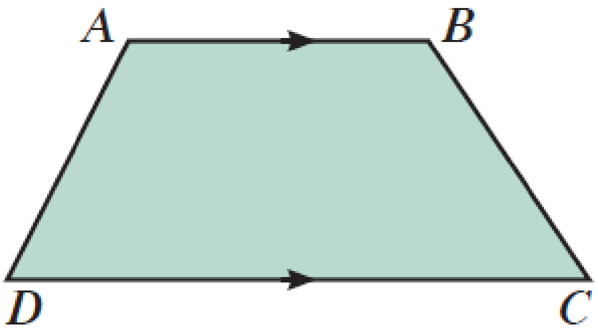
يحوي الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية.



النقاط A, B, C, D لا تقع في مستوٍ واحد

مثال (1)

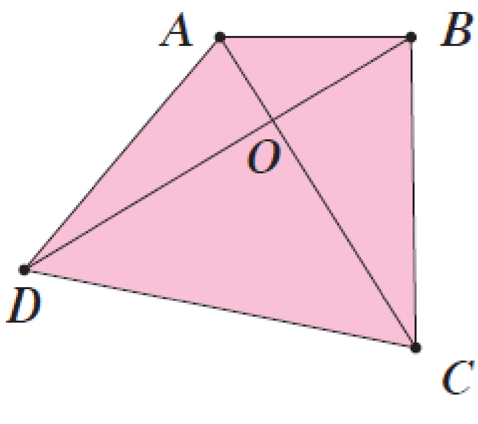
أثبت أن أضلاع أي شبه منحرف تقع جميعها في مستو واحد.



حاول أن تحل

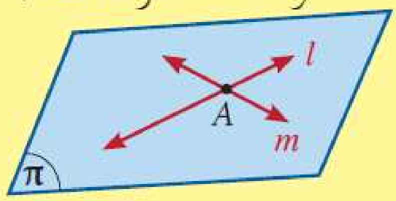
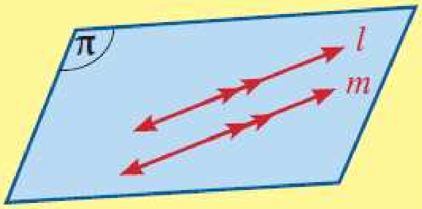
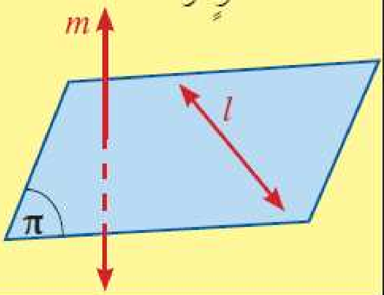
1 في الشكل المقابل $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ يتقاطعان في O

أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.

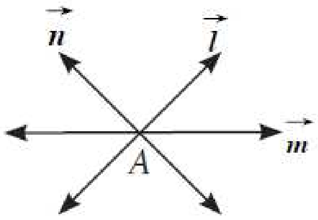


أوضاع المستقيمات في الفضاء

Positions of Lines in Space

a متقاطعان	b متوازيان	c متخالفان
إذا وقعا في مستوٍ واحد وكان بينهما نقطة واحدة مشتركة فقط. 	إذا وقعا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين. 	إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد. 
$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \{A\}$ **مستقيمان متقاطعان**	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ **مستقيمان متوازيان**	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi$, $m \not\subset \pi$ $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$ **مستقيمان متخالفان**

ملاحظات:



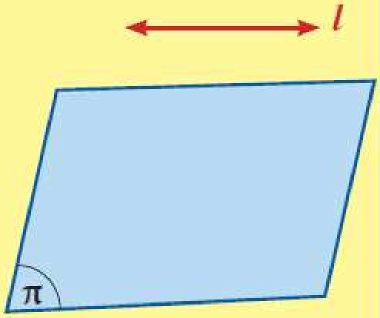
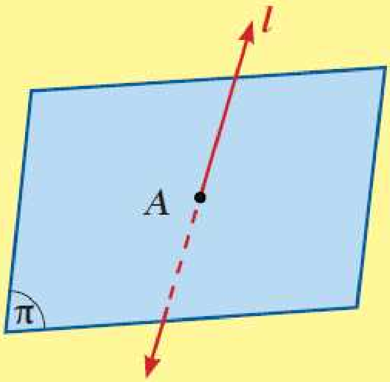
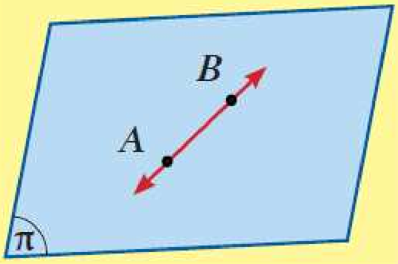
- تتلاقى عدة مستقيمات مختلفة إذا وجدت نقطة وحيدة مشتركة بينها أي أن:

$$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} \cap ... \cap \overleftrightarrow{n} = \{A\}$$

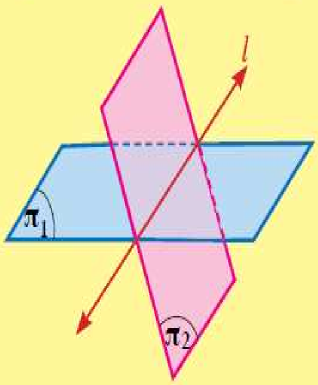
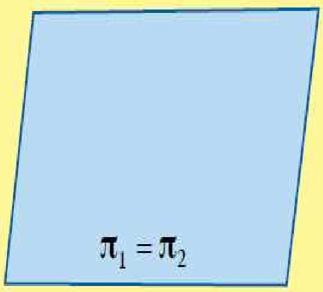
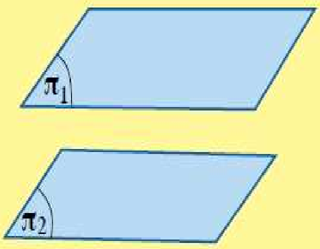
- مستقيمات الفضاء لا يمكن أن تقع جميعها في مستوٍ واحد.
- كل مستقيم يوازي نفسه.

أوضاع مستقيم ومستوٍ في الفضاء Positions of a Line and a Plane in Space

إن معرفة عدد النقاط المشتركة بين مستقيم ومستوٍ في الفضاء تسمح بمعرفة أوضاعهما وهي:

a	b	c
a صفر نقطة مشتركة: المستقيم موازٍ للمستوي (في هذه الحالة يكون البعد بينهما ثابت). 	**b** نقطة مشتركة واحدة: المستقيم يقطع المستوي. 	**c** نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل المستقيم يقع بكامله (بتمامه) في المستوي (المستقيم يوازي المستوي). 
$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \pi$	$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \{A\}$	$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$

أوضاع مستويين في الفضاء

a	b	c
a المستويان متقاطعان في مستقيم. 	**b** المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط). 	**c** المستويان متوازيان (لا توجد نقاط مشتركة بينهما). 
$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$	$\pi_1 = \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$	$\pi_1 \cap \pi_2 = \phi \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$

مثال (2)

إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

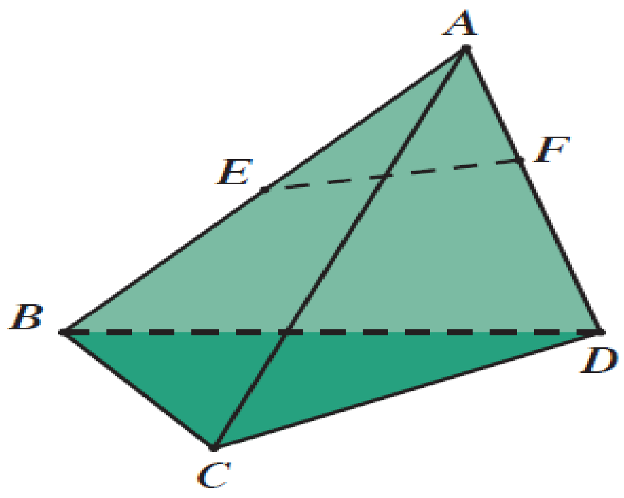
النقطة E تنتمي إلى $\overline{AB}$ ، النقطة F تنتمي إلى $\overline{AD}$.

$\overleftrightarrow{EF}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{BD}$.

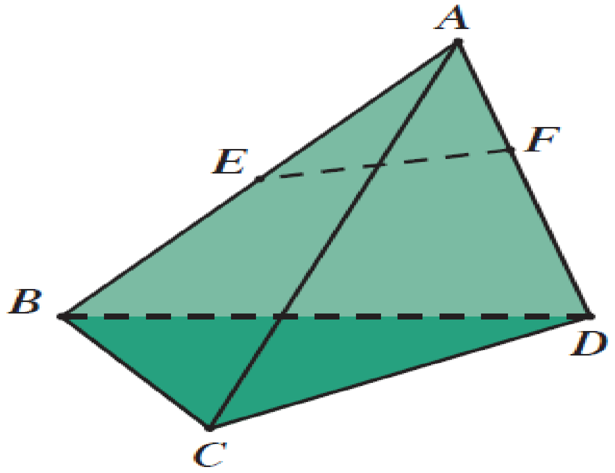
أثبت أن:

a) $\overleftrightarrow{EF} \subseteq (ABD)$

b) $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (ACD)



حاول أن تحل



2 في مثال (2)، أثبت أن $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (BCD).

حاول أن تحل

3 $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{n}$ ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في A.

المستقيم t يقطع المستقيمات الثلاثة في B, C, D على الترتيب.

أثبت أن المستقيمات l , m , n , t تقع في مستوٍ واحد.

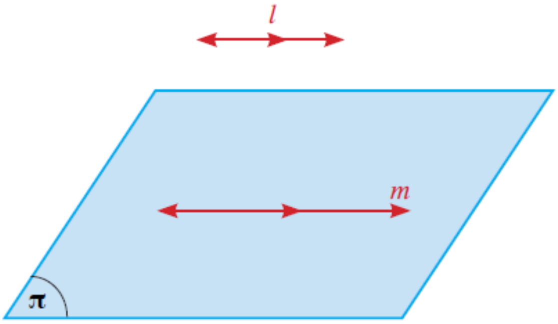
١٠ ـ ٢

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

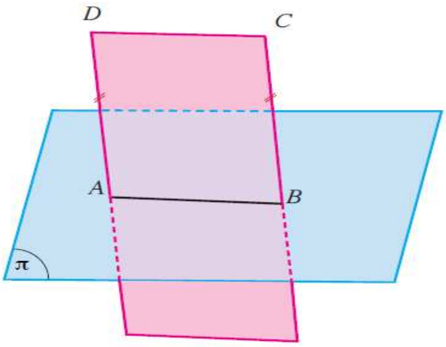
نظرية (1)

إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيمًا في المستوي، فإنه يوازي المستوي.



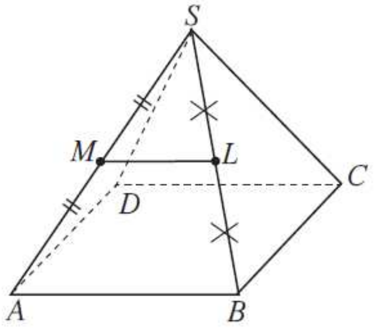
$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$

$\overleftrightarrow{l} \parallel \pi$



في الشكل المقابل: $AD = BC$ ، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

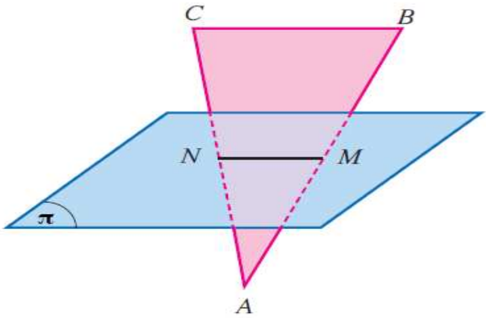


$SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل.

M منتصف $\overline{SA}$، L منتصف $\overline{SB}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML} \parallel (ABCD)$

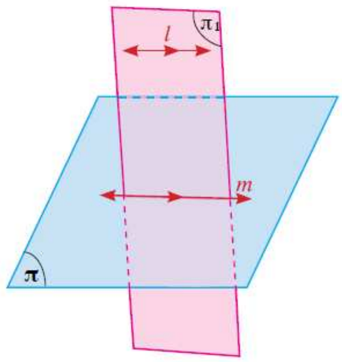
حاول أن تحل



1 في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{AC}$،

M ، N تنتميان إلى المستوي π .

أثبت أن $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$.

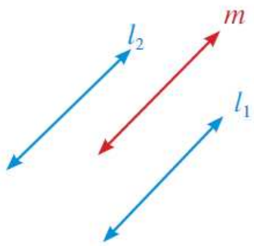


نظرية (2)

إذا وازى مستقيم مستويًا، فكل مستوٍ مار بالمستقيم ويقطع المستوي، يقطعه في مستقيم موازٍ للمستقيم المعلوم.

$\because\ \overleftrightarrow{l} \parallel \pi\ ,\ \overleftrightarrow{l} \subset \pi_1\ ,\ \pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{m}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l}$



نظرية (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.

$\because \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{m}\ ,\ \overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$

ليكن $\pi_2\ ,\ \pi_1$ مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث:

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1\ ,\ \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2$

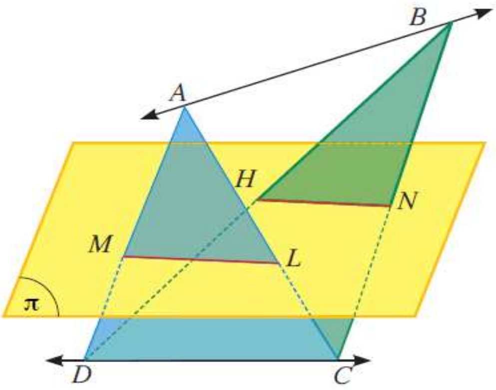
و $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2\ ,\ \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$ABEF$, $ABCD$ متوازيا أضلاع غير مستويين معًا ويتقاطعان في $\overleftrightarrow{AB}$

أثبت أن: $CDFE$ متوازي أضلاع

مثال (2)



في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{CD}$,$\overleftrightarrow{AB}$ متخالفان، $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$.

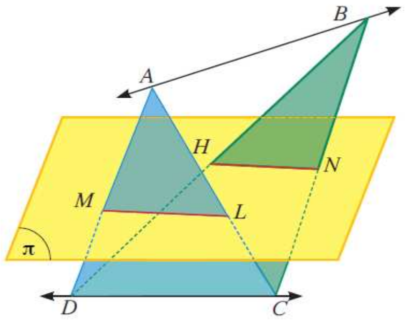
$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L .

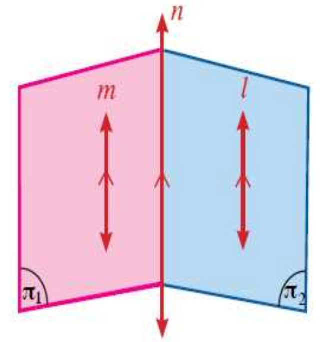
$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N .

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{NH}$

حاول أن تحل

2 في المثال (2)، إذا كان $\pi \parallel \overleftrightarrow{AB}$ فأثبت أن $LMHN$ متوازي أضلاع.





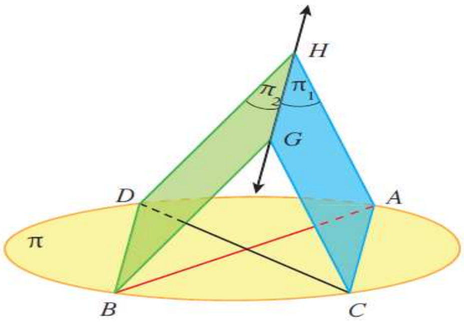
نتيجة (1)

إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان،

فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين.

$$(\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l} \ , \ \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{l} \subset \pi_2 \ , \ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n}) \Rightarrow (\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{n})$$

مثال (3)

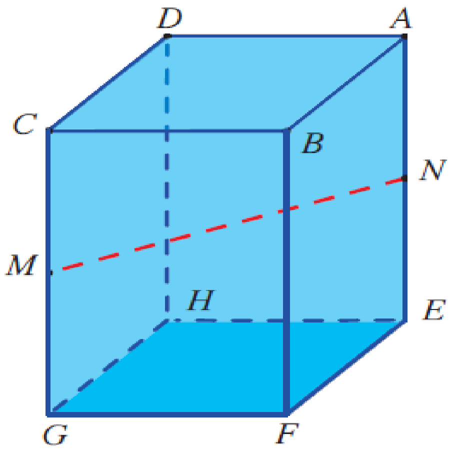


في الشكل المقابل: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π.

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$$

أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$.

حاول أن تحل



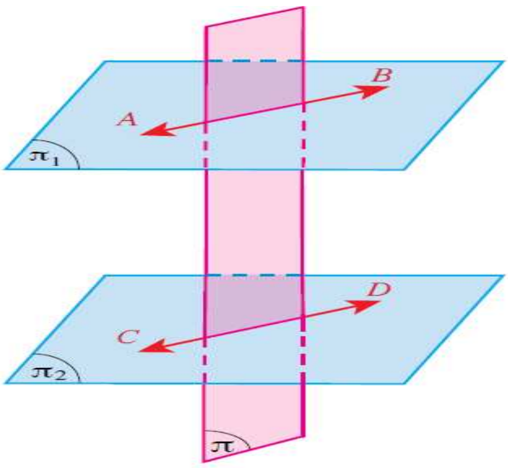
3 $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$.

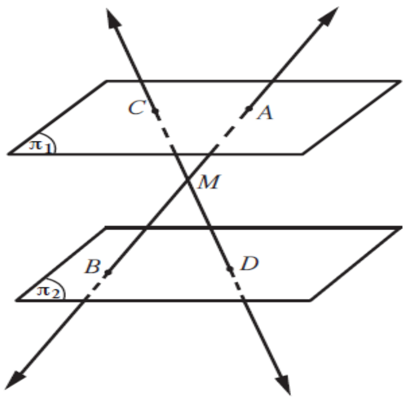
أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$.

نظرية (4)

إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.



$$\pi_1 \parallel \pi_2$$
$$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB}$$
$$\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$$
$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$$

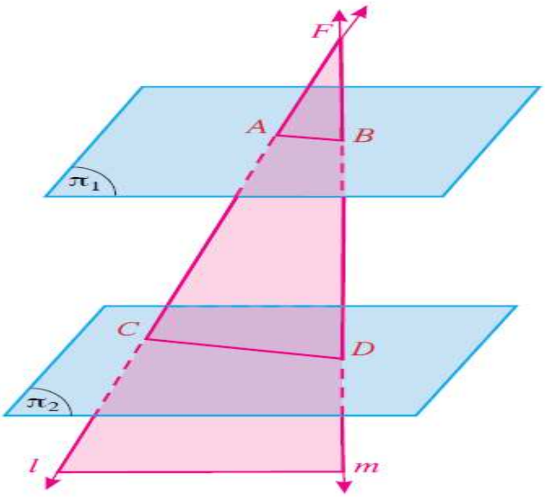


في الشكل المقابل π_1 ،π_2 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،

حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن: $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AC}{BD}$

مثال (4)



في الشكل المقابل: π_2 , π_1 مستويين متوازيين.

$\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{l}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلًّا من π_1 في A, B، π_2 في C, D

إذا كان $BD = 4\,\text{cm}$, $AC = 6\,\text{cm}$, $CD = 9\,\text{cm}$, $FB = 5\,\text{cm}$

فأوجد محيط المثلث FAB

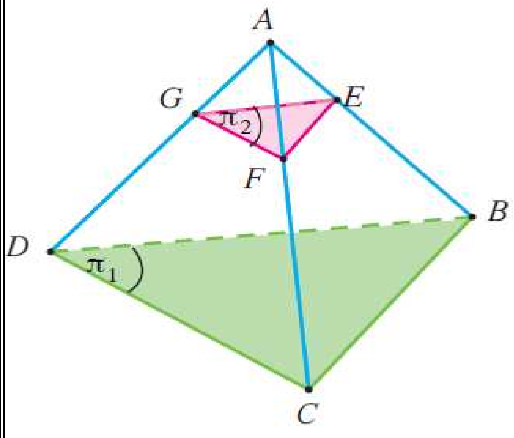
حاول أن تحل

4 في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي.

المستويان π_2 , π_1 متوازيان.

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ، $FG = 6\text{ cm}$

فأوجد DC



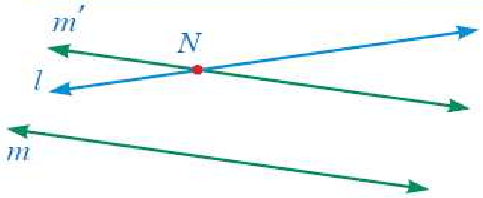
١٠ - ٣

تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line With a Plane

الزاوية بين مستقيمين متخالفين — Angle of Two Skew Lines

الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيمٍ قاطعٍ له وموازٍ للآخر.



$\overleftrightarrow{m}, \overleftrightarrow{l}$ مستقيمان متخالفان في الفضاء.

نأخذ النقطة N على أحد المستقيمين وليكن $\overleftrightarrow{l}$

نرسم $\overleftrightarrow{m'}$ بحيث $\overleftrightarrow{m'}$ يوازي $\overleftrightarrow{m}$ ويمر بالنقطة N

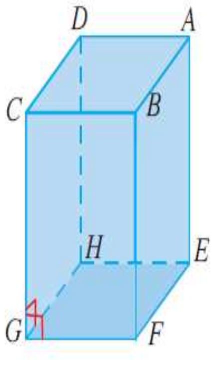
الزاوية بين المستقيمين l, m' هي إحدى الزوايا الناتجة عن تقاطع $\overleftrightarrow{m'}, \overleftrightarrow{l}$

$\hat{N} =$ **الزاوية الحادة** بين المستقيمين l, m

ملاحظة: لا تتأثر الزاوية بتغير موقع النقطة N

تعريف

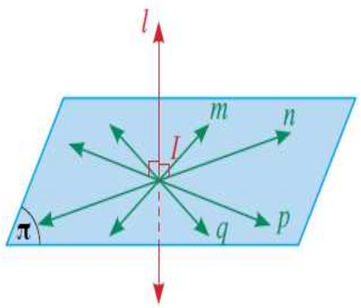
يكون المستقيم l عموديًا على المستوي π إذا كان $\overleftrightarrow{l}$ عموديًا على جميع المستقيمات الواقعة في π ويرمز له بـ : $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$



نظرية (5)

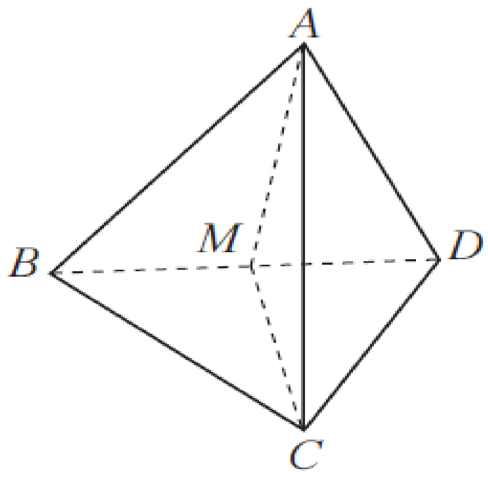
المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًا على مستويهما.

$$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{GF} \cap \overleftrightarrow{GH} = \{G\} \\ \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GF} \ , \ \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH} \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CG} \perp (EFGH)$$



نتيجة (2)

جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواة في مستوٍ واحد عموديًا على المستقيم المعلوم.



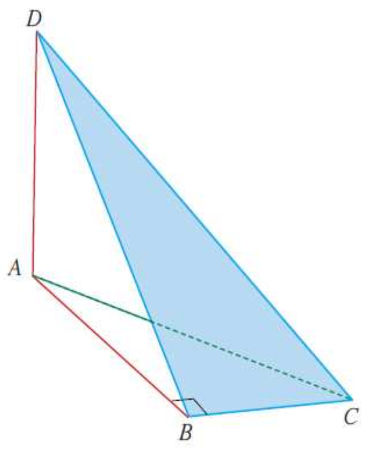
$ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

$AD = AB$ ، $CD = CB$

النقطة M منتصف $\overline{DB}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$

مثال (1)



في الشكل المقابل، المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

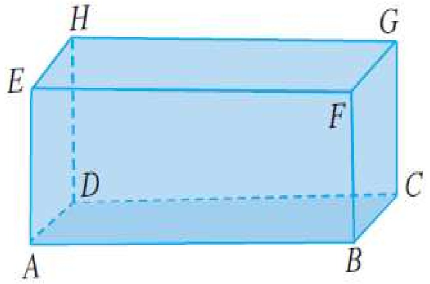
$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$.

أثبت أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$

حاول أن تحل

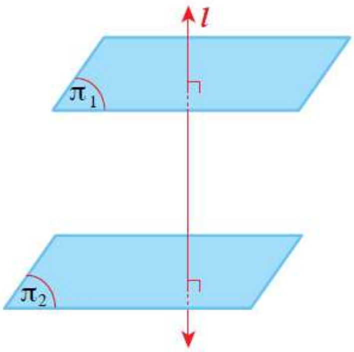
1 في شبه المكعب المقابل،

أثبت أن المثلث BEH قائم في $\hat{E}$.



نظرية (6)

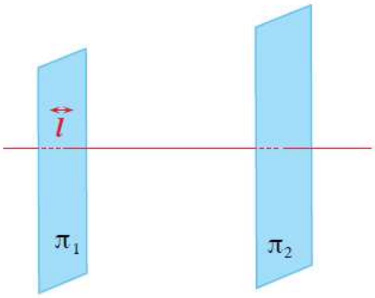
إذا كان مستقيم عموديًّا على كلٍّ من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين.



$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 \implies \pi_1 \parallel \pi_2$$

نظرية (7)

إذا كان مستقيم عموديًّا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديًّا على المستوي الآخر.



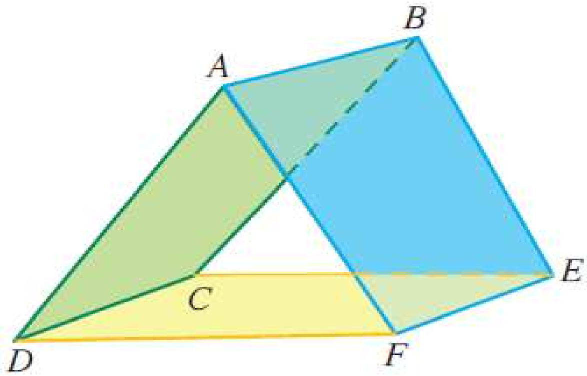
$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \pi_1 \parallel \pi_2 \implies \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$$

حاول أن تحل

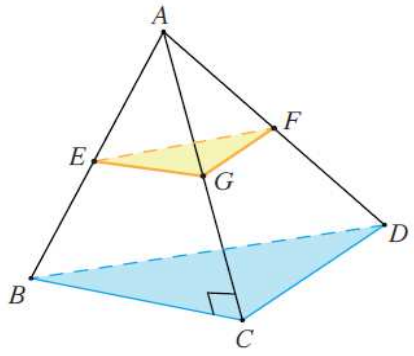
2 في الشكل المقابل:

$ABEF$, $ABCD$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD) \parallel (BEC)$



مثال (2)



في الشكل المقابل:

A نقطة خارج المستوى BCD،

والنقاط E, G, F منتصفات $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ على الترتيب.

إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

وكان $AD = 13\text{ cm}$ ،$AC = 12\text{ cm}$ ،$CD = 5\text{ cm}$

فأثبت أن: $(EGF) \parallel (BCD)$.

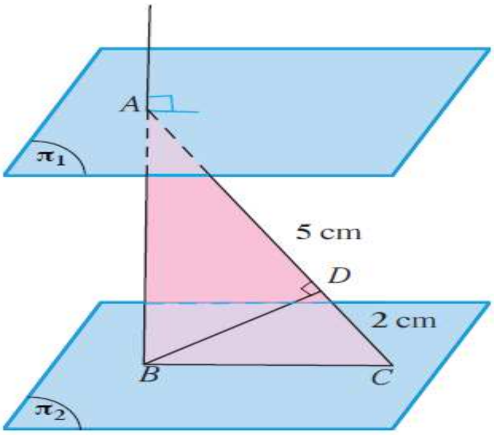
مثال (3)

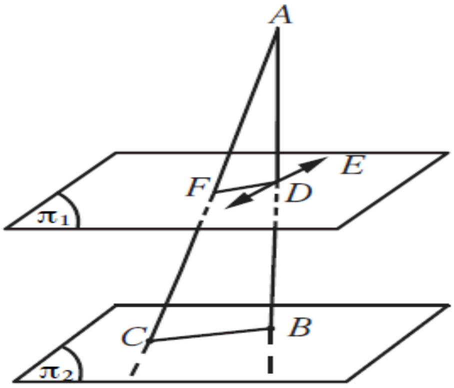
في الشكل المقابل، $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$, $A \in \pi_1$, $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$

رسم: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوي ABC

إذا كان: $AD = 5\text{ cm}$, $DC = 2\text{ cm}$

أوجد: BD





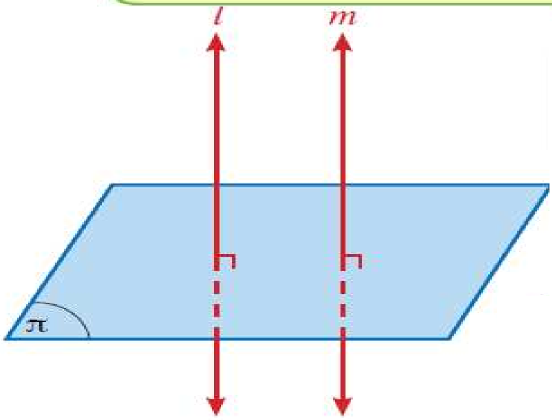
في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على المستوي π_2 , π_1 ⊃ $\overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}$

فإذا كانت D منتصف $\overline{AB}$، F منتصف $\overline{AC}$

أثبت أن: $\pi_1 \parallel \pi_2$

نظرية (8)

المستقيمان العموديان على مستوٍ متوازيان.



$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi \, , \, \overleftrightarrow{m} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$$

حاول أن تحل

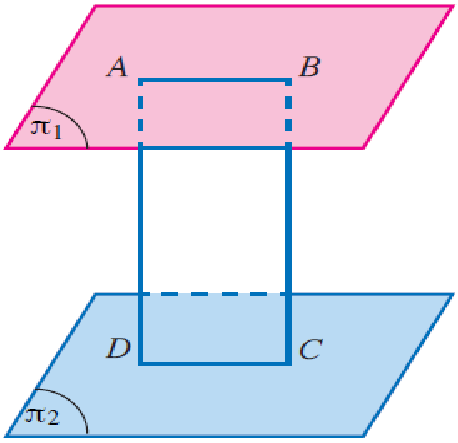
3 في الشكل المقابل: $\pi_1 \parallel \pi_2$

A, B نقطتان في π_1،

C, D نقطتان في π_2 حيث: A, B, C, D في مستوى واحد

$\overline{AD} \perp \pi_2 \quad , \quad \overline{BC} \perp \pi_2$

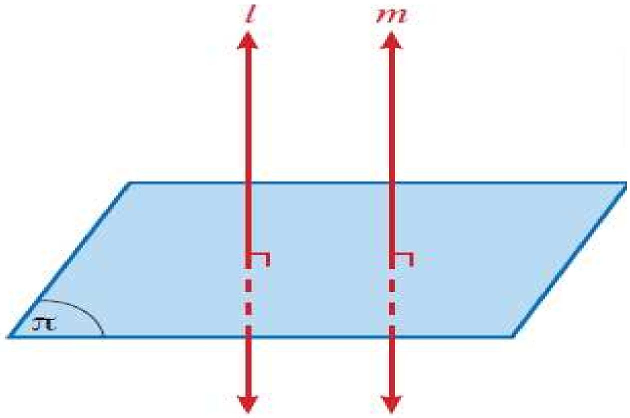
أثبت أن $ABCD$ مستطيل.



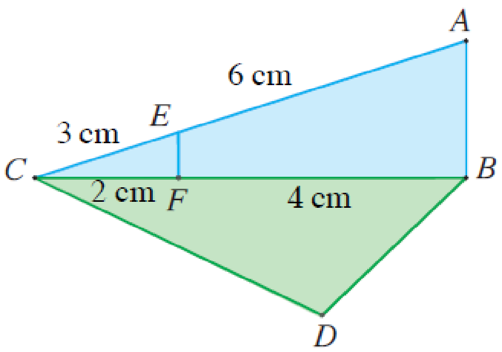
نظرية (9)

إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديًّا على مستوٍ كان المستقيم الآخر عموديًّا على المستوي أيضًا.

$$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$



مثال (4)



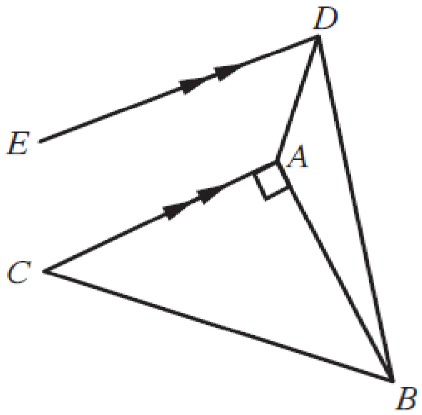
في الشكل المقابل إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$

وكان $CE = 3\,\text{cm}\ ,\ EA = 6\,\text{cm}\ ,\ CF = 2\,\text{cm}\ ,\ FB = 4\,\text{cm}$

أثبت أن: $\overline{EF} \perp \overline{DB}$

ABC مثلث، أخذت النقطة D خارج مستوي المثلث بحيث كان: $\overleftrightarrow{DA}$ عموديًّا على كل من $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AC}$

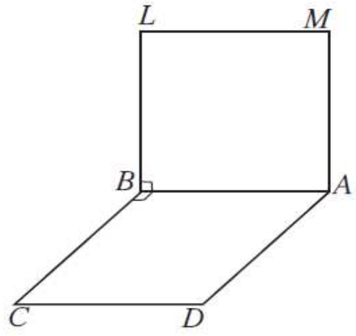
فإذا كانت M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{DB}$، أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$



في الشكل المقابل، ABC مثلث قائم الزاوية في A

رسم $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على مستوي المثلث ABC، ورسم $\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{CA}$

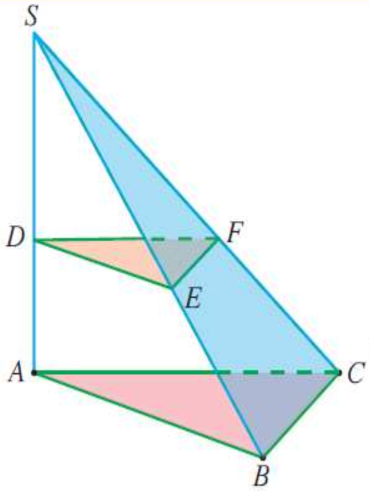
أثبت أن: $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{AB}$



$ABCD$، $ABLM$ مربعان ليسا في مستو واحد، لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$،

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$

حاول أن تحل



4 في الشكل المقابل:

المستويان $(DEF), (ABC)$ متوازيان

$\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$

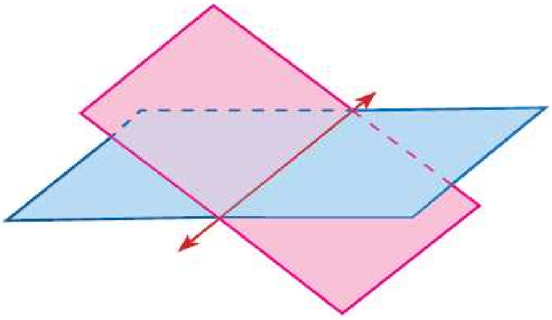
إذا كان: $SE = 5\text{ cm}$, $SD = 3\text{ cm}$, $DA = 2\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$, $AC = 6\text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث DEF

الزاوية الزوجية
The Dihedral Angle

الزاوية بين مستويين (الزاوية الزوجية) The Dihedral Angle

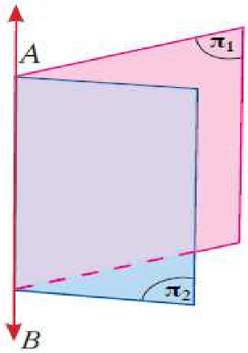
تعلمت أنه إذا تقاطع مستويان مختلفان في الفضاء فإنهما يتقاطعان في مستقيم وينتج من هذا التقاطع أربع زوايا تسمى كل منها **زاوية زوجية**.

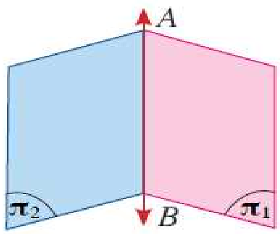


يقسم المستقيم المشترك كل مستوى إلى نصفين ويسمى المستقيم المشترك **حافة الزاوية الزوجية** أو **الفاصل المشترك**.

ويسمى كل من نصفي المستويين وجه الزاوية الزوجية.

يبيّن الشكلان أدناه زاويتين زوجيتين حافة كل منهما $\overleftrightarrow{AB}$



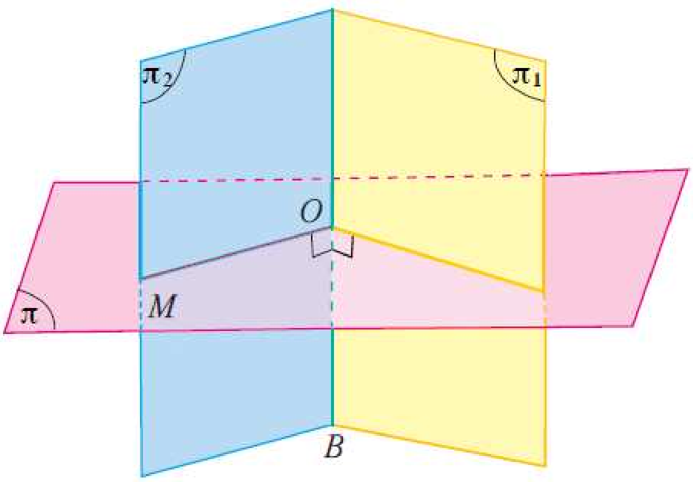


نقرأ الزاوية الزوجية بحافتها فنقول الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$، أو في حال وجود أكثر من زاوية زوجية: $(\pi_1 , \overleftrightarrow{AB} , \pi_2)$

تعريف: الزاوية المستوية لزاوية زوجية

هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستوٍ عمودي على حافتها.

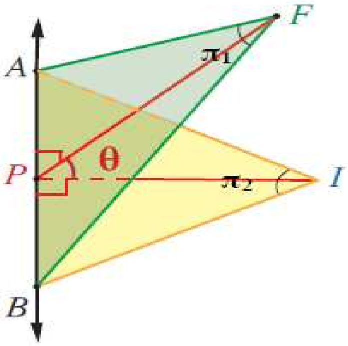
ويكون قياس الزاوية الزوجية هو قياس إحدى زواياها المستوية ودائمًا نأخذ قياس **الزاوية الحادة**.



تدريب (1)

في كل من الأشكال التالية عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجيّة بين المستويين π_1 , π_2

1



$\overline{FP} \perp \overline{AB} \quad , \quad \overline{IP} \perp \overline{AB}$

حافة الزاوية الزوجية ....

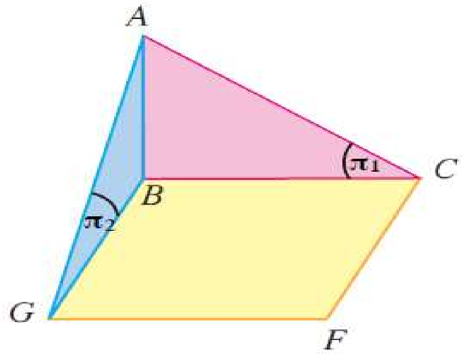
$...... \subset \pi_1 \quad , \quad ..... \perp \overline{AB}$

وكذلك $....... \subset \pi_2 \quad , \quad ...... \perp \overline{AB}$

$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية

للزاوية الزوجية بين π_1 , π_2

2



$\overline{AB} \perp (CBGF)$

حافة الزاوية الزوجية ....

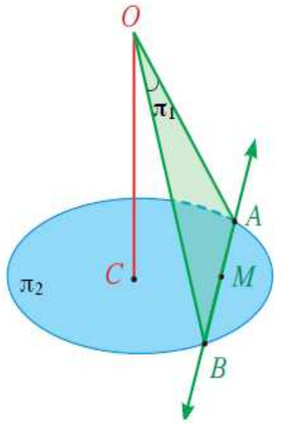
$\overline{BC} \subset \pi_1 \quad , \quad ...... \perp \overline{AB}$

وكذلك $........ \subset \pi_2 \quad , \quad .... \perp \overline{AB}$

$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية

للزاوية الزوجية بين π_1 , π_2

3



M منتصف $\overline{AB}$، $\overline{OC} \perp \pi_2$

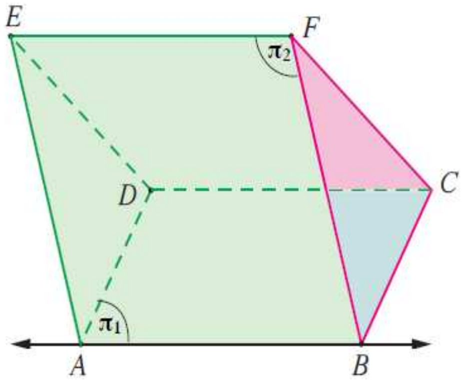
....

....

....

....

4



$ABCD$ مستطيل، $\overleftrightarrow{FC} \perp (ABCD)$

....

....

....

....

مثال (2)

في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$DB = 5\text{ cm}$ ، $AB = 10\text{ cm}$ ، $m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{6}$

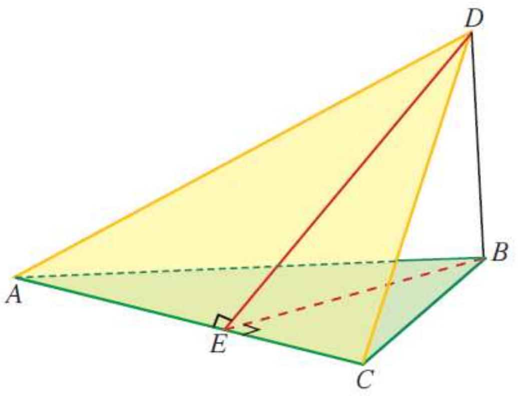
$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ،$\overline{DE} \perp \overline{AC}$

أوجد:

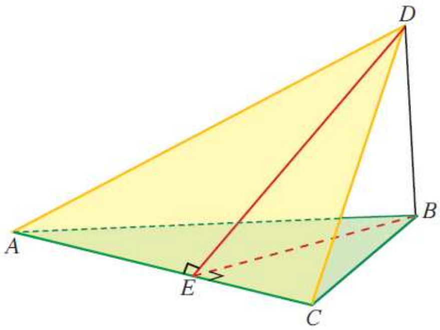
a BE , DE

b قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC

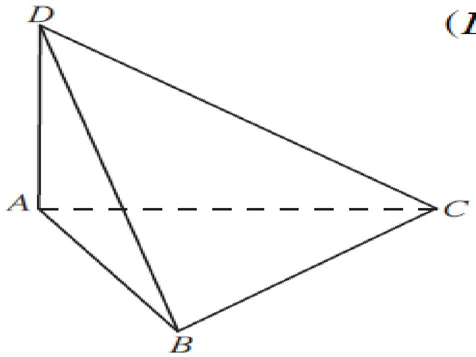


حاول أن تحل

2 في المثال (2)، أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC ، DAC إذا كان $m(\widehat{BAC}) = 45^{\circ}$.



(D

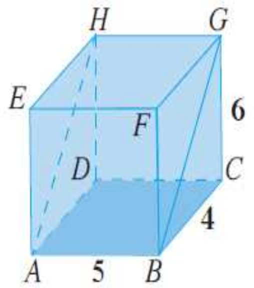


ABC مثلث متطابق الأضلاع.

$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC

أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$

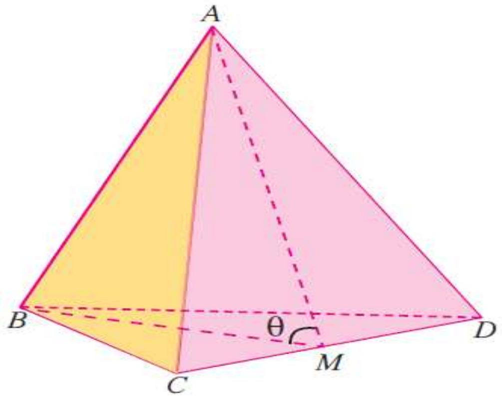
حاول أن تحل



1 في شبه المكعب المقابل، أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين $(ABCD)$, $(ABGH)$، ثم أوجد قياسها.

يبيّن الشكل المقابل هرمًا ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm

M منتصف $\overline{DC}$



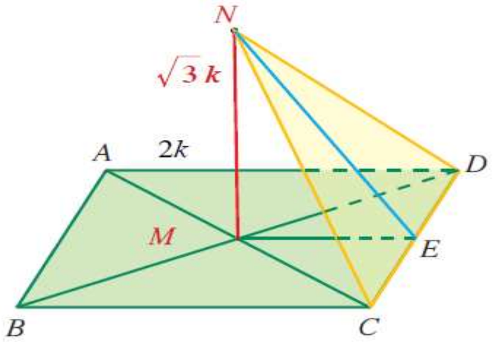
a حدد الزاوية المستوية بين المستويين ADC , BDC

b أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{NM}$ عموداً على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}k$

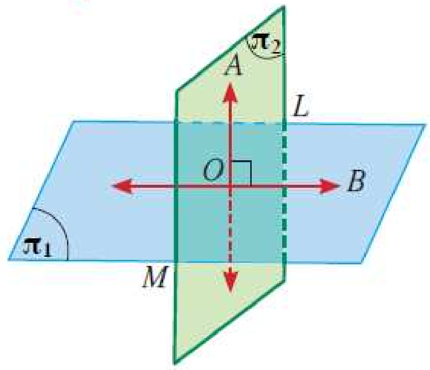
أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NCD



المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

Perpendicular Planes المستويات المتعامدة

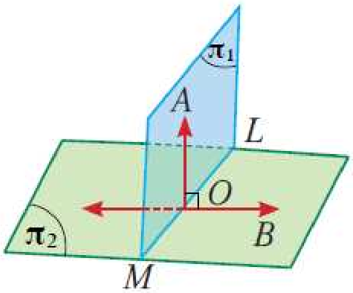


يكون المستويان متعامدين إذا كانت الزاوية المستوية بينهما زاوية قائمة أي أن قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $90°$.

في المستوي π_1: $\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{LM}$

في المستوي π_2: $\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{LM}$

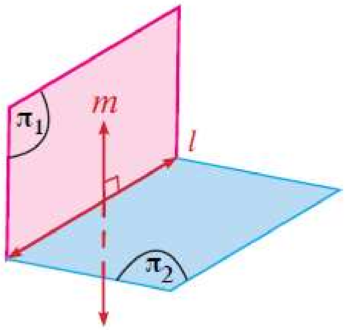
$\therefore$ $\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{OB}$ فإن المستويين متعامدان.



نظرية (10)

إذا كان مستقيم عموديًا على مستوٍ، فكل مستوٍ يمر بذلك المستقيم يكون عموديًا على المستوي.

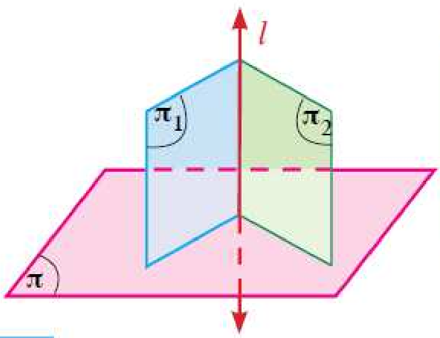
$$\overleftrightarrow{OA} \perp \pi_2 \ , \ \overleftrightarrow{OA} \subset \pi_1 \implies \pi_1 \perp \pi_2$$



نتيجة (3)

إذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط تقاطعهما فإنه يكون عموديًا على المستوي الآخر.

$$\pi_1 \perp \pi_2 \ , \ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l} \ , \ \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 \ , \overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{l} \implies \overleftrightarrow{m} \perp \pi_2$$



نتيجة (4)

إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودي على مستوٍ ثالث فإن خط تقاطع المستويين يكون عموديًا على هذا المستوي الثالث.

$$\pi_1 \perp \pi \ , \ \pi_2 \perp \pi \ , \ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l} \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \pi$$

حاول أن تحل

1 في الشكل المقابل، C دائرة مركزها O، $\overline{AB}$ قطر.

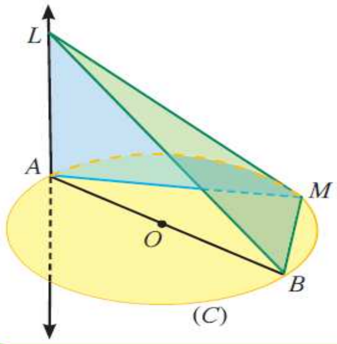
M نقطة تنتمي إلى الدائرة.

$\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوي الدائرة.

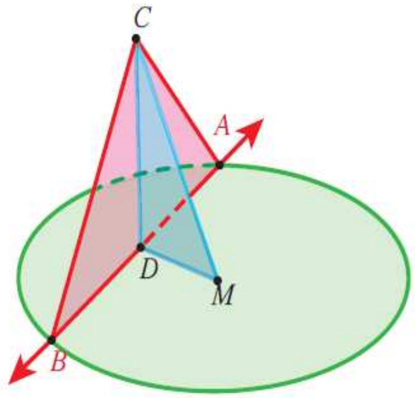
أثبت أن:

a $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$

b $(LBM) \perp (LAM)$



مثال (1)



في الشكل المقابل: C نقطة خارج مستوى الدائرة التي مركزها M، D منتصف $\overline{AB}$

ABC مثلث فيه $CA = CB$. إذا كان $MC = \sqrt{50}$ cm , $DM = DC = 5$ cm

أثبت أن:

a $\overline{MC} \perp \overline{AB}$

b مستوي الدائرة $\perp (ACB)$

الحل:

مثال (2)

A , B , C, D أربع نقاط ليست مستوية معًا.

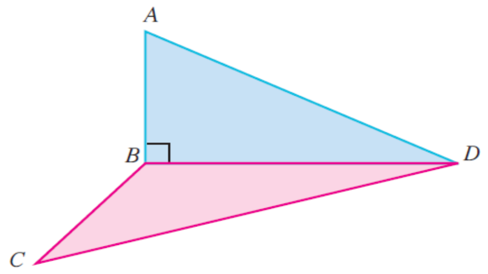
إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

وكان $(AD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2$

أثبت أن:

a) $\overline{BC} \perp \overline{DC}$

b) $(ABD) \perp (CBD)$



حاول أن تحل

2 في شبه المكعب $ABCDEFGH$ المقابل:

$\overleftrightarrow{l}$ مستقيم في $(EFGH)$ يمر في F.

$\overline{AK} \perp \overleftrightarrow{l}$

أثبت أن:

a $\overline{EK} \perp \overleftrightarrow{l}$

b $(FDK) \perp (AEK)$