تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الكويتية

almanahj.com/kw

موقع المناهج الكويتية

عمرو فايز

الملف الرياضيات المراجعة النهائية
موقع المناهج ⇦ ملفات الكويت التعليمية ⇦ الصف الثاني عشر العلمي ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني

روابط مواقع التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر العلمي

روابط مواد الصف الثاني عشر العلمي على تلغرام

التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر العلمي والمادة رياضيات في الفصل الثاني

1	كراسة متابعة تعليمية علمي
2	حاول ان تحل
3	نموذج اجابة امتحان 2015 2016
4	نموذج اجابة اسئلة العام الدراسي 2015 2016
5	الوحدة 8 احصاء 12علمي

الأفضل للمراجعة
والتفوق

Fayez

الرياضيات

بعد قرار التخفيف

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

للصف الثاني عشر

المراجعة النهائية

أقوى مراجعة لضمان الدرجة النهائية

حلول دقيقة
حلول واضحة ومقترحة لأسئلة متوقعة

مذكرات شاملة
مذكرات منظمة تغطي نقاط الاختبار الأساسية

حصص مراجعة
شرح أهم الأفكار وحل نماذج امتحانات سابقة

مراجعة مركزة
تلخيص شامل لجميع الوحدات بشكل مبسط

بث مباشر + حصص المراجعة مسجلة + مذكرات محلولة وغير محلولة

للحجز والاستفسار (واتساب):
99421329

أ/عمرو فايز

راجع صح ... وادخل الامتحان وانت واثق،
بإذن الله

12

$y = ax^2 + bx + c$

$x^2 + y^2 = z^2$

❖ $\int (x-2)(2x+3)\,dx$

الحل

$$\int (x-2)(2x+3)\,dx$$

$$= \int (2x^2+3x-4x-6)\,dx$$

$$= \int (2x^2-x-6)\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + c$$

❖ $\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}\,dx$

الحل

$$\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}\,dx = \int \frac{(x-1)\,(x-3)}{(x-1)}\,dx$$

$$= \int (x-3)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 3x + c$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

❖ $\int \frac{x^4-27x}{x^2-3x}\,dx$

الحل

$$\int \frac{\cancel{x}\,(x^3-27)}{\cancel{x}\,(x^3-27)}\,dx$$

$$= \int \frac{(x^3-27)}{(x^3-27)}\,dx$$

$$= \int \frac{\cancel{(x-3)}\,(x^2+3x+9)}{\cancel{x-3}}\,dx$$

$$= \int (x^2+3x+9)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x + c$$

❖ $\int \left(\frac{3x^2-x}{x}\right)\,dx$

الحل

$$\int \left(\frac{3x^2-x}{x}\right)^2 dx = \int \left(\frac{x\,(3x-1)}{x}\right)^2 dx$$

$$= \int (3x-1)^2\,dx$$

$$= \int (9x^2-6x+1)\,dx$$

$$= 3x^3 - 3x^2 + x + c$$

❖ $\int \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right) dx$

الحل

$$\int \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right) dx$$

$$= \int (1 - 2x^{-2})\, dx$$

$$= x - \frac{2x^{-1}}{-1} + c$$

$$= x + \frac{2}{x} + c$$

❖ $\int \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) dx$

الحل

$$\int (x^3 - x^{-3})\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2x^2} + c$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

❖ $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$

الحل

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$= \int \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}-1)}{\cancel{x-1}} dx$$

$$= \int (\sqrt{x}-1)\, dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right) dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + c$$

❖ $\int \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{x}} dx$

الحل

$$\int \left(\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3x}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}\right) dx$$

$$= \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} - 3 \cdot \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} - \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$$

❖ $\int (x^2-2x)(x^3-3x^2+4)^5 dx$

الحل

$$u = x^3-3x^2+4$$
$$du = (3x^2-6x)dx$$
$$\frac{1}{3}du = (x^2-2x)dx$$
$$\therefore \int u^5 \cdot \frac{1}{3}de = \frac{1}{3}\int u^5 du$$
$$= \frac{1}{3\times 6}u^6 + c = \frac{1}{18}u^6 + c$$
$$= \frac{1}{18}\int (x^3-3x^2+4)^6 + c$$

❖ $\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\, dx$

الحل

$$u = x^2+4x-1$$
$$du = (2x+4)dx$$
$$\frac{1}{2}du = (x+2)dx$$
$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}dx = \int u^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}du\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}du$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}\right] + C$$
$$\therefore \int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}dx = \frac{3}{8}(x^2+4x-1)^{\frac{4}{3}} + C$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

❖ $\int \frac{5}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^3} dx$

الحل

$$u = \sqrt{x}+2$$
$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$
$$2du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$
$$\int \frac{5}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^3}dx = \int \frac{5}{u^3}(2du)$$
$$= \int \frac{10\,du}{u^3} = 10\int u^{-3}du$$
$$= -5\,u^{-2} + c$$
$$= \frac{-5}{(\sqrt{x}+2)^2} + c$$

❖ $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+3\right)^4}{x^2} dx$

الحل

$$u = \frac{1}{x}+3$$
$$du = -\frac{1}{x^2}dx \Rightarrow -du = \frac{1}{x^2}dx$$
$$\int \frac{\left(\frac{1}{x}+3\right)^4}{x^2}dx = \int -u^4 du$$
$$= -\frac{u^5}{5} + c$$
$$= -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x}+3\right)^5 + c$$

❖ $\int \sqrt{4x-5}\,dx$

الحل

$$\int \sqrt{4x-5}\,dx = \int (4x-5)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$u = 4x - 5$

$du = 4\,dx$

$\frac{1}{4}\,du = dx$

$$\int \sqrt{4x-5}\,dx = \int u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{u^3} + c$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{(4x-5)^3} + c$$

❖ $\int \frac{5}{x^2\left(\frac{1}{x}+2\right)^5}\,dx$

الحل

$u = \frac{1}{x} + 2$

$du = -\frac{1}{x^2}dx \Rightarrow -du = \frac{1}{x^2}dx$

$$\int \frac{1}{x^2\left(\frac{1}{x}+2\right)^5}dx = -\int \frac{\left(\frac{1}{x}+2\right)^{-5}}{-x^2}dx$$

$$= -\int u^{-5}du$$

$$= -\left[\frac{u^{-4}}{-4} + C_1\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{u^4} + C_1\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+2\right)^4} + C_1\right] = \frac{1}{4\left(\frac{1}{x}+2\right)^4} + C$$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

❖ $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}\,dx$

الحل

$$\int (2-3x)^{-\frac{1}{3}}\,du$$

$u = 2 - 3x$

$du = -3dx$

$-\frac{1}{3}\,du = dx$

$$\int u^{-\frac{1}{3}} \cdot -\frac{1}{3}\,du$$

$$= -\frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{3}}\,du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}\,u^{\frac{4}{3}} + c$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt[3]{u^4} + c$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(2-3x)^4 + c}$$

❖ $\int x\,(3x+2)^6\,dx$

الحل

$u = 3x + 2$

$u - 2 = 3X$

$\frac{u-2}{3} = x$

$du = 3dx$

$\frac{1}{3}du = dx$

$$\int \left(\frac{u-2}{3}\right)u^6\,\frac{1}{3}du$$

$$\frac{1}{9}\int (u-2)u^6du = \frac{1}{9}\int (u^7 - 2u^6)du$$

$$\frac{1}{9}\left[\frac{1}{8}u^8 - \frac{2}{7}u^7\right] + C$$

$$\frac{1}{72}u^8 - \frac{2}{63}u^7 + c$$

$$\frac{1}{72}(3x+2)^8 - \frac{2}{83}(3x+2)^7 + c$$

❖ $\int x^3 \sqrt{x^2-2}\, dx$

الحل

بفرض $u = x^2 - 2 \longrightarrow x^2 = u + 2$

$\therefore du = 2xdx \longrightarrow xdx = \frac{1}{2}\, du$

$$\int x^3 \sqrt{x^2-2}\, dx = \int \sqrt{x^2-2}\ .x^2 \,.(xdx)$$

$$\int \sqrt{u}\ .(u+2)\,.\frac{1}{2}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\ (u+2)\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{3}{2}} + 2\,u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\, u^{\frac{5}{2}} + 2 \times \frac{2}{3}\, u^{\frac{3}{2}}\right) + c$$

تعويض $= \frac{1}{5}\, u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}\, u^{\frac{3}{2}} + c$

$$= \frac{1}{5}\,(x^2-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}\,(x^2-2)^{\frac{3}{2}} + c$$

❖ $\int x\,(x+1)^5 dx$

الحل

$$u = x+1 \Rightarrow x = u-1$$

$$du = dx$$

$$\int x\,(x+1)^5\, dx = \int (u-1)\, u^5\, du$$

$$= \int \left(u^6 - u^5\right)\, du$$

$$= \frac{u^7}{7} - \frac{u^6}{6} + c$$

$$= \frac{(x+1)^7}{7} - \frac{(x+1)^6}{6} + c$$

❖ $\int \sqrt[5]{(3x+7)}\, dx$

الحل

$$\int \sqrt[5]{(3x+7)}dx = \int (3x+7)^{\frac{1}{5}}dx$$

$u = 3x + 7$

$du = \frac{1}{3}dx$

$3du = dx$

$$\int \sqrt[5]{(3x+7)}dx = \int u^{\frac{1}{5}}\, 3du$$

$$= 3\int u^{\frac{1}{5}}\, du$$

$$= 3 \cdot \frac{5}{6} u^{\frac{6}{5}} + c$$

$$= \frac{15}{6}\sqrt[5]{u^6} + c = \frac{15}{6}\sqrt[5]{(3x+7)^6} + c$$

❖ $\int x^2 \sqrt{x-1}\, dx$

الحل

$u = x - 1 \longrightarrow x = u + 1$

$du = dx$

$$\therefore \int x^2\sqrt{x-1}dx = \int (u+1)^2\sqrt{u}\, du$$

$$= \int (u^2 + 2u + 1)\cdot u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \int \left(u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \left(\frac{2}{7}\right) u^{\frac{7}{2}} + 2\left(\frac{2}{5}\right) u^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{2}{3}\right) u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{7}(x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

❖ $\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1}\, dx$

الحل

$$\int x^3 x^2 (x^3+1)^{\frac{1}{3}} dx$$

$$u = x^3 + 1 \Rightarrow u - 1 = x^3$$

$$du = 3x^2 dx$$

$$\frac{1}{3} du = x^2 dx$$

$$\int (u-1)u^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} du$$

$$\frac{1}{3}\int \left(u^{\frac{4}{3}} - u^{\frac{1}{3}}\right) du$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{3}{7}u^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}\right] + c$$

$$\frac{1}{7}u^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{4}u^{\frac{4}{3}} + c$$

$$\frac{1}{7}(x^3+1)^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{4}(x^3+1)^{\frac{4}{3}} + c$$

❖ $\int x(2x-1)^3 \ dx$

الحل

$$u = 2x - 1 \qquad u + 1 = 2x$$

$$\frac{u+1}{2} = x$$

$$du = 2dx \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} de = dx$$

$$\int \left(\frac{u+1}{2}\right) u^3 \frac{1}{2} du$$

$$\frac{1}{4}\int (u+1)\cdot u^3 du = \frac{1}{4}\int (u^4 + u^3) du$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4}\Bigg] + c$$

$$= \frac{1}{20}u^5 + \frac{1}{16}u^4 + c$$

$$= \frac{1}{20}(2x-1)^5 + \frac{1}{16}(2x-1)^4 + c$$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

❖ $\int_{-1}^{1} (x^2+2x-3)^2 (x+1)\, dx$

الحل

$$u = x^2 + 2x - 3$$

$$du = (2x+2)\, dx \Rightarrow \frac{1}{2} du = (x+1)\, dx$$

عندما $x = -1$ فإن $u = -4$

عندما $x = 1$ فإن $u = 0$

$$\int_{-1}^{1} (x^2+2x-3)^2 (x+1)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^{0} u^2\, du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-4}^{0} = \frac{1}{2}\left[0 + \frac{64}{3}\right]$$

$$= \frac{32}{3}$$

❖ $\int \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\, dx$

الحل

$$u = 1 + 3x \qquad \frac{u-1}{3} = x$$

$$du = 3dx \qquad \frac{1}{3} du = dx$$

$$\int x(1+3x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\int \left(\frac{u-1}{3}\right)(u)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} du$$

$$\frac{1}{9}\int (u-1)u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{9}\int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right) dx$$

$$\frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{1}u^{\frac{1}{2}}\right] + c = \frac{2}{27}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}u^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\frac{2}{27}(1+3x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}(1+3x)^{\frac{1}{2}} + c$$

❖ $\int \cos^3(2x-3)\,.\sin(2x-3)\,dx$

الحل

$u = \cos(2x-3)$

$du = -2\sin(2x-3)\ dx$

$-\frac{1}{2}\,du = \sin(2x-3)\ dx$

$\therefore \int \cos^3(2x-3)\,.\sin(2x-3)\,dx$

$= -\frac{1}{2}\int u^3\ du$

$= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}u^4 + c$

$= -\frac{1}{8}\cos^4(2x-3) + c$

❖ $\int_1^e \frac{ln^6 x}{x}\ dx$

الحل

$u = ln\ x \qquad du = \frac{1}{x}dx$

$x = 1 \qquad u = ln\,(1) = 0$

$x = e \qquad u = ln\,(e) = 1$

$\therefore \int_0^1 u^6 du = \left[\frac{1}{7}u^7\right]_0^1$

$= \frac{1}{7}(1)^7 - \frac{1}{7}(0)^7$

$= \frac{1}{7}$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

❖ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan\,x\,.sec^2\,x\,dx$

الحل

$u = tan\,x$

$du = sec^2 x\,dx$

عندما $x = 0$ فإن $u = tan0 = 0$

عندما $x = \frac{\pi}{4}$ فإن $u = tan\,\frac{\pi}{4} = 1$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan\,x\,.sec^2\,x\,dx = \int_0^1 u\ du$

$= \left[\frac{1}{2}\,u^2\right]_0^1$

$= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

❖ $\int x^5\sqrt{4-x^2}\,dx$

الحل

$u = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - u$

$du = -2xdx \Rightarrow \frac{-1}{2}du = xdx$

$\int x^5\sqrt{4-x^2}dx = \int \sqrt{4-x^2}\cdot(x^2)^2(xdx)$

$= \int \sqrt{u}(4-u)^2\left(\frac{-1}{2}du\right)$

$= \int \frac{-1}{2}\sqrt{u}(16 - 8u + u^2)du$

$= \int \left(-8u^{\frac{1}{2}} + 4u^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}u^{\frac{5}{2}}\right)du$

$= \frac{-8}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}} + \frac{4u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}u^{\frac{7}{2}} + C$

$= \frac{-16}{3}u^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}u^{\frac{7}{2}} + C$

$= \frac{-16}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}(4-x^2)^{\frac{7}{2}} + C$

❖ $\int \sqrt{1+\sin x}\, \cos x\, dx$

الحل

$$\int (1+\sin x)^{\frac{1}{2}} \cos x\, dx$$

$$u = 1 + \sin x$$

$$du = \cos x\, dx$$

$$\int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{u^3} + c$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(1+\sin x)^3} + c$$

❖ $\int csc^5 x\, cotx\, dx$

الحل

$$u = \csc x$$

$$du = -\csc x\, cotx\, dx$$

$$-du = \csc x\, cotx\, dx$$

$$\int csc^5 x\, cotx\, dx = \int csc^4 x \,.\, cscxcotx\, dx =$$

$$= -\int u^4 \,.\, du$$

$$= \frac{-u^5}{5} + c$$

$$= \frac{-csc^5 x}{5} + c$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

❖ $\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x\, dx$

الحل

$$u = 3 + \sin 2x$$

$$du = 2\cos 2x\, dx$$

$$\frac{1}{2} du = \cos 2x\, dx$$

$$= \int u^5 \left(\frac{1}{2} du\right) = \frac{1}{2}\int u^5\, du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} u^6 + c = \frac{1}{12} u^6 + c$$

$$= \frac{1}{12}(3+\sin 2x)^6 + c$$

❖ $\int x^2 \,.\, \sin(x^3 - 1)\, dx$

الحل

$$u = x^3 - 1$$

$$du = 3x^2\, dx$$

$$\frac{1}{3} du = x^2\, dx$$

$$\frac{1}{3}\int \sin(u)\, du$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(u) + c$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(x^3 - 1) + c$$

❖ $\int \sin^5(x+1)\,.\cos(x+1)\,dx$

الحل

$u = \sin(x+1)$

$du = \cos(x+1)\ dx$

$\int \sin^5(x+1)\,.\cos(x+1)\,dx$

$= \int u^5\ du$

$= \frac{u^6}{6} + c$

$= \frac{1}{6}\left(\sin^6(x+1)\right) + c$

❖ $\int \sec^4 x \tan x\, dx$

الحل

$u = \sec x$

$du = \sec x \tan x\, dx$

$\int \sec^3 x \sec x \tan x\, dx$

$\int u^3\ du = \frac{1}{4}u^4 + c$

$= \frac{1}{4}\sec^4 x + c$

❖ $\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}$

الحل

$\int (1+\tan x)^{\frac{-1}{2}}\ .\ \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$

$= \int (1+\tan x)^{\frac{-1}{2}}\ .\ \sec^2 x\, dx$

$u = 1 + \tan x$

$du = \sec^2 x\, dx$

$= \int u^{\frac{-1}{2}}\ du$

$= 2\,u^{\frac{1}{2}} + c$

$= 2\,(1+\tan x)^{\frac{1}{2}} + c$

$= 2\sqrt{1+\tan x} + c$

❖ $\int x^3\,.\cos(x^4+5)\ dx$

الحل

$u = x^4 + 5$

$du = 4x^3\ dx$

$\frac{1}{4}du = x^3\ dx$

$\int \cos(u)\ .\frac{1}{4}\ du$

$\frac{1}{4}\int \cos(u)\ du = \frac{1}{4}\sin(u) + c$

$= \frac{1}{4}\sin(x^4+5) + c$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

❖ $\int (x+1)\, e^{x^2+2x+3}\, dx$

الحل

$u = x^2 + 2x + 3$

$du = (2x+2)\, dx$

$\frac{1}{2} du = (x+1)\, dx$

$\int (x+1)\, e^{x^2+2x+3}\, dx = \frac{1}{2} \int e^u\, du$

$= \frac{1}{2} e^u + c$

$= \frac{1}{2} e^{x^2+2x+3} + c$

❖ $\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}$

الحل

$\int (1+\cot x)^{\frac{-1}{2}} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$

$= \int (1+\cot x)^{\frac{-1}{2}} \cdot \csc^2 x\, dx$

$u = 1 + \cot x$

$du = -\csc^2 x\, dx \Rightarrow -du = \csc^2 x\, dx$

$= -\int u^{\frac{-1}{2}}\, du$

$= -2\, u^{\frac{1}{2}} + c$

$= -2\,(1+\cot x)^{\frac{1}{2}} + c$

$= -2\sqrt{1+\cot x} + c$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

❖ $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}\, dx$

الحل

$u = x^2 + 3x + 7$

$du = (2x+3)\, dx$

$\int \frac{du}{u}\, dx = l\,n\,|u| + c$

$\therefore \int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}\, dx = |n|\; x^2 + 3x + 7 + c$

❖ $\int (2x-1)\, e^{x^2-x+3}\, dx$

الحل

$u = x^2 - x + 3$

$du = (2x-1)\, dx$

$\int (2x-1)\, e^{x^2-x+3}\, dx = \int e^u\, du$

$= e^u + c$

$= e^{x^2-x+3} + c$

❖ $\int x\, e^{x}\, dx$

الحل

$u = x \qquad dv = e^{x}\, dx$

$du = dx \qquad v = e^{x}$

$$\int u\ dv = u\,v - \int v\ du$$

$$\int x\, e^{x}\, dx = x\, e^{x} - \int (e^{x})\ dx$$

$$= x\, e^{x} - e^{x} + c$$

$$= e^{x}(x+1) + c$$

❖ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}\, dx$

الحل

$$u = \sqrt{x}$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$2\ du = \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$$

$$\int e^{u}\,.\ 2\ du$$

$$= 2\int e^{u}\ du = 2e^{u} + c$$

$$= 2\, e^{\sqrt{x}} + c$$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

❖ $\int x \cos x\, dx$

الحل

$u = x \qquad dv = \cos x\ dx$

$du = dx \qquad v = \sin x$

$$\int u\ dv = u\,v - \int v\ du$$

$$\int x \cos x\ dx = x \sin x - \int \sin x\ dx$$

$$= -x \sin x + \cos x + c$$

❖ $\int 4\, x\ e^{-5x}\, dx$

الحل

$u = 4x \qquad dv = e^{-5x}\ dx$

$du = 4\ dx \qquad v = \frac{-1}{5} e^{-5x}$

$$\int u\ dv = u\,v - \int v\ du$$

$$\int 4x\, e^{-5x}\ dx = -\frac{4}{5}\, x\, e^{-5x} + \int \frac{4}{5}\ e^{-5x}\ dx$$

$$= -\frac{4}{5}\, x\, e^{-5x} - \frac{4}{25}\, e^{-5x} + c$$

❖ $\int x \sin(5x)\ dx$

الحل

$u = x \qquad dv = \sin(5x)\,dx$

$du = dx \qquad v = \frac{-1}{5}\cos(5x)$

$$\int u\ dv = u\,v - \int v\ du$$

$$\int x \sin(5x)\ dx = \frac{-1}{5} x\cos(5x) + \frac{1}{5}\int \cos(5x)\ dx$$

$$= \frac{-1}{5} x\cos(5x) + \frac{1}{25}\sin(5x) + c$$

❖ $\int x \sin x\ dx$

الحل

$u = x \qquad dv = \sin dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$$\int u\ dv = u\,v - \int v\ du$$

$$\int x \sin x\ dx = -x\cos x - \int (-\cos x)\ dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + c$$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

❖ $\int x^2 \cos x\ dx$

الحل

$u = x^2 \qquad dv = \cos x\ dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = \sin x$

$$\int u\ dv = u\,v - \int v\ du$$

$$\int x^2 \cos x\ dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\ dx \ \ldots\ldots (1)$$

نستخدم القاعدة مرة ثانية لإيجاد : $\int x \sin x\ dx$

$u = x \qquad dv = \sin x\ dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$$\therefore \int x \sin x\ dx = -x\cos x - \int -\cos x\ dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + c_1 \ \ldots\ldots (2)$$

من (1) ، (2) نحصل على :

$$\int x^2 \cos x\ dx = x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \sin x + c_1)$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$$

❖ $\int (x+1)\, e^{x+1}\ dx$

الحل

$u = x + 1 \qquad dv = e^{x+1}\ dx$

$du = dx \qquad v = e^{x+1}$

$$\int u\ dv = u\,v - \int v\ du$$

$$\int (x+1)\, e^{x+1}\ dx = (x+1)\, e^{x+1} - \int e^{x+1}\ dx$$

$$= (x+1)\, e^{x+1} - e^{x+1} + c$$

❖ $\int \ln x \, dx$

الحل

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = x$

$$\int u \; dv = u\,v - \int v \; du$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= x \ln x - \int 1 \; dx$$

$$= x \ln x - x + c$$

❖ $\int 3x e^{2x+1} \, dx$

الحل

$u = 3x \qquad dv = e^{2x+1}\, dx$

$du = 3\, dx \qquad v = \frac{1}{2}\, e^{2x+1}$

$$\int u \; dv = u\,v - \int v \; du$$

❖ $\int 3x e^{2x+1} \, dx = \frac{3}{2} x\, e^{2x+1} . \frac{3}{2} \int e^{2x+1} \; dx$

$$= \frac{3}{2} x\, e^{2x+1} - \frac{3}{4} e^{2x+1}\, dx$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

❖ $\int x \ln x \, dx$

الحل

$u = \ln x \qquad dv = x\, dx$

$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$$\int u \; dv = u\,v - \int v \; du$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2}\, x^2 \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\, x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \; dx$$

$$= \frac{1}{2}\, x^2 \ln x - \frac{1}{4}\, x^2 + c$$

❖ $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^{x}}\, dx$

الحل

$$\int_{-2}^{0} x\, e^{-x}\, dx$$

$u = x \qquad dv = e^{-x}\, dx$

$du = dx \qquad v = -e^{-x}$

$$\int u\ dv = u\, v - \int v\ du$$

$$\int_{-2}^{0} x\, e^{-x}\, dx = -\left[x\ e^{-x}\right]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} -e^{-x}\, dx$$

$$= -\left[x\ e^{-x}\right]_{-2}^{0} - \left[\,e^{-x}\right]_{-2}^{0}$$

$$= -(0 + 2e^{2}) - (1 - e^{2})$$

$$= -2e^{2} - 1 + e^{2}$$

$$= -e^{2} - 1$$

❖ $\int x^{2}\, ln\, x^{2}\, dx$

الحل

$u = ln\, x^{2} \qquad dv = x^{2}\, dx$

$du = \frac{1}{x^{2}}\, .2x\, dx = \frac{2}{x} dx \qquad v = \frac{x^{3}}{3}$

$$\int u\ dv = u\, v - \int v\ du$$

$$\int x^{2}\, ln\, x^{2}\, dx = \frac{x^{3}}{3}\, ln\, x^{2} - \int \frac{x^{3}}{3}\, .\frac{2}{x}\, dx$$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

$$= \frac{x^{3}}{3}\, ln\, x^{2} - \frac{2}{3} \int x^{2}\ dx$$

$$= \frac{x^{3}}{3} \ln x^{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right) x^{3} + c$$

$$= \frac{x^{3}}{3} \ln x^{2} - \frac{2}{9}\ x^{3} + c$$

❖ $\int_{0}^{\pi} x\ \cos 3x\ dx$

الحل

$u = x \qquad dv = \cos 3x\ dx$

$du = dv \qquad v = \frac{1}{3}\sin 3x$

$$\int u\ dv = u\, v - \int v\ du$$

$$\int_{0}^{\pi} x\ cos\, 3x\ dx = \left[\frac{1}{3}\ x\ \sin 3x\right]_{0}^{\pi} - \frac{1}{3}\int_{0}^{\pi} sin\, 3x\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}\ x\ \sin 3x + \frac{1}{9}\ \cos 3x\right]_{0}^{\pi}$$

$$\left(\frac{1}{3}\ \pi\ \sin 3x + \frac{1}{9}\ \cos 3x\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\ (0)\ \sin 3(0) + \frac{1}{9}\ \cos 3(0)\right) = -\frac{2}{9}$$

لتكن الدالة f :

❖ $f(x)=\frac{5x-1}{x^2-2x-15}$

فأوجد : (1) الكسور الجزئية

(2) $\int f(x)\,dx$

الحل

نحلل المقام

$$(1)\ x^2-2x-15=(x+3)(x-5)$$

$$\frac{5x-1}{x^2-2x-15}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-5}$$
$$5x-1=A(x-5)+B(x+3)$$
$$5(5)-1=A(5-5)+B(5+3)$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

نعوض عن x بـ (5) :

$$\therefore B=3$$

$$5x-1=A(x-5)+B(x+3)$$
$$5(-3)-1=A(-3-5)+B(-3+3)$$

نعوض عن x بـ (3) :

$$\therefore A=2$$
$$\frac{5x-1}{x^2-2x-15}=\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x-5}$$

$$(2)\int f(x)dx=\int \frac{5x-1}{x^2-2x-15}dx$$
$$=\int \left(\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x-5}\right)dx$$
$$=\int \frac{2}{x+3}dx+\int \frac{3}{x-5}dx$$
$$=2\int \frac{1}{x+3}dx+3\int \frac{1}{x-5}dx$$
$$=2\ln|x+3|+3\ln|x-5|+C$$

لتكن الدالة f :

❖ $f(x) = \frac{2}{(x-5)\,(x-3)}$

فأوجد : (1) الكسور الجزئية

(2) $\int f(x)\,dx$

الحل

$$\frac{2}{(x-5)(x-3)} = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{x-3}$$

$$2 = A_1(x-3) + A_2(x-5)$$

$$2 = A_1(3-3) + A_2(3-5)$$

نعوض عن x بـ (3) :

$$\therefore A_2 = -1$$

$$2 = A_1(5-3) + A_2(5-5)$$

نعوض عن x بـ (5) :

$$\therefore A_1 = 1$$

$$\frac{2}{(x-5)}(x-3) = \frac{1}{x-5} + \frac{-1}{x-3}$$

$$\int f(x) = \int \frac{2}{(x-5)(x-3)}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x-5} + \frac{-1}{x-3}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{x-5}\,dx + \int \frac{-1}{x-3}\,dx$$

$$= \ln\,|x-5| - \ln\,|x-3| + C$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

❖ $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x} \quad dx$

الحل

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2)$$
$$= x(2x-1)(x+2)$$
$$\therefore \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2}$$

موقع
المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

اضرب طرفي المعادلة في : $x\ (2x-1)\ (x+2)$

$$x^2+2x-1 = A(2x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(2x-1)$$

عوض عن x بـ (0) :

$$0^2+2(0)-1 = A\ (0-1)\ (0+2)\ \Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

عوض عن x بـ $\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)-1 = \left(\frac{1}{2}\right)B \times \left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow B=\frac{1}{5}$$

عوض عن x بـ (-2) :

$$(-2)^2+2(-2)-1 = (-2)C \times (-5) \Rightarrow C=\frac{1}{10}$$

و منه :

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{5}}{2x-1}+\frac{\frac{-1}{10}}{x+2}$$
$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx = \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{5}}{2x-1}-\frac{\frac{1}{10}}{x+2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{10}\ln|2x-1|-\frac{1}{10}\ln|x+2|+C$$

❖ $\int \frac{x^2-2x+4}{x^2-2x}\ dx$

الحل

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2-2x & x^2-2x+4 \\ & x^2-2x \\ \hline & 4 \end{array}$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

$$= 1 + \frac{4}{x^2-2x}$$

$$x^2-2x = x(x-2)$$

$$\frac{4}{x(x-2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2}$$

بضرب طرفي المعادلة في : $x\,(x-2)$

$$4 = A_1(x-2) + A_2 x$$

بالتعويض عن x بـ (0) :

$$4 = -2A_1 \rightarrow A_1 = -2$$

بالتعويض عن x بـ (2) :

$$4 = 2A_2 \rightarrow A_2 = 2$$

$$\frac{4}{x(x-2)} = \frac{-2}{x} + \frac{2}{x-2}$$

$$\int \frac{x^2-2x+4}{x^2-2x}dx = \int \left(1 + \frac{-2}{x} + \frac{2}{x-2}\right)dx$$

$$= \int 1dx + \int \frac{-2}{x}dx + \int \frac{2}{x-2}dx$$

$$= x - 2\ln|x| + 2\ln|x-2| + C$$

❖ $\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3}\, dx$

الحل

$$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3}=\frac{5x-1}{(x+3)(x-1)}=\frac{A_1}{x+3}+\frac{A_2}{x-1}$$

$$\Rightarrow 5x-1=A_1(x-1)+A_2(x+3)$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

بالتعويض عن : $(x=1)$

$$4=4A_2 \Rightarrow A_2=1$$

بالتعويض عن : $(x=-3)$

$$-16=-4A_1 \Rightarrow A_1=4$$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3}=\frac{4}{x+3}+\frac{1}{x-1}$$

$$\int_{-2}^{0}\left(\frac{5x-1}{x^2+2x-3}\right)dx=\int_{-2}^{0}\left(\frac{4}{x+3}+\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$=4[\ln|x+3|]_{-2}^{0}+[\ln|x-1|]_{-2}^{0}$$

$$=4[\ln 3-\ln 1]+[\ln 1-\ln 3]$$

$$=3\ln 3$$

❖ $\int_{-3}^{4}|2x-4|\ dx$

الحل

$$\int_{-3}^{4}|2x-4|dx=\int_{-3}^{2}|2x-4|dx+\int_{2}^{4}|2x-4|dx$$
$$=\int_{-3}^{2}(-2x+4)dx+\int_{2}^{4}(2x-4)dx$$
$$=[-x^2+4x]_{-3}^{2}+[x^2-4x]_{2}^{4}$$
$$=[-(2)^2+4(2)]-[-(-3)^2+4(-3)]$$
$$+[4^2-4(4)]-[2^2-4(2)]$$
$$\approx 29$$

❖ $\int_{2}^{-1}\left(\sqrt{x+1}-3\right)\ dx$

الحل

$$\int_{2}^{-1}(\sqrt{x+1}-3)dx=-\int_{-1}^{2}(\sqrt{x+1}-3)dx$$
$$=-\int_{-1}^{2}\left((x+1)^{\frac{1}{2}}-3\right)dx$$
$$=-\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-3x\right]_{-1}^{2}$$
$$=-\left[\frac{2}{3}(2+1)^{\frac{3}{2}}-3(2)-\frac{2}{3}(-1+1)^{\frac{3}{2}}+3(-1)\right]$$
$$=-\left(\frac{2}{3}(3\sqrt{3})-6-3\right)$$
$$=9-2\sqrt{3}\approx 5.5$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن :

❖ $\int_{0}^{2}\left(x^2-2x-3\right)\ dx\ \leq 0$

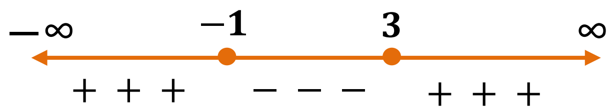
الحل

بفرض : $f(x)=\ x^2-2x-3$

و هي دالة متصلة على $[0\ ,2]$

نضع

$$x^2-2x-3=0$$
$$(x+1)(x-3)=0$$
$x=-1$ أو $x=3$



$$[0,2]\subseteq[-1,3]$$
$$f(x)\leq 0\quad ,\quad \forall x\in[0,2]$$
$$\therefore\int_{0}^{2}f(x)dx\leq 0\quad ,\quad \forall x\in[0,2]$$
$$\therefore\int_{0}^{2}(x^2-2x-3)dx\leq 0$$

❖ $\int_{1}^{4}|x-2|\ dx$

الحل

$$\int_{1}^{4}|x-2|dx=\int_{1}^{2}|x-2|dx+\int_{2}^{4}|x-2|dx$$
$$=\int_{1}^{2}(2-x)dx+\int_{2}^{4}(x-2)dx$$
$$=\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{2}+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{2}^{4}$$
$$=\left[(4-2)-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]+[(8-8)-(2-4)]$$
$$=\left[2-1\frac{1}{2}\right]+[0-(-2)]$$
$$=\frac{1}{2}+2=2\frac{1}{2}$$

❖ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ و محور السينات

الحل

نوجد الاحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

$f(x) = 0$ $\quad$ $x^2 - 3x = 0$ $\quad$ $x = 3$ أو $x = 0$

$$A = \left|\int_0^3 f(x)dx\right| = \left|\int_0^3 (x^2 - 3x)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3\right|$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

$$= \left|\left[\left(9 - \frac{27}{2}\right) - (0)\right]\right| = \frac{9}{2} \text{ units square}$$

❖ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3 - 4x$ و محور السينات في الفترة $[-1 , 1]$

الحل

نوجد قيم x بحيث $f(x) = 0$

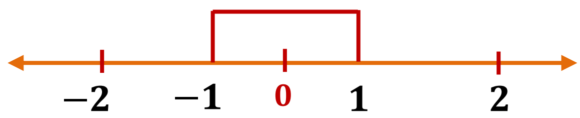
$x^3 - 4x = 0 \qquad x(x^2 - 4) = 0$

$x(x-2)(x+2) = 0$

$\therefore x = 0, 0 \in (-1, 1)$

$x = 2, 2 \notin (-1, 1)$

$x = -2, -2 \notin (-1, 1)$



مساحة المنطقة المحددة كما يلي :

$$A = \left|\int_{-1}^0 f(x)dx\right| + \left|\int_0^1 f(x)dx\right|$$

$$A = \left|\int_{-1}^0 (x^3 - 4x)dx\right| + \left|\int_0^1 (x^3 - 4x)dx\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-1}^0\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_0^1\right|$$

$$A = \left|(0) - \left(\frac{1}{4}(-1)^4 - 2(-1)^2\right)\right|$$

$$+ \left|\left(\frac{1}{4}(1)^4 - 2(1)^2\right) - (0)\right|$$

$$A = \left|\frac{7}{4}\right| + \left|-\frac{7}{4}\right| = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ units square}$$

❖ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين $y_2 = -2x+5$ ، $y_1 = x^2+2$

الحل

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

نضع $y_1 = y_2$

$$x^2+2 = -2x+5$$
$$x^2+2x-3 = 0$$
$x = 1$ أو $x = -3$

$$A = \left|\int_{-3}^{1} (y_2 - y_1)dx\right|$$
$$A = \left|\int_{-3}^{1} [(-2x+5)-(x^2+2)]dx\right|$$
$$= \left|\int_{-3}^{1} [-x^2-2x+3]dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{-x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{-3}^{1}\right|$$
$$= \left|\left[\frac{-(1)^3}{3} - (1)^2 + 3(1)\right] - \left[\frac{-(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3(-3)\right]\right|$$
$$= \left|\frac{32}{3}\right|$$
$= \frac{32}{3}$ (وحدة مربعة)

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

❖ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة : $y_1 = 3-x^2$ و المستقيم $y_2 = x$

الحل

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقطتى التقاطع :

نضع $y_1 = y_2$

$$2-x^2 = -x$$
$$x^2-x-2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$
$x = 2$ أو $x = -1$

∴ مساحة المنطقة هي :

$$A = \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)dx$$
$$= \int_{-1}^{2} (2-x^2-(-x))dx$$
$$= \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left[\left(2(2) - \frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2}\right) - \left(2(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2}\right)\right]$$
$= \frac{9}{2}$ (وحدة مربعة)

❖ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f(x) = 4x - x^2$ و منحنى الدالة $g(x) = x^2 + 5$ و المستقيمين : $x = 0$, $x = 2$ علما بأن منحنيى الدالتين f , g غير متقاطعين

الحل

∵ المنحنيين غير متقاطعين

$$A = \left|\int_0^2 (g(x) - f(x))dx\right|$$
$$= \left|\int_0^2 ((5 + x^2) - (4x - x^2))dx\right|$$
$$= \left|\int_0^2 (2x^2 - 4x + 5)dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x\right]_0^2\right|$$
$$= \left|\left[\frac{16}{3} - 8 + 10\right] - 0\right|$$
$$= \frac{22}{3} \text{ (وحدة مربعة)}$$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

❖ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ و المستقيم $y = 2$ في الفترة $[-2, 2]$

الحل

بفرض $g(x) = y = 2$

نأخذ قيمة اختيارية في $[-2, 2]$

و لتكن $x = 0$

$f(0) = 0$, $g(0) = 2$

$$\therefore g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-2, 2]$$

∴ حجم المجسم الناتج عن الدوران :

$$V = \pi\int_{-2}^{2} [(g(x))^2 - (f(x))^2]dx$$
$$= \pi\int_{-2}^{2} \left[(2)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2\right]dx$$
$$= \pi\int_{-2}^{2} \left[4 - \frac{1}{4}x^4\right]dx$$
$$= \pi\left[4x - \frac{1}{20}x^5\right]_{-2}^{2}$$
$$= \pi\left[\left(4(2) - \frac{1}{20}(2)^5\right) - \left(4(-2) - \frac{1}{20}(-2)^5\right)\right]$$
$$V = \frac{64}{5}\pi \text{ (وحدة مكعبة)}$$

❖ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنيي الدالتين : $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2$

الحل

$f(x) = g(x)$

$x^2 = \sqrt{x} \quad : (x > 0)$

بتربيع الطرفين : $x^4 = x$

$x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0$

نحصل على $x = 0$, $x = 1$

نأخذ قيمة اختيارية في $(0, 1)$ و لتكن $x = \frac{1}{4}$

$g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$

$\therefore g(x) \geq f(x) \geq 0 , \quad \forall x \in [0, 1]$

∴ حجم المجسم الناتج :

$$V = \pi \int_0^1 [(g(x))^2 - (f(x))^2] dx$$

$$= \pi \int_0^1 [x - x^4] dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$\therefore V = \pi \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - 0\right] = \frac{3}{10}\pi \text{(وحدة مكعبة)}$$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

❖ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ و محور السينات في الفترة $[-1, 1]$

الحل

∴ حجم المجسم الناتج عن الدوران هو :

$$\therefore V = \pi \int_{-1}^{1} (f(x))^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^2 + 2)^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 4x^2 + 4)^2 \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{4}{3} x^3 + 4x\right]_{-1}^{1} = \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 4\right) - \left(\frac{-1}{5} - \frac{4}{3} - 4\right)\right]$$

$$= \frac{166}{15} \pi \text{ units cube}$$

❖ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحني الدالتين : $y_1 = x+3 \quad , \quad y_2 = x^2+1$

الحل

المنطقة المستوية محددة بمنحني الدالتين y_1 , y_2

نوجد الإحداث السيني لنقاط تقاطع المنحنيين بوضع $y_1 = y_2$

$$x+3 = x^2+1$$
$$\therefore x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$

و منها $x = 2 \ , x = -1$

بأخذ قيمة اختيارية في $(-1\,,2)$ و لتكن $x = 0$ نجد أن :

$$y_1 = 3 \ , \ y_2 = 1$$
$$\therefore y_1 \geq y_2 \geq 0 \qquad \forall x \in [-1,2]$$

∴ حجم المجسم الناتجمن الدوران هو :

$$V = \pi \int_{-1}^{2} [(y_1)^2 - (y_2)^2]dx$$
$$V = \pi \int_{-1}^{2} [(x+3)^2 - (x^2+1)^2]dx$$
$$V = \pi \int_{-1}^{2} [(x^2+6x+9) - (x^4+2x+1)]dx$$
$$V = \pi \int_{-1}^{2} [-x^4 - x^2 + 6x + 8]dx$$
$$V = \pi \left[-\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x\right]$$
$$V = \pi \left[\left(\frac{284}{15}\right) - \left(\frac{-67}{15}\right)\right]$$
$$V = \frac{117\pi}{5} \ units\ cube$$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

❖ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x-1}$ و محور السينات في الفترة $[1\,,5]$

الحل

∴ حجم المجسم الناتج هو :

$$V = \pi \int_{1}^{5} (f(x))^2 dx$$
$$= \pi \int_{1}^{5} (\sqrt{x-1})^2 dx$$
$$= \pi \int_{1}^{5} (x-1)dx$$
$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5$$
$$= \pi \left[\left(\frac{25}{2} - 5\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$$
$$= 8\pi \ units\ cube$$

❖ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنيي الدالتين : $f(x)=\frac{x^2}{2}+1\ ,\ g(x)=\frac{x}{2}+2$

الحل

نقاط التقاطع $f(x)=g(x)$

بالضرب ×2 $\frac{x^2}{2}+1=\frac{x}{2}+2$

$$x^2+2=x+4$$

$$x^2+2-x-4=0$$

$$x^2-x-2=0$$

$$(x-2)(x+1)=0$$

$$x=2\ x=-1$$

نختار $(-1,2)\ni x=0$

$$f(0)=\frac{0^2}{2}+1=1$$

$$g(0)=\frac{0}{2}+2=2$$

$$g(x)>f(x)$$

$$\forall x\in(-1,2)$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

$$V=\pi\int_a^b (g(x))^2-(f(x))^2dx$$

$$\pi\int_{-1}^{2}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2-\left(\frac{x^2}{2}+1\right)^2dx$$

$$\pi\int_{-1}^{2}\left(\frac{x^2}{4}+2x+4\right)-\left(\frac{x^4}{4}+x^2+1\right)dx$$

$$\pi\int_{-1}^{2}\left(-\frac{x^4}{4}-\frac{3}{4}x^2+2x+3\right)dx$$

$$\pi\left[-\frac{x^5}{20}-\frac{3x^3}{4x^3}+\frac{2x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{2}$$

$$\pi\left[\left[-\frac{(2)^5}{20}-\frac{1}{4}(2)^3+(2)^2+3(2)\right]-\left[-\frac{(-1)^5}{20}-\frac{1}{4}(-1)^3+(-1)^2+3(-1)\right]\right]$$

$=25.44$ وحدة مكعبة

❖ أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$ في الفترة $[3, 8]$

الحل

$$f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$(f'(x))^2 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_3^8 \sqrt{1 + x}dx = \int_3^8 (1 + x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}(1 + x)^{\frac{3}{2}}\right]_3^8$$

$$= \left[\frac{2}{3}(1 + 8)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1 + 3)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= 12.6 \text{ units}$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

❖ أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{3}(3 + 2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0, 6]$

الحل

$$f(x) = \frac{1}{3}(3 + 2x)^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}(3 + 2x)^{\frac{1}{2}} \cdot 2$$

$$f'(x) = (3 + 2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$(f'(x))^2 = \left((3 + 2x)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$= 3 + 2x$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + (3 + 2x)}dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{4 + 2x}dx$$

$$= \int_0^2 (4 + 2x)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$L = \frac{1}{2}\int_0^2 2(4 + 2x)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\left[(4 + 2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{3}\left[(4 + 2(2))^{\frac{3}{2}} - (4 + 2(0))^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$L \approx 4.87 \text{ units}$$

❖ أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = 5 + 2\sqrt{x^3}$ في الفترة $\left[0, \frac{1}{3}\right]$

الحل

$$f(x) = 5 + 2x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$$

$$(f'(x))^2 = 9x$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$L = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + 9x}\, dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (1 + 9x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$L = \frac{1}{9}\int_0^{\frac{1}{3}} 9(1 + 9x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}(1 + 9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$L = \frac{1}{9} \times \frac{2}{3}\left[(4)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{14}{27}\ units$$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

❖ أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند اي نقطة $P(x, y)$ يساوي $3x^2 + x$ و يمر بالنقطة $(2, 2)$

الحل

ميل منحنى الدالة هو $f'(x) = 3x^2 + x$

معادلة منحنى الدالة هى $f(x) = \int (3x^2 + x) dx$

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

لتعيين الثابت C نعوض بالنقطة $(2, 2)$ أي $f(2) = 2$

$$2 = 2^3 + \frac{1}{2}(2)^2 + C$$

$$\therefore C = -8$$

معادلة منحنى الدالة المطلوب هو $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 8$

❖ إذا كان ميل العمودى لمنحنى الدالة f عند اي نقطة عليه (x, y) هو $2x + 5$ فأوجد معادلة المنحنى علما بأنه يمر بالنقطة $B(-2, 3)$

الحل

ميل العمودى $= \frac{-1}{f'(x)}$ حيث $f'(x) \neq 0$

$$\therefore f'(x) = \frac{-1}{2x+5} = \int f'(x)dx = \int \frac{-1}{2x+5}\, dx$$

لتعيين الثابت C نعوض بالنقطة $P(-2, 3)$

$$f(x) = \frac{-1}{2} ln\ |2x+5| + C$$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

$$3 = \frac{-1}{2} ln|1| + C \qquad C = 3$$

معادلة منحنى الدالة المطلوب هي :

$$f(x) = \frac{-1}{2} ln\ |2x+5| + 3$$

❖ إذا كان ميل العمودى لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) يساوى $\sqrt{5-4x}$ فأوجد معادلة المنحنى علما بأنه يمر بالنقطة $A\ (-5, 3)$

الحل

ميل العمودى $= -\frac{1}{f'(x)}$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{5-4x}} = -1(5-4x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int -1(5-4x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$f(x) = \frac{-1.2}{-4 \times 1}(5-4x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5-4x} + c \qquad A(-5-3)$$

$$3 = \frac{1}{2}\sqrt{5-4(-9)} + c \qquad c = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5-4x} + \frac{1}{2}$$

❖ حل المعادلة التفاضلية : $y' - 2xy = 0$

الحل

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2xdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx \Rightarrow \quad ln|y| = x^2 + C \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{x^2+C}$$

$$y = \pm e^{x^2} \cdot e^C \qquad \Rightarrow \qquad = \pm e^C \cdot e^{x^2} \qquad (k = \pm e^C)$$

$$y = k \cdot e^{x^2}$$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

❖ حل المعادلة : $2y' + y = 1$ ثم اوجد الحل الذي يحقق $y = 2$ عند $x = 1$

الحل

$$y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \qquad a = \frac{-1}{2} \qquad b = \frac{1}{2}$$

$$y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

بالتعويض عن $x = -1 \ , \ y = 2$ $\quad \therefore y = Ke^{\frac{-1}{2}x} + 1$

$$2 = Ke^{+\frac{1}{2}} + 1 \qquad K = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x} + 1 = e^{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} + 1$$

❖ حل المعادلة التفاضلية : $3y' - 2y = 4$ ثم أوجد الحل الخاص الذي يحقق $y = 3$ عندما $x = 0$

الحل

$$3y' = 2y + 4$$

$$y' = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3} \qquad a = \frac{2}{3} ,b = \frac{4}{3}$$

$$y = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

$$y = Ke^{\frac{2}{3}x} - 2$$

عندما $x = 0 ,\ y = 3$

$$3 = K - 2 \qquad K = 5$$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

$$y = 5e^{\frac{2}{3}x} - 2$$

❖ حل المعادلة : $2y' = x^2 + x + 2$ التى يحقق $y = 4$ عندما $x = 1$

الحل

$$y' = x^2 + x + 2$$

$$y = \int (x^2 + x + 2)dx$$

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + c \qquad x = 1 , \quad y = 4$$

$$4 = \frac{1}{3}(1)^3 + \frac{1}{2}(1)^2 + 2(1) + c \qquad c = \frac{7}{6}$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{7}{6}$$

❖ حل المعادلة : $y'' = 3x^2 - 2x$

الحل

$$y' = \int (3x^2 - 2x)dx$$

$$y' = x^3 - x^2 + C_1$$

$$y = \int (x^3 - x^2 + C_1)dx$$

$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2$$

❖ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و يمر بالنقطتين $A(-1,4), B(1,4)$ ثم أوجد بؤرته و معادلة دليله

الحل

∵ منحنى القطع المكافئ يمر بالنقطتين $A(-1,4), B(1,4)$ و رأسه نقطة الاصل

∴ معادلة القطع المكافئ هى : $x^2 = 4Py$

بالتعويض عن (x, y) بإحداثيات النقطة B نحصل على :

$(1)^2 = 4P(4)$ $\quad 1 = 16P$ $\quad P = \frac{1}{16}$

∴ معادلة القطع المكافئ هى : $x^2 = \frac{1}{4}y$

البؤرة : $F(0, P) = F\left(0, \frac{1}{16}\right)$

معادلة الدليل : $y = -P$ $\quad y = -\frac{1}{16}$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

❖ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و يمر بالنقطة $A(1,2)$ و خط تماثله $x - axis$

الحل

رأس القطع المكافئ نقطة الأصل

∵ خط تماثله $x - axis$

∴ معادلته على الصورة $y^2 = 4Px$

∴ القطع المكافئ يمر بالنقطة

$A(1,2)$

∴ تحقق المعادلة أي أن :

نعوض في معادلة القطع عن x بـ 1 و عن y بـ 2

$$(2)^2 = 4P(1)$$

$$4 = 4P \Rightarrow P = 1$$

$$y^2 = 4Px$$

$$y^2 = 4(1)\,x$$

$$y^2 = 4x$$

❖ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و معادلة دليله $x = -3$

الحل

∵ معادلة الدليل هى : $x = -3$

∴ خط التماثل أفقى $(x - axis)$.

∴ معادلة القطع المكافئ هى على الصورة $y^2 = 4Px$

معادلة الدليل هى على الصورة $x = -P$

$x = -3 \Rightarrow P = 3$

المعادلة : $y^2 = 4Px$

$y^2 = 4(3)x$

$y^2 = 12x$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

❖ أوجد البؤرتين و الرأسين و طول المحور الاكبر للقطع الناقص الذي معادلته :

$$25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$$

الحل

$$\because 25x + 16y - 400 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

المحور الاكبر ينطبق على محور الصادات

∴ المعادلة على الصورة $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

$\therefore\ a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$\therefore b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$

$\Rightarrow c = 3$

البؤرتين هما :

$F_1\,(0,-3)\,,F_2(0,3)$

∴ رأسا القطع الناقص هما :

$A_1\,(0,-5)\,,A_2(0,5)$

طول المحور الأكبر هو :

$2a = 2 \times 5 = 10$

❖ أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(0,0)$ و محوره الأصغر أفقي طوله $10cm$ و يمر بالنقطة $A(2,2\sqrt{6})$

الحل

المحور الأصغر أفقي

المحور الأكبر رأسي

معادلة القطع $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

طول المحور الاصغر $2b=10$

$b=5$

النقطة $A(2,2\sqrt{6})$ تحقق المعادلة :

$$\frac{(2)^2}{(5)^2}+\frac{(2\sqrt{6})^2}{a^2}=1$$

$$a=\frac{10\sqrt{14}}{7}$$

∴ معادلة القطع :

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{200}{7}}=1$$

❖ أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1\ (0,3)\ ,F_2\ (0,3)$ و طول محوره الأصغر 4

الحل

تقع البؤرتان على محور الصادات فتكون المعادلة على الصورة $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

∵ البؤرتان $F_1\ (0,-3)\ ,F_2(0,3)$ $\quad \therefore c=3$

∵ طول محوره الأصغر 4 $\quad \therefore 2b=4 \implies b=2$

$$\therefore\ b^2=4$$

$$c^2=a^2-b^2$$

$$9=a^2-4$$

$$a^2=13$$

معادلة القطع الناقص هي :

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{13}=1$$

❖ أوجد معادلة معادلة قطع ناقص مركزه $(0,0)$ إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور السيني و طوله $12cm$ و المسافة بين البؤرتين $8cm$

الحل

$\because$ طول المحور الأكبر هو $12cm$

$\therefore 2a = 12 \Rightarrow a = 6$

$\because$ المسافة بين البؤرتين هى $8cm$

$\therefore 2c = 8 \Rightarrow c = 4$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = 6^2 - 4^2$$

$$= 36 - 16 = 20$$

$\because$ محوره الأكبر ينطبق على المحور السيني فتكون المعادلة على الصورة

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

بالتعويض نحصل على المعادلة

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

❖ أوجد معادلة قطع ناقص مركزه $(0,0)$ و إحدى بؤرتيه $F(4,0)$ و يمر بالنقطة $A(6,0)$ ثم أوجد الاختلاف المركزي له

الحل

$\because$ البؤرة $F(4,0)$ تقع على محور السينات

فتكون معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل هي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 + 16$$

$\because$ القطع الناقص يمر بالنقطة $A(6,0)$

$$\frac{36}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1$$

$\therefore a^2 = 36$

$\because b^2 = 36 - 16 = 20$

$\therefore$ المعادلة هي :

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

الاختلاف المركزى :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

❖ أوجد معادلة القطع الناقص الذي فيه البؤرتان $F_1\,(-2,0)\,,F_2\,(2,0)$ و نقطتا طرفي المحور الأصغر $B_1\,(0,-3)\,,B_2\,(0,3)$

الحل

$\because$ البؤرتان $F_1\,(-2,0)\,,F_2\,(2,0)$

$\therefore c=2$

$\therefore$ المحور الاكبر ينطبق على المحور السيني

$\because$ نقطتا طرفي المحور الأصغر $B_1\,(0,-3)\,,B_2\,(0,3)$

$\therefore b=3$

$a^2=b^2+c^2$

$a^2=9+4=13$

معادلة القطع الناقص هي :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

❖ إذا كانت : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$ معادلة قطع ناقص فأوجد :

- رأسي القطع و طرفي المحور الأصغر
- البؤرتين
- طول كل من المحورين
- معادلتي دليلي القطع

الحل

(1) معادلة القطع الناقص هى : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

و منها نجد أن :

$\therefore\ a^2=36\Rightarrow a=6$

$\therefore b^2=16\ \Rightarrow\ b=4$

المحور الأكبر ينطبق على محور الصادات

رأسا القطع هما : $A_1\,(0,-6)\,,A_2\,(0,6)$

طرفا المحور الأصغر هما : $B_1\,(-4,0)\,,B_2\,(4,0)$

(2) معادلة القطع الناقص هى : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

و منه : $c=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

البؤرتين هما : $F_1\left(0,-2\sqrt{5}\right),F_2\left(0,2\sqrt{5}\right)$

(3) معادلة الدليلين : $y=-\frac{a^2}{c}\,,y=\frac{a^2}{c}$ و منه نجد :

$$y=\frac{a^2}{c}=\frac{36}{2\sqrt{5}}=\frac{18}{\sqrt{5}}=\frac{18\sqrt{5}}{5}$$

$$y=-\frac{a^2}{c}=-\frac{36}{2\sqrt{5}}=-\frac{18}{\sqrt{5}}=-\frac{18\sqrt{5}}{5}$$

(4) طول المحور الاكبر هو $2a$:

$2a=2\times6=12$

(5) طول المحور الاصغر هو $2b$:

$2b=2\times4=8$

❖ $V_1F_1 + V_1F_2 = 10$ ، حيث إن V_1 هو نقطة على القطع الناقص ، (F_1 , F_2) هما البورتين ، علما أن $F_1(3,0) , F_2(-3,0)$

الحل

$F_1(3,0) \qquad c = 3$

المحور الأكبر ينطبق على السينات :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$V_1F_1 + V_1F_2 = 2a = 10$$

$$a = 5$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$3^2 = 5^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

❖ لتكن $9x^2 - 16y^2 = 144$ معادلة قطع زائد فأوجد :

- رأسي القطع الزائد
- البؤرتين
- معادلتي دليلي القطع

الحل

1) المعادلة $9x^2 - 16y^2 = 144$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

المحور القاطع على محور السينات :

$$\therefore \; a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

$$\therefore b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 16 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow c = 5$$

رأسا القطع الزائد هما :

$A_1\,(-4,0)\,, A_2(4,0)$

1) البؤرتان هما :

$F_1\,(-5,0)\,, F_2(5,0)$

3) معادلتا دليلي القطع الزائد :

$$y = \pm\frac{a^2}{c}$$

$$y = \pm\frac{16}{5}$$

❖ أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(0,-3)\ ,F_2(0,3)$ و رأساه $A_1(0,-2)\ ,A_2(0,2)$ ثم اوجد معادلة كل من خطيه المقاربين

الحل

$\because$ البؤرتين على محور الصادات

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$\because$ إحدى البؤرتين هى $F_2(0,3)$

$\therefore\ c=3$

$\because$ أحد الرأسين $A_2(0,2)$

$\therefore\ a=2$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = 3^2 - 2^2 = 5 \Rightarrow b=\sqrt{5}$$

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي :

$$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$$

معادلتا الخط المقاربين هما :

$$y=\pm\frac{a}{b}x \Rightarrow y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x \Rightarrow y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

❖ أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ و أحد رأسيه $(-4,0)$ و يمر بالنقطة $(5,-2)$

الحل

$\because$ أحد رأسي القطع الزائد $(-4,0)$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور السينات

و معادلة القطع هي $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

من المعطيات : $a=4$ فيكون :

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

يمر القطع الزائد بالنقطة $(5,-2)$

بالتعويض $\quad \therefore \frac{25}{16}-\frac{4}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{25}{16}-1=\frac{4}{b^2}$

$$\frac{9}{16}=\frac{4}{b^2}$$

$$b^2=\frac{64}{9}$$

معادلة القطع الزائد :

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{\frac{64}{9}}=1$$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{9y^2}{64}=1$$

❖ أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ و أحد بؤرتيه $F(0,\sqrt{34})$ و معادلة أحد خطيه المقاربين هي : $y=\frac{3}{5}x$

الحل

$\because$ إحدى البؤرتين $F(0,\sqrt{34})$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور الصادات و معادلته :

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

$$\because\ c^2=a^2+b^2$$

$$\therefore\ 34=a^2+b^2 \quad (1)$$

معادلة المقارب : $y=\frac{a}{b}x$ حيث من المعطى

$$y=\frac{3}{5}x$$

$$\therefore \frac{3}{5}=\frac{a}{b}$$

$$\therefore a=\frac{3b}{5}$$

بالتعويض في المعادلة (1) :

$$34=\left(\frac{3b}{5}\right)^2+b^2$$

$$b=5$$

لإيجاد قيمة a نستخدم :

$$a=\frac{3b}{5}$$

$$a=\frac{3\times 5}{5}=3$$

و معادلة القطع الزائد هي :

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

❖ أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي $\left(e=\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ و طول محوره الأصغر 4 وحدات

الحل

$$\because\ e=\frac{c}{a}$$

$$\therefore\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3} \qquad c=\frac{a\sqrt{5}}{3}$$

$2b=4$ طول المحور الأصغر

$$b=2$$

$$c^2=a^2-b^2$$

$$\frac{5a^2}{9}=a^2-4 \Rightarrow a^2=4+\frac{5a^2}{9}$$

$$9a^2=36+5a^2 \Rightarrow 4a^2=36$$

$$a^2=9 \Rightarrow a=3$$

$2a=2(3)=6$ طول المحور الأكبر

❖ أوجد الاختلاف المركزي للقطع الذي معادلته : $x - 25y = 1$

الحل

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1$$

بالمقارنة قطع زائد معادلته :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = 1 \rightarrow a = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{25} \rightarrow b = \frac{1}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 1 + \frac{1}{25} = \frac{26}{25}$$

$$c = \sqrt{\frac{26}{25}} = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

الاختلاف المركزي :

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{\frac{\sqrt{26}}{5}}{1} = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

❖ حدد نوع القطع المخروطي ثم اوجد معادلته إذا علمت أن اختلافه المركزي $(e = 1)$ و بؤرته : $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

الحل

$$\because e = 1$$

∴ القطع المخروطي هو قطع مكافئ

∵ البؤرة هي $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ تنتمي إلى الجزء الموجب من محور السينات

$$\therefore p = \frac{1}{2}$$

محور التمثل هو محور السينات

فإن معادلة القطع هي : $y^2 = 4px$

$$y^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)x$$

$$y^2 = 2x$$

❖ حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم اوجد معادلته . اختلافه المركزي $\left(e = \sqrt{3}\right)$ و معادلة أحد دليليه $x = \frac{1}{3}$

الحل

$e = \sqrt{3} > 1$

∴ القطع الزائد

معادلة أحد دليليه $x = \frac{1}{3}$

المحور القاطع ينطبق على محور السينات

∴ معادلة الدليل $x = \frac{a^2}{c}$

$\frac{1}{3} = \frac{a^2}{c}$ $\quad c = 3a^2 \quad (1)$

الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$

$\sqrt{3} = \frac{c}{a}$ $\quad c = \sqrt{3}\, a \quad (2)$

من 1 و 2 :

$3a^2 = \sqrt{3}a$
$3a^2 . \sqrt{3}a = 0$
$a(3a - \sqrt{3}) = 0$

$a = 0$ $\quad a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore C = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 1$

$c^2 = a^2 + b^2$

$1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + b^2$ $\quad b^2 = \frac{2}{3}$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{1/3} - \frac{y^2}{4/9} = 1$

❖ اختلافه المركزي $\left(e = \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ و إحدى بؤرتيه $F(0, \sqrt{7})$

الحل

$\because e = \frac{\sqrt{7}}{4}\ ,\ \frac{\sqrt{7}}{4} < 1$

∴ القطع هو قطع ناقص

∵ احدى البؤرتين $F(0, \sqrt{7})$

∴ المحور الاكبر ينطبق على المحور الصادي و مركزه نقطة الأصل

$\because F(0, -\sqrt{7}) \Rightarrow c = \sqrt{7}$

$\because e = \frac{c}{a}$

$\therefore \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{a}$

$\therefore a = 4$

في القطع الناقص يكون :

$a^2 = b^2 + c^2$

$b^2 = a^2 - c^2$
$b^2 = 4^2 - (\sqrt{7})^2 = 16 - 7 = 9$

معادلة القطع الناقص :

$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

$\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1$