تمرَّنْ
٧-٥

التاريخُ الهجريُّ: ..... التاريخُ الميلاديُّ: .....

حل نظام من معادلتين خطيتين
Solving System of Two Linear Equations

المجموعة أ تمارين أساسية

في التمرينين (١ — ٢)، اكتب نظام المعادلات التالية على شكل معادلة مصفوفية محدداً مصفوفة المعاملات ومصفوفة المتغيرات ومصفوفة الثوابت.

(١) $\begin{cases} \text{س} + \text{ص} = ٥ \\ \text{س} - ٢\text{ص} = -٤ \end{cases}$

معاملات متغيرات ثوابت

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٤- \end{bmatrix}$$

(٢) $\begin{cases} ٢\text{س} + ٥\text{ص} = ٠ \\ \text{س} + \text{ص} = ٢ \end{cases}$

معاملات متغيرات ثوابت

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

في التمرينين (٣ — ٤)، اكتب المعادلات المصفوفية التالية على شكل نظام معادلات.

(٣) $\begin{bmatrix} ٣ & ١- \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- \\ ٣ \end{bmatrix}$

٣س - ص = -١
٢س + ٤ص = ٣

(٤) $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١- & ٢- \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢- \end{bmatrix}$

٢س + ٤ص = ٥
-س - ٢ص = -٢

في التمارين (٥ — ٧)، استخدم النظير الضربي للمصفوفة لحل نظام معادلات.

(٥) $\begin{cases} \text{س} + ٣\text{ص} = ٥ \\ \text{س} + ٤\text{ص} = ٦ \end{cases}$

(٦) $\begin{cases} \text{س} - ٣\text{ص} = -١ \\ -٥\text{س} + ١٦\text{ص} = ٥ \end{cases}$

(٧) $\begin{cases} \text{س} + ٥\text{ص} = -٤ \\ \text{س} + ٦\text{ص} = -٥ \end{cases}$

ملاحظة ص تم ٥، ٦، ٧ ص ٦ في الصفحة القادمة

حل

رقم (٥) ص ٦٠

$$\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

$$\text{أ} \times \text{ع} = \text{ب} \qquad \text{ع} = \text{أ}^{-١} \times \text{ب}$$

$$\text{أ}^{-١} = \frac{١}{١} \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\text{ع} = \begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ١ \end{bmatrix} \quad \text{س} = ٢ \text{ ، ص} = ١$$

رقم (٦) ص ٦٠

$$\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ -٥ & ١٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٦ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -١ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٠ \end{bmatrix} \quad \therefore \text{س} = -١ \text{ ، ص} = ٠$$

رقم (٧) ص ٦٠

$$\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤ \\ -٥ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & -٥ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٤ \\ -٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ -١ \end{bmatrix}$$

$\therefore$ س = ١ ، ص = -١

في التمارين (٨ — ١١)، بيّن ما إذا كان لنظام معادلات حلًا وحيدًا أم لا.

(٨) $\begin{cases} ٢٠س + ٥ص = ٢٤٠ \\ ص + ٢٠س = ٠ \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢٠ & ٥ \\ ٢٠ & ١ \end{vmatrix} = -٨٠ \neq ٠$ حل وحيد

(٩) $\begin{cases} ٣س + ٢ص = ١٠ \\ ٦س + ٤ص = ١٦ \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٦ & ٤ \end{vmatrix} = ٠$ لا

(١٠) $\begin{cases} ص = \frac{٢}{٣}س - ٣ \\ ص = -س + ٧ \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{٢}{٣} & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} \neq ٠$ حل وحيد

(١١) $\begin{cases} ٢٠س + ٥ص = ١٤٥ \\ ٣٠س - ٥ص = ١٢٥ \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢٠ & ٥ \\ ٣٠ & -٥ \end{vmatrix} \neq ٠$ حل وحيد

في التمارين (١٢ — ١٤)، استخدم قاعدة كرامر لحل نظام معادلات.

(١٢) $\begin{cases} ٢س + ص = ٤ \\ ٣س - ص = ٦ \end{cases}$

(١٣) $\begin{cases} ٢س + ص = ٧ \\ -٢س + ٥ص = -١ \end{cases}$

(١٤) $\begin{cases} ٢س + ٤ص = ١٠ \\ ٣س + ٥ص = ١٤ \end{cases}$

(١٥) ينتج أحد المصانع أقلام رصاص ومماحي. يبلغ ثمن علبة تحتوي على ٥ مماحي وقلمي رصاص ١٥٠٠ فلس. ويبلغ ثمن علبة أخرى تحتوي على ٧ مماحي و٥ أقلام ٢٦٥٠ فلسًا. أوجد ثمن المحاة وثمن القلم مستخدمًا النظير الضربي للمصفوفة.

$٥س + ٢ص = ١٥٠٠$

$٧س + ٥ص = ٢٦٥٠$

$\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥٠٠ \\ ٢٦٥٠ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{١١} \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -٧ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٥٠٠ \\ ٢٦٥٠ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢٠٠ \\ ٢٥٠ \end{bmatrix}$

∴ ثمن المحاة = ٢٠٠ فلس

، ثمن القلم = ٢٥٠ فلس

المجموعة ث تمارين تعزيزية

في التمرينين (١ — ٢)، اكتب نظام المعادلات التالية على شكل معادلة مصفوفية، محددًا مصفوفة المعاملات ومصفوفة المتغيرات ومصفوفة الثوابت.

(١) $\begin{cases} ص = ٣س - ٧ \\ ص = ٢ \end{cases}$

$-٣س + ص = -٧$

$ص = ٢$

معاملات متغيرات ثوابت

$\begin{bmatrix} -٣ & ١ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ \\ ٢ \end{bmatrix}$

ملاحظة: حل رقم ١٢، ١٣، ١٤، ١٥ صـ ٦٤ في الصف لتبادل

حل

رقم (١٢) ص ٦١

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} = -٥$ ، $س = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{-١٠}{-٥} = ٢$

$\Delta س = \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٦ & -١ \end{vmatrix} = -١٠$ ، $ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{٠}{-٥} = ٠$

$\Delta ص = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix} = ٠$ ، م ح = {(٢ ، ٠)}

رقم (١٣) ص ٦١

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ -٢ & ٥ \end{vmatrix} = ١٢$ ، $س = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{٣٦}{١٢} = ٣$

$\Delta س = \begin{vmatrix} ٧ & ١ \\ -١ & ٥ \end{vmatrix} = ٣٦$ ، $ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{١٢}{١٢} = ١$

$\Delta ص = \begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ -٢ & -١ \end{vmatrix} = ١٢$ ، م ح = {(٣ ، ١)}

رقم (١٤) ص ٦١ $\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = -٢$

، $\Delta س = \begin{vmatrix} ١٠ & ٤ \\ ١٤ & ٥ \end{vmatrix} = -٦$ ، $\Delta ص = \begin{vmatrix} ٢ & ١٠ \\ ٣ & ١٤ \end{vmatrix} = -٢$

$س = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$ ، $ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{-٢}{-٢} = ١$ م ح = {(٣ ، ١)}

رقم (١٥) ص ٦١ باستخدام قاعدة كرامر (المحددات)

$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٥ \end{vmatrix} = ١١$ ، $\Delta س = \begin{vmatrix} ١٥٠٠ & ٢ \\ ٢٦٥٠ & ٥ \end{vmatrix} = ٢٢٠٠$

، $\Delta ص = \begin{vmatrix} ٥ & ١٥٠٠ \\ ٧ & ٢٦٥٠ \end{vmatrix} = ٢٧٥٠$ ، $س = \frac{\Delta س}{\Delta} = \frac{٢٢٠٠}{١١} = ٢٠٠$ سم

، $ص = \frac{\Delta ص}{\Delta} = \frac{٢٧٥٠}{١١} = ٢٥٠$

∴ ثمن الحاسوب = ٢٠٠ فلس ، ثمن القلم = ٢٥٠ فلس

(٢) $\begin{cases} \text{س} + ٢\text{ص} = ١١ \\ ٢\text{س} + ٣\text{ص} = ١٨ \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١ \\ ١٨ \end{bmatrix}$$

في التمارين (٣ — ٥)، استخدم النظير الضربي للمصفوفة لحل نظام المعادلات.

(٣) $\begin{cases} ٣٠٠\text{س} - \text{ص} = ١٣٠ \\ ٢٠٠\text{س} + \text{ص} = ١٢٠ \end{cases}$

(٤) $\begin{cases} ٢\text{س} + ٣\text{ص} = ١٢ \\ \text{س} + ٢\text{ص} = ٧ \end{cases}$

(٥) $\begin{cases} ٢\text{س} + ٣\text{ص} = ٥ \\ \text{س} + ٢\text{ص} = ٦ \end{cases}$

رقم (٥)

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٨ \\ ٧ \end{bmatrix}$$

∴ س = -٨ ، ص = ٧

في التمارين (٦ — ٨)، حلّ المعادلة المصفوفية إن أمكن:

(٦) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ \\ ١٠ \end{bmatrix}$

رقم (٦)

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٨ \\ ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

∴ س = ٦ ، ص = ٢

(٧) $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -٤ & ٦ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ -٢ \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ -٤ & ٦ \end{vmatrix} = ٠$$

∴ حل المعادلة غير ممكن

(٨) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ \\ ٢ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \frac{١}{٢} \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ -٤ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٠ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٤ \\ -١٨ \end{bmatrix}$$

∴ س = ١٤ ، ص = -١٨

في التمارين (٩ — ١٢)، استخدم قاعدة كرامر لحل نظام معادلات.

(٩) $\begin{cases} ٠,٥\text{س} + ١,٥\text{ص} = ٧ \\ ٢,٥\text{س} - ٣,٥\text{ص} = -٩ \end{cases}$

(١٠) $\begin{cases} -٢,١\text{س} - ٣,٠\text{ص} = ٢,١ \\ -٢,٠\text{س} + ٨,٠\text{ص} = ٤,٦ \end{cases}$

(١١) $\begin{cases} \frac{\text{س}}{٥} - \frac{٢\text{ص}}{٥} = ٤ \\ \frac{٢\text{س}}{٥} - \frac{٣\text{ص}}{٥} = ٥ \end{cases}$

(١٢) $\begin{cases} \frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{ص}}{٤} = ٤ \\ \frac{\text{س}}{٤} - \frac{٣\text{ص}}{٨} = -٢ \end{cases}$

رقم (١٢)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٤} \\ \frac{١}{٤} & -\frac{٣}{٨} \end{vmatrix} = -٠,٢٥$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٤ & \frac{١}{٤} \\ -٢ & -\frac{٣}{٨} \end{vmatrix} = -١$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \frac{١}{٢} & ٤ \\ \frac{١}{٤} & -٢ \end{vmatrix} = -٢$$

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-١}{-٠,٢٥} = ٤ \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-٢}{-٠,٢٥} = ٨$$

حل

رقم (٣) ص ٦٢ $\begin{bmatrix} -٣ & -١ \\ ٢٠٠ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٣٠ \\ ١٢٠ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٥٠٠} \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ -٢٠٠ & -٣٠٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٣٠ \\ ١٢٠ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \frac{١}{٥٠٠} \begin{bmatrix} ٢٥٠ \\ -١٠٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠٫٥ \\ ٢٠ \end{bmatrix}$ س = ٠٫٥ ، ص = ٢٠

رقم (٤) ص ٦٢ $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ \\ ٧ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١٢ \\ ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \end{bmatrix}$ ∴ س = ٣ ، ص = ٢

رقم (٩) ص ٦٢ $\Delta = \begin{vmatrix} ٠٫٥ & ١٫٥ \\ ٢٫٥ & -٣٫٥ \end{vmatrix} = -٥٫٥$

، $\Delta_س = \begin{vmatrix} ٧ & ١٫٥ \\ -٩ & -٣٫٥ \end{vmatrix} = -١١$ ، $\Delta_ص = \begin{vmatrix} ٠٫٥ & ٧ \\ ٢٫٥ & -٩ \end{vmatrix} = -٢٢$

س = $\frac{\Delta_س}{\Delta} = \frac{-١١}{-٥٫٥} = ٢$ ، ص = $\frac{\Delta_ص}{\Delta} = \frac{-٢٢}{-٥٫٥} = ٤$

رقم (١٠) ص ٦٢ $\Delta = \begin{vmatrix} -١٫٢ & -٠٫٣ \\ -٠٫٢ & ٠٫٨ \end{vmatrix} = -١٫٠٢$

$\Delta_س = \begin{vmatrix} ١٫٢ & -٠٫٣ \\ ٤٫٦ & -٠٫٨ \end{vmatrix} = ٣٫٠٦$ ، $\Delta_ص = \begin{vmatrix} -١٫٢ & ١٫٢ \\ -٠٫٢ & ٤٫٦ \end{vmatrix} = -٥٫١$

س = $\frac{\Delta_س}{\Delta} = \frac{٣٫٠٦}{-١٫٠٢} = -٣$ ، ص = $\frac{\Delta_ص}{\Delta} = ٥$

(١٣) يقوم أحد مصانع الدهانات بمزج الألوان مع بعضها بعضًا لإنتاج ألوان مميزة. إذا مزج جزئين من اللون الأحمر إلى ستة أجزاء من اللون الأصفر فيحصل على صفيحة كاملة من اللون البرتقالي شبيه بلون فاكهة اليقطين. وإذا مزج خمسة أجزاء من اللون الأصفر مع ٣ أجزاء من اللون الأحمر فيحصل على صفيحة كاملة من اللون الأحمر الداكن شبيه بلون الفلفل الأحمر. تباع صفيحة اللون البرتقالي بـ ٢٥ دينارًا وصفيحة اللون الأحمر الداكن بـ ٢٨ دينارًا، علمًا أن كل صفيحة تحتوي على ٨ أجزاء.

(أ) اكتب نظام معادلات يمثّل المسألة أعلاه.

نفرض أن سعر كل جزء من الدهان الأحمر = س ، سعر كل جزء من الدهان الأصفر = ص

٢ س + ٦ ص = ٢٥

٣ س + ٥ ص = ٢٨

(ب) حل النظام مستخدمًا قاعدة كرامر، استنتج سعر كلّ جزء من الدهان الأحمر وسعر كل جزء من الدهان الأصفر.

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} = -٨$

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٢٥ & ٦ \\ ٢٨ & ٥ \end{vmatrix} = -٤٣$ ، $س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{-٤٣}{-٨} = ٥٫٣٧٥$

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ٢٥ \\ ٣ & ٢٨ \end{vmatrix} = -١٩$ ، $ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-١٩}{-٨} = ٢٫٣٧٥$

∴ سعر كل جزء من الدهان الأحمر = ٥٫٣٧٥ دينار

، سعر كل جزء من الدهان الأصفر = ٢٫٣٧٥ دينار

دمم (١١) ص ٦٢

$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{١}{٥} & -\frac{٢}{٥} \\ \frac{٢}{٥} & -\frac{٣}{٥} \end{vmatrix} = ٠٫٠٤$

$س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{-٠٫٤}{٠٫٠٤} = -١٠$

، $ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-٠٫٦}{٠٫٠٤} = -١٥$

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٤ & -\frac{٢}{٥} \\ ٥ & -\frac{٣}{٥} \end{vmatrix} = -٠٫٤$

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} \frac{١}{٥} & ٤ \\ \frac{٢}{٥} & ٥ \end{vmatrix} = -٠٫٦$

اختبار الوحدة السابعة

(١) يبيّن الجدول درجات الحرارة العظمى والصغرى المسجلة في ست مناطق.

المنطقة	الدرجة العظمى	الدرجة الصغرى
١	°٣٠	°٣٧-
٢	°٤٠	°٣٣-
٣	°٤٢	°١٤-
٤	°٣٧	°١-
٥	°٣٩	°٢٨-
٦	°٤٤	°٢-

(أ) اعرض البيانات في مصفوفة (في كل صف الدرجة العظمى والدرجة الصغرى لمنطقة). ما أبعاد هذه المصفوفة؟

$$\begin{bmatrix} ٣٠ & ٣٧- \\ ٤٠ & ٣٣- \\ ٤٢ & ١٤- \\ ٣٧ & ١- \\ ٣٩ & ٢٨- \\ ٤٤ & ٢- \end{bmatrix}$$

رتبة المصفوفة ٦×٢

(ب) حدّد $أ_{٢١}$. $أ_{٢١} = -١$

في التمرينين (٢–٣)، أوجد الناتج.

(٢) $$\begin{bmatrix} ٩ & ٢ \\ ٨ & ١- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٥- \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ ٢ & ٤- \end{bmatrix}$$

(٣) $$\begin{bmatrix} ١ & ١٣ & ١٦ \\ ٢٤ & ٣- & ١٩ \\ ٩ & ١٠ & ٢٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢٢ & ٧ & ١٨- \\ ٥ & ١٥ & ١١ \\ ١٢ & ١٤ & ١٧- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٣ & ٢٠ & ٢- \\ ٢٩ & ١٢ & ٣٠ \\ ١٩ & ٢٤ & ٣ \end{bmatrix}$$

في التمارين (٤ — ٧)، أوجد ناتج ضرب كل مما يأتي إن أمكن مع ذكر السبب وفي حالة عدم إمكانية الضرب اكتب "غير محدد".

(٤)

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٤ \\ ٦ & ١٢ \\ ١٨ & ٥٢ \end{bmatrix}$$

(٣×٢) (٢×٢)
متساويان

(٥)

$$-٣ \begin{bmatrix} ٣ & ١٠ \\ ٢١ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٩ & -٣٠ \\ -٦٣ & ١٢ \end{bmatrix}$$

(٦)

$$\begin{bmatrix} ٩ & ١٥ & ٦ \\ -٨ & ٢ & ٧ \\ ٦٣ & -٨ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & ٤ & ٠ \\ -٥ & ٠ & ٨ \end{bmatrix}$$

(٣×٣) (٢×٣)
غير متساويان
حاصل الضرب غير محدد

(٧)

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ٣ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

(٢×٢) (٢×٢)
متساويان

في التمرينين (٨ — ٩)، أوجد محدد كل مصفوفة.

(٨)

$$\begin{bmatrix} -٦ & -٧ \\ ٥ & ٨ \end{bmatrix} \quad \Delta = (-٦ \times ٨) - (٥ \times -٧) = -١٣$$

(٩)

$$\begin{bmatrix} ١ & -٥ \\ -٢ & ٩ \end{bmatrix} \quad \Delta = (١ \times ٩) - (-٢ \times -٥) = -١$$

في التمرينين (١٠ — ١١)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة وإلّا فاكتب (لا يوجد).

(١٠)

$$\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} \quad \underline{P}^{-١} = \frac{١}{٦} \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٣ & ٦ \end{bmatrix}$$

(١١)

$$\begin{bmatrix} ٧ & ٨ \\ -١٤ & -١٦ \end{bmatrix} \quad \Delta = \text{صفر}$$

∴ لا يوجد نظير ضربي

(١٢) س = $\begin{bmatrix} ١٠- & ٤- \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١١- \\ ٩ \end{bmatrix}$

في التمارين (١٢–١٧)، حل في س.

(١٢) $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ١- & ١- \end{bmatrix} \times$ س $= \begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \end{bmatrix}$

(١٣) $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ١- & ٤ \end{bmatrix} -$ س $= \begin{bmatrix} ٨ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

(١٤) س $+ \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٦ \\ ١- & ٢ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٨ & ١ & ٠ \\ ١٤ & ٣ & ١- \end{bmatrix}$

(١٥) $\begin{bmatrix} ٣- & ٢- \\ ١ & ١ \end{bmatrix} \times$ س $= \begin{bmatrix} ٨ & ١- \\ ٦ & ٠ \end{bmatrix}$

(١٦) ٤س $+ ٣ \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٨ \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix}$

(١٧) ٢س $= \frac{١}{٤} \begin{bmatrix} ٦- & ٢ \\ ٨ & ٨- \end{bmatrix}$

رقم (١٧) س $= \frac{١}{٨} \begin{bmatrix} ٦- & ٢ \\ ٨ & ٨- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٤}- & \frac{١}{٤} \\ ١ & ١- \end{bmatrix}$

(١٨) حل النظام: $\begin{cases} ٢س - ص = ٢ \\ ٢س - ٢ص = ٤ \end{cases}$ مستخدمًا النظير الضربي.

(١٩) حل النظام: $\begin{cases} -٣س + ٥ص = -٤ \\ س - ٣ص = ٤ \end{cases}$ مستخدمًا طريقة كرامر.

(٢٠) اكتب مصفوفتين أ، ب كل منهما من الرتبة ٢ × ٢. أثبت أن ضرب المصفوفات هو غير إبدالي.

(٢١) هل كل مصفوفة مما يلي هي النظير الضربي للأخرى؟

$\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣- & ١ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ١- & ١- \\ ٣- & ٢- \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣- & ١ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ١- & ١- \\ ٣- & ٢- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

∴ كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى

(٢٢) اشتريت ١٠ قرنفلات و٥ أقحوانات بمبلغ ١٢,٥٠٠ دينارًا. وبعد ظهر اليوم نفسه اشتريت ٥ قرنفلات و٨ أقحوانات بمبلغ ١١,٧٥٠ دينارًا. فما سعر القرنفلة الواحدة والأقحوانة الواحدة باستخدام المصفوفات؟

انظر كتاب الحل

١٠ س + ٥ ص = ١٢,٥٠٠
٥ س + ٨ ص = ١١,٧٥٠

$\begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ٥ & ٨ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢,٥٠٠ \\ ١١,٧٥٠ \end{bmatrix}$

رقم (١٥) ص ٦٦ $\text{س} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 20 & -1 \\ -26 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ 26 & -1 \end{bmatrix}$

رقم (١٦) ص ٦٦ $4\,\text{س} + \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

$4\,\text{س} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$\text{س} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

رقم (١٨) ص ٦٦

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ ∴ س = ٠ ، ص = -٢

رقم (١٩) ص ٦٦

$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 4$ ، $\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -8$

، $\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8$ ∴ $\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-8}{4} = -2$ ، $\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-8}{4} = -2$

رقم (٢٠) ص ٦٦

$\text{أ} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{أ} \times \text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$\text{ب} \times \text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ∴ $\text{أ} \times \text{ب} \neq \text{ب} \times \text{أ}$

رقم (٢٢) ص ٦٦

تكلفة الكل $\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \frac{1}{55}\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12,500 \\ 11,750 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,750 \\ 1 \end{bmatrix}$ ∴ س = ٠,٧٥٠ ، ص = ١

∴ سعر القرنفلة = ٠,٧٥٠ دينار ، سعر الأقحوانة = ١ دينار

تمارين إثرائية

(١) لنعتبر $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -١ & -٣ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$

$|\underline{أ}| = ٤$ يوجد نظير ضربي لـ $\underline{أ}$

$|\underline{ب}| = ١$ " " ضربي لـ $\underline{ب}$

$\underline{أ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٥ \end{bmatrix}$

(أ) هل للمصفوفات: $\underline{أ}$، $\underline{ب}$، $\underline{أ} + \underline{ب}$ نظير ضربي؟

$\underline{أ} + \underline{ب}$ = ٤ يوجد نظير ضربي لـ $\underline{أ} + \underline{ب}$

(ب) أوجد $\underline{أ}^{-١}$، $\underline{ب}^{-١}$، $(\underline{أ} + \underline{ب})^{-١}$.

$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب}^{-١} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$ ، $(\underline{أ} + \underline{ب})^{-١} = \frac{١}{٤}\begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{٥}{٤} & \frac{-١}{٤} \\ \frac{-١}{٤} & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$

(جـ) وضّح ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة:

إذا كانت $\underline{أ}$، $\underline{ب}$ مصفوفتان ذات نظير ضربي، $\underline{أ} + \underline{ب}$ هي مصفوفة ذات نظير ضربي فإن

$(\underline{أ} + \underline{ب})^{-١} = \underline{أ}^{-١} + \underline{ب}^{-١}$. $\underline{أ}^{-١} + \underline{ب}^{-١} = \begin{bmatrix} \frac{٥}{٤} & \frac{٤}{٤} \\ -\frac{١}{٤} & -\frac{١}{٤} \end{bmatrix}$ ∴ العبارة خطأ

(د) أعطِ مثلًا عن مصفوفتين ذات نظير ضربي شرط ألا يكون لمصفوفة مجموعهما نظيرًا ضربيًا.

$\underline{أ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

المصفوفات $\underline{أ}$، $\underline{ب}$ لها نظير ضربي أما المصفوفة $(\underline{أ} + \underline{ب})$ ليس لها نظير ضربي

(٢) لنعتبر $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}$

(أ) أوجد $\underline{أ} + \underline{ب}$، ثمّ $(\underline{أ} + \underline{ب})^{٢}$. $\underline{أ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٧ & ٠ \\ ٣ & -٦ \end{bmatrix}$

$(\underline{أ} + \underline{ب})^{٢} = \begin{bmatrix} ٧ & ٠ \\ ٣ & -٦ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٧ & ٠ \\ ٣ & -٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٤٩ & ٠ \\ ٣٦ & ٣٦ \end{bmatrix}$

(ب) أوجد $\underline{أ}^{٢}$، $\underline{أ} \times \underline{ب}$، $\underline{ب}^{٢}$ ثمّ $\underline{أ}^{٢} + ٢\underline{أ} \times \underline{ب} + \underline{ب}^{٢}$. قارن بين إجابتيك في (ب)، (أ).

$\underline{أ}^{٢} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٦ & ١٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٤ \\ ١٥ & ١١ \end{bmatrix}$

$\underline{ب}^{٢} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٣ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

$\underline{أ}^{٢} + ٢\underline{أ} \times \underline{ب} + \underline{ب}^{٢} = \begin{bmatrix} ٤٦ & ١٣ \\ ٤٢ & ٣٩ \end{bmatrix}$ $(\underline{أ} + \underline{ب})^{٢} \neq \underline{أ}^{٢} + ٢\underline{أ} \times \underline{ب} + \underline{ب}^{٢}$

$\underline{أ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٥ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$

(جـ) طبّق الخطوتين (أ)، (ب) باستخدام $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -٥ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$. $= \begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix}$

$(\underline{أ} + \underline{ب})^٢ = \begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٣ & ٠ \\ ٠ & -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٠ \\ ٠ & ٩ \end{bmatrix}$

$\underline{أ}^٢ = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٦ & ١٣ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب}^٢ = \begin{bmatrix} -٥ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٥ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٢ & -٤ \\ ١٢ & -٢ \end{bmatrix}$

$\underline{أ} \times \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٥ & ١ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٧ & ١ \\ -٣ & -١ \end{bmatrix}$

$\underline{أ}^٢ + ٢\underline{أ} \times \underline{ب} + \underline{ب}^٢ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٦ & ١٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١٤ & ٢ \\ -٦ & -٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢٢ & -٤ \\ ١٢ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٩ & ٠ \\ ٠ & ٩ \end{bmatrix}$ ∴ $(\underline{أ} + \underline{ب})^٢ = \underline{أ}^٢ + ٢ \times \underline{أ} \times \underline{ب} + \underline{ب}^٢$

(٣) إذا طرحنا ثلاثة أمثال عمر ربيع من مثلي عمر جاد نحصل على ٥. أمّا إذا طرحنا ثلاثة أمثال عمر جاد من خمسة أمثال عمر ربيع نحصل على -٢.

(أ) مثّل المسألة أعلاه على شكل نظام معادلتين من متغيرين.

نفرض أن عمر جاد = س ، عمر ربيع = ص

٢س − ٣ص = ٥

٣س − ٥ص = ٢

٥ص − ٣س = −٢

(ب) اكتب نظام معادلات على شكل معادلة مصفوفية: $\underline{أ} \times \underline{س} = \underline{ب}$ ،

حيث $\underline{أ}$ هي مصفوفة مربّعة من الرتبة ٢ × ٢، $\underline{س} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب}$ من الرتبة ٢ × ١.

$\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢ \end{bmatrix}$

(جـ) أوجد محدد المصفوفة $\underline{أ}$. هل للمصفوفة $\underline{أ}$ نظير ضربي؟ إذا كان لها نظيرًا ضربيًا فأوجد $\underline{أ}^{-١}$.

$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٥ \end{vmatrix} = -١٠ + ٩ = -١$ يوجد نظير ضربي

$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} -٥ & ٣ \\ -٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$

(د) أوجد قيم س، ص باستخدام $\underline{أ}^{-١}$.

$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٩ \\ ١١ \end{bmatrix}$ ∴ س = ١٩ ، ص = ١١

∴ عمر جاد = ١٩ ، عمر ربيع = ١١

(هـ) حل نظام معادلات مستخدمًا قاعدة كرامر. $\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = -١١$ ∴ $س = \frac{\Delta_س}{\Delta} = ١٩$

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٥ \end{vmatrix} = -١٠$ ، $\Delta_س = \begin{vmatrix} ٥ & -٣ \\ ٢ & -٥ \end{vmatrix} = -١٩$ ، $ص = \frac{\Delta_ص}{\Delta} = ١١$

(٤) لنأخذ المصفوفات التالية:

$$\underline{و} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}، \quad \underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ}^٢ = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

(أ) احسب $\underline{أ}^٢$، $\underline{أ}^٣$.

$$\underline{أ}^٣ = \underline{أ}^٢ \times \underline{أ} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

(ب) لكل عدد حقيقي س، نعتبر المصفوفة $\underline{م}$(س)، حيث إنّ:

$\underline{م}(س) = \underline{و} + س\,\underline{أ} + \frac{س^٢}{٢} \times (\underline{أ}^٢)$.

١. احسب: $\underline{م}(٠)$، $\underline{م}(٤)$.

$$\underline{م}(٠) = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} + ٠\,\underline{أ} + \frac{٠}{٢}(\underline{أ}^٢) = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\underline{م}(٤) = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٤ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٢ \\ ٠ & ١ & ٤ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

٢. س ، ص عددان حقيقيان، احسب $\underline{م}$ (س) × $\underline{م}$ (ص).

$$\underline{م}(س) \times \underline{م}(ص) = \begin{bmatrix} ١ & س & \frac{س^٢}{٢} \\ ٠ & ١ & س \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ص & \frac{ص^٢}{٢} \\ ٠ & ١ & ص \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & س + ص & \frac{ص^٢}{٢} + س ص + \frac{س^٢}{٢} \\ ٠ & ١ & س + ص \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

٣. برهن أنّ: $\underline{م}$(س) × $\underline{م}$(ص) = $\underline{م}$(س + ص).

$$\underline{م}(س + ص) = \begin{bmatrix} ١ & س + ص & \frac{(س + ص)^٢}{٢} \\ ٠ & ١ & س + ص \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} \quad \therefore \underline{م}(س) \times \underline{م}(ص) = \underline{م}(س + ص)$$

(جـ) تحقق من أنّ: $\underline{م}(س) = \begin{bmatrix} ١ & س & \frac{س^٢}{٢} \\ ٠ & ١ & س \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$$\underline{م}(س) = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & س & ٠ \\ ٠ & ٠ & س \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & \frac{س^٢}{٢} \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & س & \frac{س^٢}{٢} \\ ٠ & ١ & س \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

(٥) التفكير الناقد: لتكن $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{bmatrix}$. ما هي قيم العناصر أ، ب، جـ، د عندما يكون النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ}$ هو $\underline{أ}$؟ (مساعدة: هناك أكثر من إجابة صحيحة واحدة).

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix} \qquad \underline{أ}^{-١} = \frac{١}{-١} \begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix} = \underline{أ}$$