أوراق العمل

الصف الحادي عشر علمي

الفترة الدراسية الثانية

مـادة الرياضيـات

٢٠٢٣/٢٠٢٢

الإسم :

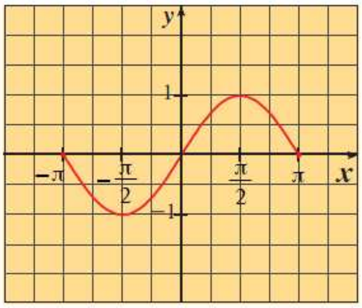
W.R.E

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب ، جيب التمام ، الظل)

الدوال الجيبية Sine Functions

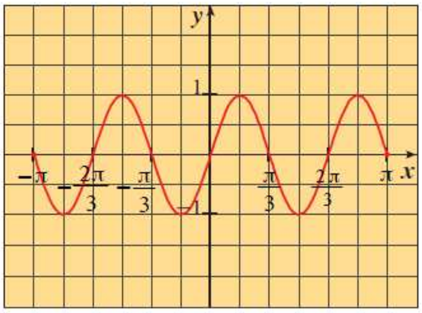
تسمّى الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ **دالة الجيب** والدالة على الصورة $y = a\cos bx$ **دالة جيب التمام** حيث $a \neq 0$, $b \neq 0$ وكل منها دالة دورية.

تمثل الأشكال التالية بيانات بعض دوال الجيب:



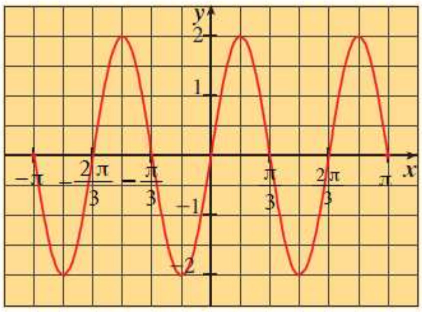
$y = \sin x$

شكل (1)



$y = \sin 3x$

شكل (2)



$y = 2\sin 3x$

شكل (3)

① تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية. ② $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0, 2\pi]$ ③ $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 46 رقم 1 : أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

ⓑ $y = \frac{1}{2}\cos(-x)$

ⓐ $y = -2\cos 5x$

كتاب الطالب مثال صـ 45 رقم 1 : أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

ⓑ $y = -5\cos\frac{x}{3}$

ⓐ $y = 2\cos x$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 46 رقم 2 :

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos bx$ إذا كانت:

(a) الدورة هي $\frac{\pi}{3}$ ، $a = -2$

(b) الدورة هي π ، $a = 0.25$

(c) الدورة هي 2 ، $a = 1$

كتاب الطالب مثال صـ 46 رقم 2 :

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ إذا كانت:

(a) الدورة هي $\frac{\pi}{2}$ ، $a = 3$

(b) الدورة هي 2π ، $a = -\frac{1}{2}$

(c) الدورة هي 3 ، $a = 1.5$

التمثيل البياني لدالة الجيب

التمثيل البياني للدوال المثلثية :

أولا : دالة الجيب

هي دالة مثلثية مجالها $\mathbb{R}$ ومداها $[-1,1]$، ودالة الجيب هي دالة دورية ذات دورة 2π

للحصول على التمثيل البياني لِـ $y=\sin x$ في دورة واحدة، تقسم الدورة الواحدة إلى أرباع، ثم نكوّن الجدول في الفترة $[0,2\pi]$ كالتالي:

$y = sinx$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinx					

من بيان دالة الجيب نلاحظ:

1. لأي عدد صحيح n فإن $\sin(n\pi)=0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x)=\sin x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$
3. دالة الجيب دالة فردية لأن: $\sin(-x)=-\sin x,\ \forall x\in\mathbb{R}$
4. منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل.
5. سعة الدالة هي: $\frac{\max f-\min f}{2}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 48 رقم 3 :

أوجد السعة والدورة ثم ارسم بيان كل من:

a $y=\frac{1}{2}\sin 4x$

تابع التمثيل البياني لدالة الجيب

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 48 رقم 3 : أوجد السعة والدورة ثم ارسم بيان كل من:

b $y=-4\sin x \;,\; x\in[-\pi \;,\; 2\pi]$

تابع كتاب الطالب مثال صـ 47 رقم 3 :

أوجد السعة و الدورة للدالة . ثم ارسم بيان الدالة

b $y=-2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \;,\; -4\pi\le x\le 4\pi$

التمثيل البياني لدالة جيب التمام

دالة جيب التمام :

مجال دالة جيب التمام $y = \cos x$، هو أيضًا $\mathbb{R}$ ومداها هو $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π
ونستطيع الحصول على التمثيل البياني للدالة $y = \cos x$ على مجالها عن طريق رسمها على الفترة $[0, 2\pi]$

$y = cosx$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cosx					

من بيان دالة جيب التمام نلاحظ أن:

1. لأي عدد صحيح n فإن $\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x) = \cos x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x = 2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x = \pi + 2n\pi$
3. دالة جيب التمام دالة زوجية لأن: $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$
4. محور الصادات هو خط تناظر لمنحنى الدالة.
5. سعة الدالة هي: $a = \frac{\max f - \min f}{2}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 49 رقم 4 :

أوجد السعة والدورة، ثم ارسم بيان الدالة:

ⓐ $y = 3\cos 2x$

تابع التمثيل البياني لدالة جيب التمام

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 49 رقم 4 : أوجد السعة والدورة ثم ارسم بيان الدالة:

(b) $y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)\ ,\ 0 \le x \le 2\pi$

كتاب الطالب مثال صـ 49 رقم 4 :

أوجد السعة والدورة، ثم ارسم بيان الدالة:

(b) $y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)\ ,\ x \in [-3\pi\ ,\ 3\pi]$

ثالثا دالة الظل : هي الدالة المثلثية على الصورة $y = \tan x$ وتكتب:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \ : \ \cos x \neq 0$$

مجالها: $D = \mathbb{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi \ , \ n \in \mathbb{Z}\right\}$

ومداها: $\mathbb{R}$

وهي دالة دورية ذات دورة π

وللحصول على التمثيل البياني لـ: $y = \tan x$

في دورة واحدة $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
tanx					

من بيان دالة الظل نلاحظ أن دالة الظل:

1. ليس لها سعة.
2. لأي عدد صحيح n فإن $\tan(n\pi) = 0$
3. لأي عدد صحيح n فإن $\tan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ غير معرف.
   وتسمى المستقيمات $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ محاذيات رأسية لبيان الدالة $y = \tan x$
4. دالة فردية لأن: $x \in D \ , \ \tan(-x) = -\tan x$
5. منحناها متناظر حول نقطة الأصل.

وبصفة عامة: الدالة $y = a \tan bx$،

دورتها: $\frac{\pi}{|b|}$ وتكرر نفسها في الفترة $\left(\frac{-\pi}{2b} \ , \ \frac{\pi}{2b}\right)$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 51 رقم 5 : أوجد الدورة، ثم ارسم بيان الدالة: $y = -\tan x$ (a)

تابع التمثيل البياني لدالة الظل

تابع كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 51 رقم 5 :

أوجد الدورة، ثم ارسم بيان الدالة:

ⓑ $y = \frac{1}{2}\tan x$

خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

$\tan x$	$\cos x$	$\sin x$	الخاصية
π	2π	2π	الدورة
$\mathbb{R} - \left\{x , x = \frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$	$(-\infty , \infty)$	$(-\infty , \infty)$	المجال
$(-\infty , \infty)$	$[-1 , 1]$	$[-1 , 1]$	المدى
$x = n\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$	$x = n\pi$	الأصفار
فردية	زوجية	فردية	زوجية أو فردية

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(b\theta)$ حيث السعة 5 والدورة 3π هي $y = 5\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ (a) (b)

(2) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{2}$ وسعتها 3 يمكن أن تكون $y = 3\sin\left(\frac{\pi\theta}{2}\right)$ (a) (b)

(3) الدالة $y=3\tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ دورتها $\frac{4}{3}\pi$ (a) (b)

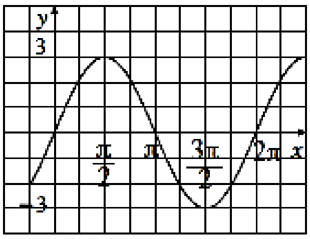
(5) سعة الدالة $y=-5\cos 2x$ هي -5 (a) (b)

(6) في الدالة f حيث $f(x)=a\cos bx$ يكون: $2|a| = \max f + \min f$ (a) (b)

(7) الدالتان f, g حيث $g(x)=\tan 4x$ ، $f(x)=\cos 8x$ لهما نفس الدورة. (a) (b)

في التمارين (8–17)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(8) البيان التالي يمثل بيان الدالة.

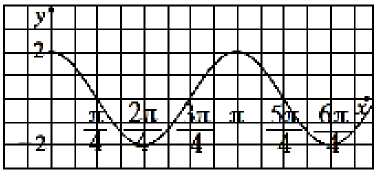


(a) $f(x)=3\cos x$
(b) $f(x)=3\sin x$
(c) $f(x)=-3\sin x$
(d) $f(x)=\sin 3x$

(9) لتكن $f(x)=3\tan 2x$ فإن:

(a) السعة = 1
(b) السعة = 2
(c) السعة = 3
(d) f ليس لها سعة

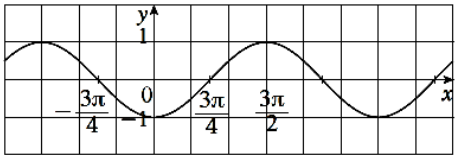
(10) ليكن بيان f كما في الشكل التالي:



فإن f يمكن أن تكون:

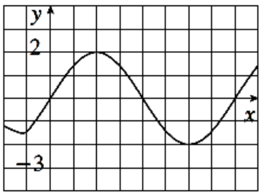
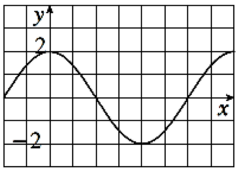
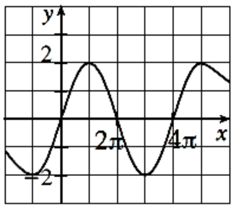
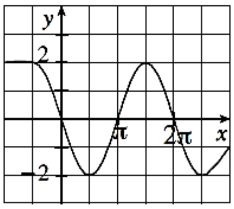
ⓐ $2\cos 2x$ ⓑ $\cos 2x$ ⓒ $\cos\frac{x}{2}$ ⓓ $\sin 2x$

(11) ليكن g دالة دورية بيانها كما في الشكل التالي فإن الدورة تساوي:



ⓐ π ⓑ 2π ⓒ 3π ⓓ $\frac{6\pi}{4}$

(12) لتكن الدالة g حيث: $g(x) = a\sin bx$ فإن بيان g لا يمكن أن يكون:

ⓐ  ⓑ  ⓒ  ⓓ 

(17) في الدالة المثلثية $y = -2\sin\left(\frac{3}{5}x\right)$ السعة والدورة هما:

ⓐ $-2\ ,\ \frac{3\pi}{5}$ ⓑ $2\ ,\ \frac{10\pi}{3}$

ⓒ $2\ ,\ \frac{3\pi}{5}$ ⓓ $2\ ,\ \frac{2\pi}{15}$

كراسة التمارين صـ ٢٠ : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

قانون الجيب

في أي مثلث ABC :

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 64 رقم 1 :

حل ΔABC حيث: $\alpha=36^\circ\ ,\ \beta=48^\circ\ ,\ a=8\text{ cm}$

كتاب الطالب مثال صـ 64 رقم 1 :

حل ΔABC حيث: $\alpha=40^\circ\ ,\ \beta=60^\circ\ ,\ a=4\text{ cm}$

تابع قانون الجيب

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 66 رقم 2 :

حل ΔABC حيث: $a = 7\,\text{cm}\ ,\ b = 6\,\text{cm}\ ,\ \alpha = 26.3^\circ$

كتاب مثال أن تحل صـ 66 رقم 2 :

حل ΔABC حيث: $a = 3\,\text{cm}\ ,\ b = 2\,\text{cm}\ ,\ \alpha = 40^\circ$

تابع قانون الجيب

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 67 رقم 3 :

حل ΔABC حيث: $a = 6\text{ cm}\ ,\ b = 7\text{ cm}\ ,\ \alpha = 45^\circ$

كتاب مثال أن تحل صـ 67 رقم 3 :

حل ΔABC حيث: $a = 5\text{ cm}\ ,\ b = 8\text{ cm}\ ,\ \alpha = 30^\circ$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (3–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $m(\widehat{A})=100^\circ$, $m(\widehat{B})=30^\circ$, $BC=20\text{ cm}$ فإنّ: $AC=10.154\text{ cm}$ (a) (b)

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{B})=80^\circ$, $AB=12\text{ cm}$, $AC=16\text{ cm}$ فإنّ: $m(\widehat{C})=50^\circ$ (a) (b)

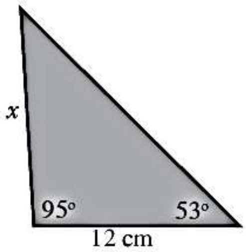
(3) في كل مثلث ABC يكون: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{\sin\gamma}{c}$ (a) (b)

في التمارين (9–4)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(4) في المثلث ABC: $m(\widehat{A})=80^\circ$, $m(\widehat{B})=40^\circ$, $AC=10\text{ cm}$ فإنّ طولي $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ يساويان:

(a) 7.43 cm , 15.32 cm
(b) 6.53 cm , 13.47 cm
(c) 13.47 cm , 15.32 cm
(d) 7.43 cm , 6.53 cm

(5) في المثلث المقابل، x تساوي حوالي:



(a) 8.6 cm
(b) 15 cm
(c) 18.1 cm
(d) 19.2 cm

(6) مثلث قياسات زواياه: $70^\circ, 60^\circ, 50^\circ$، طول أصغر ضلع فيه هو 9 cm
طول أطول ضلع حوالي:

(a) 11 cm
(b) 11.5 cm
(c) 12 cm
(d) 12.5 cm

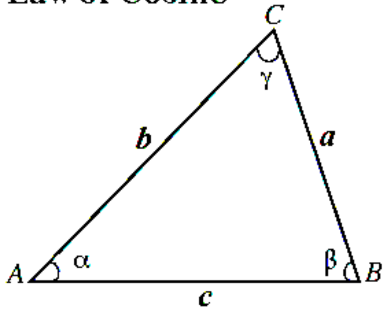
(7) القياسات المعطاة في المثلث ABC: $m(\widehat{A})=56^\circ$, $AC=23\text{ cm}$, $AB=19\text{ cm}$، طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) 12 cm
(b) 18 cm
(c) 19 cm
(d) لا يمكن استخدام قانون الجيب

كراسة التمارين صـ 26 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Law of Cosine



قانون جيب التمام

في ΔABC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

كتاب الطالب مثال صـ 71 رقم 1 :

حل ΔABC حيث: $\gamma = 60^\circ$, $b = 3\text{ cm}$, $a = 2\text{ cm}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 72 رقم 1 :

حل ΔABC حيث: $\gamma = 20^\circ$, $b = 5\text{ cm}$, $a = 11\text{ cm}$

تابع قانون جيب التمام

كتاب الطالب مثال صـ 72 رقم 2 :

حل ΔABC حيث: $a = 4\ \text{cm}\ ,\ b = 3\ \text{cm}\ ,\ c = 6\ \text{cm}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 72 رقم 2 : في ΔABC حيث: $a = 9\ \text{cm}\ ,\ b = 7\ \text{cm}\ ,\ c = 5\ \text{cm}$

أوجد قياس الزاوية الأكبر.

تابع قانون جيب التمام الجيب – البنود الموضوعية

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $AB = 24\,cm$, $AC = 19\,cm$, $BC = 27\,cm$ فإنّ: $m(\widehat{A}) \approx 76.82^\circ$ (a) (b)

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 60^\circ$, $BC = 44\,cm$, $AB = 20\,cm$ فإنّ: $AC \approx 50.5\,cm$ (a) (b)

(3) في المثلث ABC: $b^2 + c^2 < 2bc\cos A$ (a) (b)

(4) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث تساوي $5\,cm, 8\,cm, 12\,cm$ فإن قياس الزاوية الكبرى في هذا المثلث يساوي حوالى 133.4° (a) (b)

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) في المثلث ABC : $m(\widehat{C}) = 60^\circ$, $AC = 10\,cm$, $BC = 20\,cm$ فإن طول $\overline{AB}$ يساوي:

(a) $AB = 10\sqrt{7}\,cm$ (b) $AB = 10\sqrt{3}\,cm$ (c) $AB = 12.4\,cm$ (d) $AB = 29\,cm$

(6) في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 120^\circ$, $AB = 30\,cm$, $AC = 40\,cm$ فإنّ طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) $BC \approx 60.8\,cm$ (b) $BC \approx 36\,cm$ (c) $BC \approx 68\,cm$ (d) $BC \approx 21\,cm$

(7) إذا كان $BC = 25\,cm$, $AC = 17\,cm$, $AB = 12\,cm$ فإنّ قياس الزاوية الكبرى في المثلث ABC يساوي حوالى:

(a) 118° (b) 110° (c) 125° (d) 100°

كراسة التمارين صـ 26 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

مساحة المثلث

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 76 رقم 1 :

أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 4\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 3\,\text{cm}$

قاعدة هيرون

تعطى مساحة مثلث ABC أطوال أضلاعه a, b, c بالقاعدة:

$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث: (نصف محيط المثلث) $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \text{semiperimeter}$

كتاب الطالب حاول أن تحل صـ 75 رقم 2 :

أوجد مساحة ABC حيث: $a = 4\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 3\,\text{cm}$

كراسة التمارين حاول أن تحل صـ 30 رقم 2 :

أوجد مساحة المثلث ABC بطريقتين مختلفتين. $a = 4\,\text{cm}\ ,\ b = 5\,\text{cm}\ ,\ c = 8\,\text{cm}$

كتاب الطالب مثال صـ 76 رقم 2 :

أوجد مساحة سطح مثلث أطوال أضلاعه: $7\,\text{cm}\ ,\ 5\,\text{cm}\ ,\ 8\,\text{cm}$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا عرفت أطوال أضلاع مثلث فيمكن استخدام قاعدة هيرون لإيجاد مساحته. (a) (b)

(2) لا يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية قياسات زواياه الثلاثة. (a) (b)

(3) لا يمكن استخدام قاعدة هيرون إذا كان المثلث قائم الزاوية. (a) (b)

(4) إن معرفة قياس إحدى زوايا مثلث هو شرط ضروري لإيجاد مساحته. (a) (b)

(5) إذا كان a, b طولا ضلعين متتاليين في متوازي أضلاع و θ قياس الزاوية بينهما فإن مساحة متوازي الأضلاع تساوي $ab\sin\theta$ (a) (b)

(6) في المثلث ABC: $AC = 9\,\text{cm}$, $AB = 7\,\text{cm}$, $BC = 5\,\text{cm}$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالي $15\,\text{cm}^2$ (a) (b)

في التمارين (10–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كان: $a = 2\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$, $m(\widehat{C}) = 40^\circ$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالي:

(a) $4.6\,\text{cm}^2$ (b) $3.86\,\text{cm}^2$

(c) $1.93\,\text{cm}^2$ (d) $2.3\,\text{cm}^2$

(8) مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه 9 cm , 8 cm , 7 cm هي:

a) $6\sqrt{15}\text{ cm}^2$

b) $12\sqrt{5}\text{ cm}^2$

c) $16\sqrt{3}\text{ cm}^2$

d) $18\sqrt{3}\text{ cm}^2$

(9) مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه a هي:

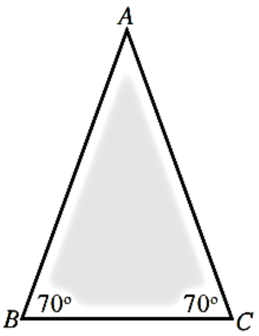
a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\text{ units}^2$

b) $a^2\text{ units}^2$

c) $\frac{1}{2}a^2\text{units}^2$

d) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\text{ units}^2$

(10) إذا كانت مساحة المثلث ABC تساوي حوالى 8 cm^2 فإن طول $\overline{AB}$ هو حوالى:



a) 5 cm

b) 8 cm

c) 4 cm

d) 6 cm

كراسة التمارين صـ 30 : البنود الموضوعية

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10