****

الوحدة الأولى : الأعداد و العمليات عليها

بند ١-١ : خواص نظام الأعداد الحقيقية

الأعداد الحقيقية	
الأعداد النسبية	الأعداد غير النسبية
أمثلة: $\frac{١}{٣}$ ، ١٤ , ٠ ، $-٢\frac{١}{٣}$	أمثلة:
الأعداد الصحيحة .... -٢، -١، ٠، ١، ٢، ... الأعداد الطبيعية (الكلية): ٠، ١، ٢، ٣، ...	$\sqrt{٣}$ π $\sqrt[٣]{٥}$ ١,٣٤٣٣٤...

مثال(١) : حدد أياً من الأعداد التالية عدداً نسبياً و أيها عدداً غير نسبي .

(أ) $-\frac{١٨}{٥}$ (ب) $\sqrt{٤١}$

(جـ) ٠,٣٣٣...... (د) ١,٠١٠٠١٠٠٠١......

(هـ) $\frac{\sqrt{٤}}{٣}$ (و) ٥ π

****

٢ – خواص عمليتي الجمع والضرب على الأعداد الحقيقية

Properties of Addition and Multiplication of Real Numbers

لكل أ، ب، جـ ∈ ح فإن:

الخاصية	الجمع	الضرب
الإبدالية	أ + ب = ب + أ	أ × ب = ب × أ
التجميع	(أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)	(أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ)
المحايد	أ + ٠ = ٠ + أ = أ	أ × ١ = ١ × أ = أ
المعكوس (النظير)	أ + (–أ) = (–أ) + أ = ٠	أ × $\frac{١}{أ}$ = $\frac{١}{أ}$ × أ = ١ (أ ≠ ٠)
التوزيعية	أ × (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ (ن + جـ) × أ = ن × أ + جـ × أ	

٣ – ترتيب الأعداد الحقيقية

Order of Real Numbers

مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة مرتبة، هذا يعني أننا نستطيع مقارنة أي عددين حقيقيين باستخدام رموز علاقات الترتيب (< أو > أو =). والقول أن عددًا ما هو «أصغر من» أو «أكبر من» أو «يساوي» الآخر.

الترتيب وخواصه

Properties of Order

ترتيب الأعداد الحقيقية

ليكن أ، ب عددين حقيقيين

الكتابة بالرموز	التعريف	القراءة
أ > ب	أ – ب موجب	أ أكبر من ب
أ < ب	أ – ب سالب	أ أصغر من ب
أ ≥ ب	أ – ب موجب أو صفر	أ أكبر من أو يساوي ب
أ ≤ ب	أ – ب سالب أو صفر	أ أصغر من أو يساوي ب

حقيقة هامة

لأي عددين حقيقيين أ، ب.
تعبير واحد فقط مما يلي هو صحيح:
أ > ب أو أ = ب أو أ < ب

مثال(٢) :

استخدم >، <، = لملء الفراغ بحيث تصبح كل عبارة مما يلي صحيحة.

$\sqrt{٦}$ ☐ $\sqrt{١٠}$ ٠,١٤ ☐ $\sqrt{١٠}$ ٠,٣ ☐ ٠,$\overline{٣}$

****

خاصية الكثافة :

يوجد بين أي نقطتين مختلفتين على خط الأعداد عدد لانهائي من النقاط ، و بالتالي بين أي عددين حقيقين مختلفين يوجد عدد لانهائي من الأعداد الحقيقية .

مثال(٣) : (أ) . أعط خمسة أعداد حقيقية بين ٣,١٤ ، ٣,١٥

(ب) أعط خمسة أعداد حقيقية بين ١,٤١٤ ، ١,٤١٥

الفتـــــرات :

أولاً :الفترات المحدودة :

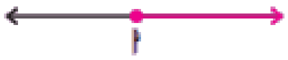
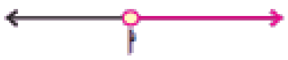
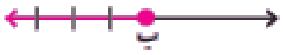
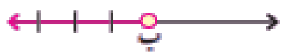
رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[أ، ب]	مغلقة	أ ≤ س ≤ ب	أ ب
(أ، ب)	مفتوحة	أ < س < ب	أ ب
[أ، ب)	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	أ ≤ س < ب	أ ب
(أ، ب]	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	أ < س ≤ ب	أ ب
الأعداد أ، ب هما نقطتا الحدود لكل فترة حيث أ الحد الأدنى للفترة، ب الحد الأعلى للفترة.			

مثال: اكتب نوع الفترة و رمز المتباينة و التمثيل البياني

الفترة	نوعها	رمز المتباينة	التمثيل البياني
(-٢ ، ١)			
[-٢ ، ٣]			
[-٢ ، ٤)			
(١ ، ٦]			

****

ثانياً : الفترات غير المحدودة :

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
[أ، ∞)	نصف مغلقة وغير محدودة من الأعلى	س ≥ أ	
(أ، ∞)	مفتوحة وغير محدودة	س > أ	
(-∞، ب]	نصف مغلقة وغير محدودة من الأسفل	س ≤ ب	
(-∞، ب)	مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	س < ب	

مثال(٤) : اكتب نوع الفترة و رمز المتباينة و التمثيل البياني لكل من الفترات التالية :

الفترة	نوعها	رمز المتباينة	التمثيل البياني
(-∞ ، ٣]			
(-٤ ، ∞)			
[٤ ، ∞)			
(-∞ ، ٢)			

اليوم : التاريخ : / / ٢٠١٨

****

بند ١-٣ : حل المتباينات

مثال(١) : أوجد مجموعة حل المتباينة و مثل مجموعة الحل على خط الأعداد لكل مما يلي :

٨ ك ــ ١٥ > ٧٣

٦ - ٥س > -٤

$\frac{\text{س}}{-٢}$ > ٥

$\frac{\text{ص}}{٤}$ ≤ ١

٢(س+٢) -٣س ≤ ٤

٣(س + ٤) + ٥س ≥ ٢

اليوم : التاريخ : / / ٢٠١٨

****

-٥ < ٢س+٥ < ٣

٣س + ٧ < ٣(س – ٣)

٦س - ١٥ > ٤س +١

٢ص +٣ > ٥ص - ٤

٧س > -٣٥ و ٥س ≤ ٣٠

٩ س ≥ -٢٧ أو ٤س ≤ ٣٦

****

بند ١ – ٤ : **القيمة المطلقة :**

تعريف:

لكل عدد حقيقي س يكون:

$$|س| = \begin{cases} س & \text{إذا كان } س > ٠ \\ ٠ & \text{إذا كان } س = ٠ \\ -س & \text{إذا كان } س < ٠ \end{cases}$$

بعض خواص القيمة المطلقة للأعداد الحقيقية

ليكن أ، ب $\in$ ح

① $|أ| \geq ٠$
② $|-أ| = |أ|$
③ $|أ \times ب| = |أ| \times |ب|$
④ $\left|\frac{أ}{ب}\right| = \frac{|أ|}{|ب|}$ ، حيث ب $\neq$ ٠
⑤ $|أ| \geq أ$
⑥ $|أ - ب| = |ب - أ|$

مثال(١) : أعد تعريف كلاً مما يلي دون استخدام رمز القيمة المطلقة :

(أ) $|س + ٣|$

(ب) $|١ - س| + ٣$

****

حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة

نتيجة :

١) إذا كان عدداً حقيقياً موجباً فإن حل المعادلة |س| = م هو س = م أو س =-م وتكون مجموعة الحل {-م ، م }

٢) إذا كان م عدداً حقيقياً سالباً فإن المعادلة |س|= م مجموعة حلها ∅

٣) إذا كان م=٠ فإن |س| =م مجموعة حلها {٠}

مثال(٢) : أوجد مجموعة حل المعادلة ، ثم تحقق من صحة الحل .

| ٥س +٣ | = ٨

|٢ص – ٣| = ٧

٣ | ٢س+٤| - ٦ = ٠

٤ |٢س+٣| - ٥ = ١١

****

مثال(٣) : أوجد مجموعة حل كل معادلة :

| س+٤| +٢٣ = ١٧

٥ + | -٢س + ٤ | = ٠

|٢س - ١ | = ٠

| ٥ص + ٣ | = ٠

هـ) أوجد مجموعة حل المعادلة :

| ٢س - ٣ | = | س + ١|

| ص – ٥ | = | ٢ص + ٣|

اليوم : التاريخ : / / ٢٠١٨

****

أوجد مجموعة حل كل معادلة :

| ٢س + ٣ | = ٣س – ٢

| ٤س – ١ | = س + ٢

****

حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة :

ليكن أ عددًا حقيقيًا موجبًا.

١ |س| ≤ أ تكافئ -أ ≤ س ≤ أ

٢ |س| ≥ أ تكافئ س ≤ - أ أو س ≥ أ

مثال(٤) : أوجد مجموعة حل كل متباينة ، ومثل الحل على خط الأعداد .

|٢س + ٣ | ≤ ٩

|٣س – ٦ | +٣ > ١٥

اليوم : التاريخ : / / ٢٠١٨

****

أوجد مجموعة حل كل متباينة ، ومثل الحل على خط الأعداد .

|ص - ٤ | ≤ ١٢

٣|٢ص - ١| ≤ ٢١

****

بند ١ – ٥ : دالة القيمة المطلقة

رأس منحنى الدالة ص = |أس + ب| + جـ هو النقطة $\left(-\frac{ب}{أ} \text{ ، } جـ \right)$

مثال(١) : ضع جدول قيم لكل دالة ثم ارسمها بيانياً

١) ص = | س – ١ |

س					
ص					

٢) ص = - | ٢س + ٤ | +١

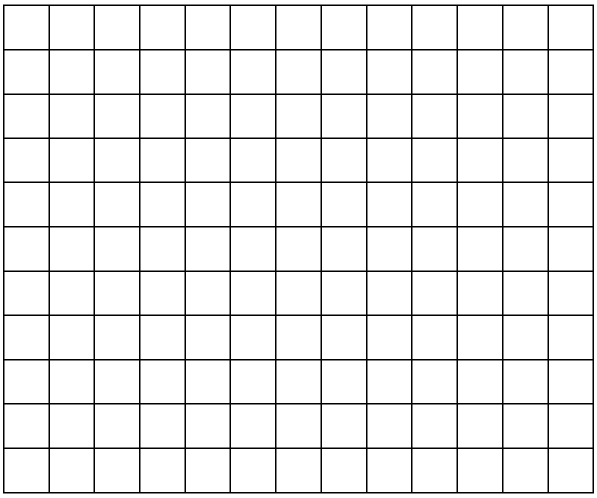
س					
ص					

****

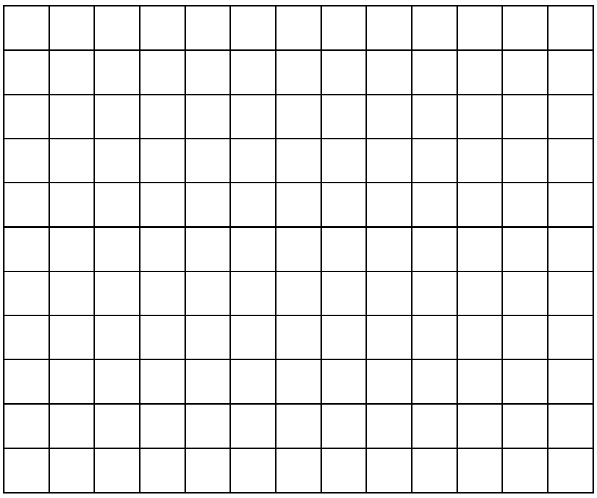
رسم بيان دوال المطلق باستخدام بعض التحويلات الهندسية

مثال(٣) : استخدم دالة المرجع و ارسم كل دالة :

١) ص = | س - ٤|



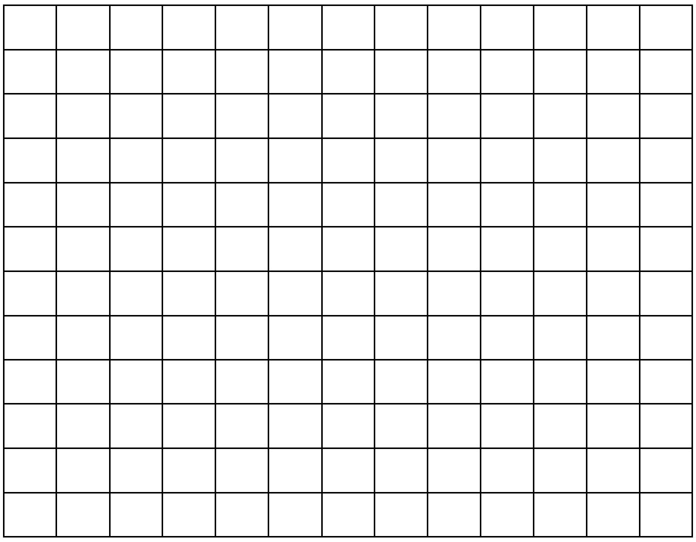
٢) ص = - | س +٣ |



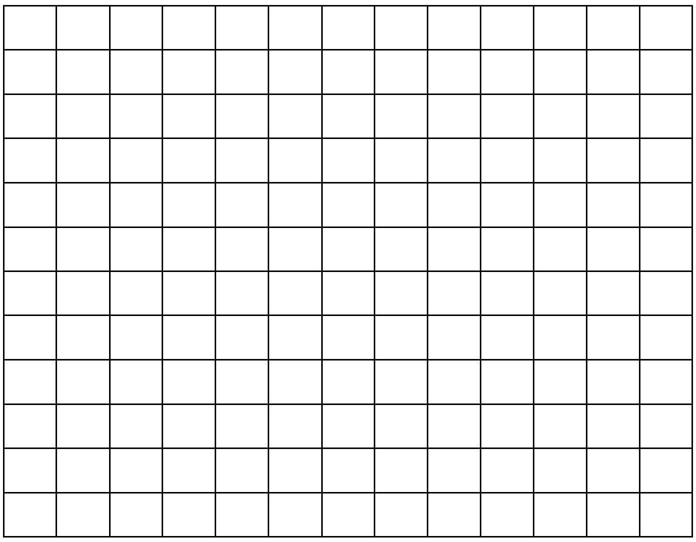
****

استخدم دالة المرجع والانسحاب ارسم بيان الدالة :

ص = | س | - ٣



ص = - | س | +٢



اليوم :   التاريخ :   /   / ٢٠١٨

****

استخدم دالة المرجع والانسحاب ارسم بيان الدالة :

ص = | س + ٢ | - ٣

ص = - | س – ٥| +١

****

بند ١ -٦ : حل نظام معادلتين خطيتين

مثال(١) : أوجد مجموعة حل كل نظام بيانياً . تحقق من إجابتك .

١) ص = س – ٢
ص = - ٢ س + ١

ص = س – ٢			
س			
ص			

ص = - ٢ س + ١			
س			
ص			

٢) ٣س + ص = ٥
س – ص = ٧

ص = -٣س + ٥			
س			
ص			

ص = س - ٧			
س			
ص			

****

مثال(٢) : أوجد مجموعة حل كل نظام مما يلي مستخدماً (طريقة الحذف) :

٢س + ٣ص = ١١
-٢س + ٤ص = ١٠

أوجد مجموعة حل كل النظام مستخدماً طريقة الحذف :

٢س - ص = ٣
٤س + ص = ٩

****

٢س + ٣ص = ١٢
٥س – ص = ١٣

س + ص = ١٢
٣س – ص = ٨

مثال(٣) : أوجد مجموعة حل كل نظام مستخدماً طريقة التعويض

ت = ٢ر + ٣
٥ ر – ٤ت = ٦

اليوم : التاريخ : / / ٢٠١٨

****

بند ١ – ٧ : حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد

أولاً : حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد بإكمال المربع

مثال(١) : أوجد مجموعة حل كل معادلة مستخدماً طريقة إكمال المربع

(أ) س^{٢} – ٨ س = - ١٥ ((إرشاد :لإكمال المربع نضيف إلى الطرفين ($\frac{١}{٢}$ معامل س)^{٢}

(ب) ب^{٢} - ١٠ب = ٤٠

****

ثانياً : استخدام القانون لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد

القانون العام لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد:
حلّ المعادلة: أس^٢ + ب س + جـ = ٠، حيث أ ≠ ٠ هو: س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

مثال(٢) : باستخدام القانون أوجد مجموعة حل كل معادلة :

س^٢ – ٦س + ٥ = ٠

٣س^٢ – ٦س = -٢

****

باستخدام القانون أوجد مجموعة حل كل معادلة :

س (س – ٢) = ٧

م (٣م – ٤) = ٢

****

ثالثاً : المميز △

يسمى Δ = ب^{٢} − ٤أجـ المميز، وقد يكون الناتج عددًا موجبًا أو صفرًا أو عددًا سالبًا لأنه يميّز لنا نوع جذري المعادلة من حيث كونهما: عددين حقيقيين مختلفين، إذا كان المميز موجبًا
أو عددين حقيقيين متساويين، إذا كان المميز يساوي صفرًا
أو عددين غير حقيقيين، إذا كان المميز سالبًا.

مثال(٣) : حدد نوع جذري كل معادلة ثم تحقق من الحل جبرياً

١) ٢س^{٢} − ٥س + ٢ = ٠

٢) س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٠

٣) س^{٢} − ٥س + ٧ = ٠

****

رابعاً : مجموع و ناتج ضرب جذري المعادلة التربيعية

إذا كان جذرا المعادلة: أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ هما م، ن

فإن: م + ن = $-\frac{ب}{أ}$ ، م × ن = $\frac{جـ}{أ}$

مثال(٤) : بدون حل المعادلة اوجد مجموع و ناتج ضرب جذري كل من المعادلتين ، إذا وجدا

١) ٤س^{٢} – ٩س + ٣ = ٠

٢) س^{٢} + ٨ س + ١٢ = ٠

مثال(٥) :

إذا كان ناتج ضرب جذري المعادلة: أس^{٢} – ٥س + ٢ = ٠ يساوي $\frac{٢}{٣}$. فأوجد أ، ثم حلّ المعادلة.

****

خامساً : **إيجاد المعادلة التربيعية إذا علم جذراها** :

المعادلة على الصورة: س^{٢} − (م + ن)س + م ن = ٠
هي معادلة بمعلومية مجموع الجذرين وناتج ضربهما.

مثال(٦) : أوجد معادلة تربيعية جذراها ٣ ، - ٢

مثال(٧) : إذا كان جذرا المعادلة س^{٢} – ٥س + ٦ = ٠ هما ل ، م

فكون معادلة تربيعية جذراها ٢ل ، ٢م

مثال(٨) : إذا كان جذرا المعادلة -٣س^{٢} + ٦س + ٥ = ٠ هما ل ، م

فكون معادلة تربيعية جذراها ل+١ ، م+١

****

الوحدة الثانية : حساب المثلثات

بند٢-١ : الزاوية و قياساتها

** **أنظمة قياس الزاوية** :

أولاً : **القياس الستيني** :

مثال(١) : اكتب كلاً مما يلي بالقياس الستيني :

أ) ٠,٦٢٥ الزاوية القائمة

تطبيق(١) : اكتب كلاً مما يلي بالقياس الستيني :

أ) $\frac{٧}{١٦}$ الزاوية المستقيمة

اليوم : التاريخ : / / ٢٠١٨

****

القياس الدائري (الراديان) :

تعريف : القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة = $\dfrac{\text{طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$

و يرمز إليه بالرمز هـ^د^

إذا رمزنا إلى طول القوس بالرمز (ل) و إلى طول نصف القطر بالرمز نق

، $\text{هـ}^{د} = \dfrac{\text{ل}}{\text{نق}}$ ومنها $\text{ل} = \text{هـ}^{د} \text{نق}$

تعريف الزاوية النصف قطرية: Radial Angle

هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة.

وقياس الزاوية نصف القطرية يساوي ١ راديان (١^د^).

مثال : دائرة طول نصف قطرها ٦ سم . أوجد طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية قياسها

(أ) (١,٢)^د^ (ب) (١,٥٧)^د^

****

العلاقة بين القياس الدائري و الستيني :

قانون: إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائري هـ^{د} وقياسها الستيني س$^{\circ}$ فإن:

$$\frac{هـ^{د}}{\pi} = \frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}}$$ ومنها $$س^{\circ} = هـ^{د} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi}$$ $$هـ^{د} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}$$

مثال : أوجد بدلالة π القياس الدائري للزوايا التي قياساتها :

(أ) ٤٥$^{\circ}$

(ب) ٣٠٠$^{\circ}$

أوجد القياس الستيني للزوايا التالية :

(أ) $\frac{٥}{٨} \times \pi$

(ب) $(٠,٧٥)^{د}$

بند ٢-٢: النسب المثلثية : الجيب و جيب التمام و مقلوباتهما

جيب الزاوية :

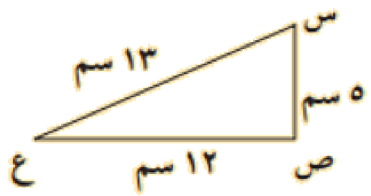
في المثلث قائم الزاوية : نسبة طول الضلع المقابل للزاوية الحادة إلى طول الوتر تسمى جيب الزاوية

ويرمز لها بالرمز (جا)

أي أن : جيب الزاوية = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

تطبيق : (أ) أثبت أن المثلث س ص ع قائم الزاوية في ص

(ب) أوجد جا س ، جا ع



***

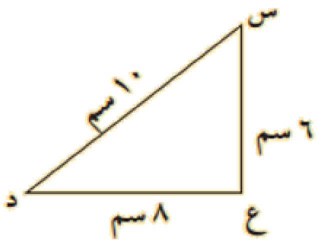
جيب تمام الزاوية :

في المثلث قائم الزاوية : نسبة طول الضلع المجاور للزاوية الحادة ، إلى طول الوتر تسمى جيب تمام الزاوية ، و يرمز لها بالرمز (جتا)

أي أن : جيب تمام الزاوية = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

مثال : (أ) أثبت أن المثلث س ع د قائم الزاوية في ع

(أ) أوجد كلاً من : جا س ، جتا س ، جا د ، جتا د



****

مقلوبات الجيب و جيب التمام :

قتا م = $\frac{١}{\text{جا م}}$: جا م $\neq$ ٠ $\Leftarrow$ قتا م × جا م = ١

قا م = $\frac{١}{\text{جتا م}}$: جتا م $\neq$ ٠ $\Leftarrow$ قا م × جتا م = ١

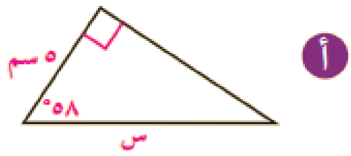
مثال : م ب جـ مثلث فيه : م ب = ٧ سم ، ب جـ = ٢٤ سم ، م جـ = ٢٥ سم

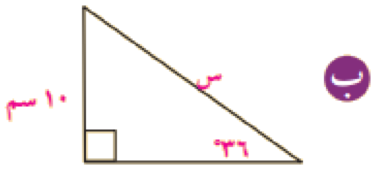
أثبت أن Δ م ب جـ قائم الزاوية ، ثم أوجد جا م ، جتا م ، قا م ، قتا م

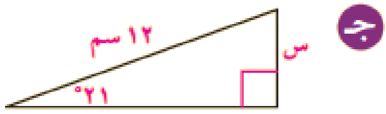
جا جـ ، جتا جـ ، قا جـ ، قتا جـ .

***

مثال : أوجد قيمة س لأقرب جزء من عشرة .







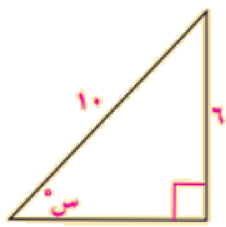
اليوم : التاريخ : / / ٢٠١٨

****

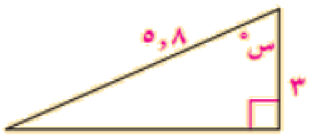
إيجاد قياس زاوية علم جيبها أو جيب تمامها :

مثال : أوجد قيمة س لأقرب درجة .

أ

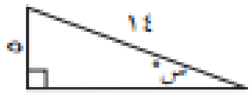


ب

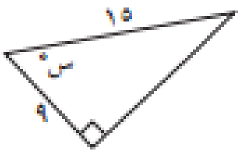


تطبيق : أوجد قياس الزاوية س لأقرب درجة .

(أ)



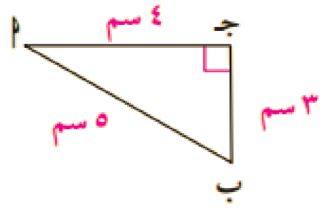
(ب)



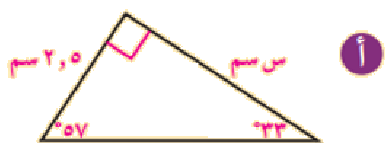
ظل الزاوية و مقلوبه:

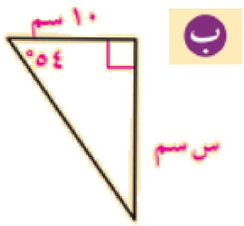
ظل الزاوية = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

مثال : في الشكل المقابل أوجد ظل الزاوية ﻡ ، ظل الزاوية ب .



تطبيق : أوجد قيمة س لأقرب جزء من عشرة .

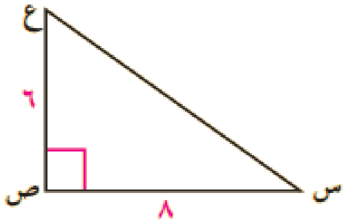




****

إيجاد قياس زاوية إذا علم ظلها

مثال : في الشكل المقابل أوجد ق(سَ) في Δس ص ع.

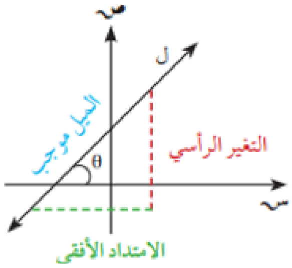


تطبيق : (١) أوجد ق(س) حيث ظا س = ٠,٥

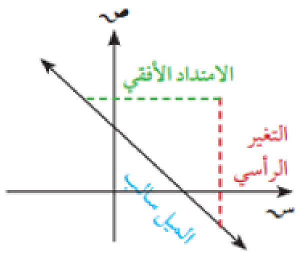
(٢) في الشكل المقابل ، أوجد ق(ل) لأقرب درجة .

إذا كان المستقيم ل يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن θ تسمى زاوية ميل المستقيم و يكون

$$\text{ظا}\theta = \text{ميل المستقيم} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{الامتداد الأفقي}}$$



إذا كانت معادلة المستقيم: ص = م س + ب فإن ميل المستقيم = م.



مثال : احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم ص = $\frac{1}{4}$ س + ٦ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني .

****

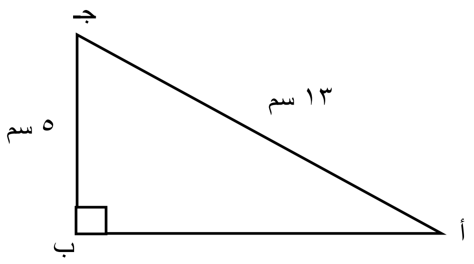
مقلوب ظل الزاوية

$$ظتا أ = \frac{المجاور}{المقابل}$$

$$ظتا أ = \frac{1}{ظا أ} : ظا أ \neq 0$$

مثال : أب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أب = ٧ سم ، أجـ = ٢٥ سم . أوجد ظاجـ ، ظتاجـ .

في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب من البيانات الموضحة بالشكل أوجد :



١) طول أ ب
٢) ظا أ ، قتا أ
٣) ق(جـ) لأقرب درجة

****

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

إذا كان طول كل من ضلعي الزاوية القائمة يساوي س ، فإن طول الوتر = س $\sqrt{٢}$

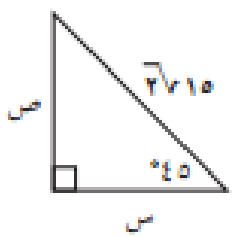
جا٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

جتا٤٥° = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

ظا٤٥° = ١

مثال : ؟ب جـ مثلث ٤٥ ، ٤٥ ، ٩٠ . أوجد طول الوتر إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة = ٥ سم .

تطبيق : في الشكل المجاور أوجد س ، ص

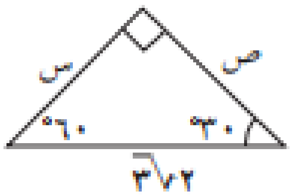


****

جا٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	جا٣٠° = $\frac{١}{٢}$
جتا٦٠° = $\frac{١}{٢}$	جتا٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
ظا٦٠° = $\sqrt{٣}$	ظا٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

مثال : في مثلث ثلاثيني ستيني إذا كان طول الضلع الأصغر = $\sqrt{٦}$
فأوجد طول الضلعين الآخرين.

تطبيق : في الشكل المجاور أوجد س ، ص



اليوم : التاريخ : / / ٢٠١٨

****

حل المثلث قائم الزاوية

مثال : حل المثلث ٮ ب جـ القائم الزاوية في جـ حيث : ب جـ = ١٥ سم ، ٮجـ = ١٢ سم

تطبيق : حل المثلث ٮ ب جـ القائم الزاوية في جـ حيث : ب جـ = ٥ سم ، ٮجـ = ٦ سم

****

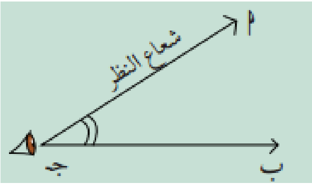
مثال : حل المثلث ء ب جـ القائم الزاوية في $\widehat{\text{جـ}}$ حيث : ءجـ = ٢٠ سم ، ق($\widehat{\text{ب}}$) = ٧٥°

تطبيق : حل المثلث ء ب جـ القائم الزاوية في $\widehat{\text{ب}}$ حيث : ءجـ = ١٠ سم ، ق($\widehat{\text{جـ}}$) = ٣٥°

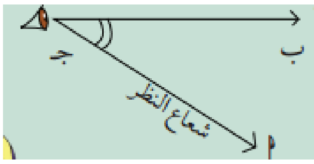
حل المثلث ء ب جـ القائم الزاوية في $\widehat{\text{جـ}}$ حيث : ءب = ٤٠ سم ، ق($\widehat{\text{ب}}$) = ٢٥°

****

زوايا الارتفاع و الانخفاض



١- إذا رصد شخص (جـ) نقطة م أعلى من مستوى نظره الأفقي جـ ب
فإن الزاوية التي يحددها جـ م ، جـ ب
تسمى زاوية ارتفاع م عن المستوى الأفقي لنظر الشخص جـ



٢- و إذا رصد الشخص جـ نقطة د أدنى من مستوى نظره الأفقي جـ ب
فإن الزاوية التي يحددها جـ د ، جـ ب
تسمى زاوية انخفاض د عن المستوى الأفقي لنظر الشخص جـ .

مثال : من نقطة على سطح الأرض تبعد ١٠٠ متر عن قاعدة مئذنة ، وجد أن قياس زاوية ارتفاع المئذنة ١٢° أوجد ارتفاع المئذنة عن سطح الأرض .

تطبيق : من نقطة على سطح الأرض تبعد ٣٠٠ م عن قاعدة برج عمودي وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج هي ١٣° . أوجد ارتفاع البرج عن سطح الأرض .

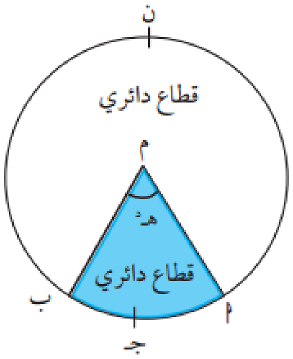
****

مثال : يقف مراقب فوق برج ارتفاعه ٦٠ متراً شاهد حريقاً بزاوية انخفاض قياسها ٤٠° . ما المسافة بين قاعدة برج المراقبة و موقع الحريق .

تطبيق : قاس بحار زاوية انخفاض سفينة من أعلى نقطة في فنار ارتفاعه ٢٠٠ م ، فوجد أنها ٣٩° . أوجد بعد السفينة عن قاعدة الفنار .

****

القطاع الدائري و القطعه الدائرية



تعريف:

القطاع الدائري هو جزء من سطح الدائرة محدود بنصفي قطرين وقوس.

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ ل نق

مثال : أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطر دائرته ١٠ سم و طول قوسه ٤ سم .

تطبيق : قطاع دائري طول قوسه ١٣,٦ سم ، وطول قطر دائرته ١٦ سم . أوجد مساحته .

****

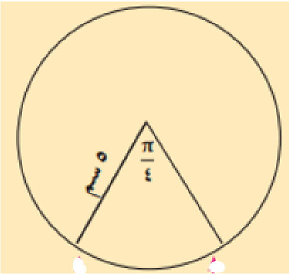
مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ هـ نق^{٢}

تذكر : ١) محيط الدائرة =٢ π نق

٢) مساحة الدائرة = π نق^{٢}

٣) طول القوس ل = هـ × نق

أوجد مساحة القطاع الدائري الأصغر في الشكل المقابل :



تطبيق : قطاع دائري طول نصف قطر دائرته ٢٠ سم ، و زاوية رأسه ١٠٠$^{\circ}$. أوجد مساحته .

****

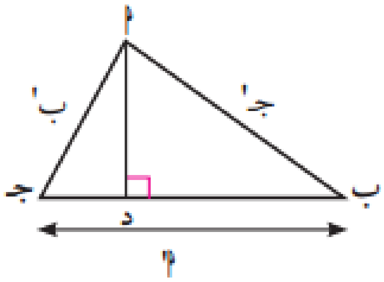
القطعة الدائرية

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحددة بهما .

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × ب أ × جا ب

= $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أ جـ × جا جـ

= $\frac{١}{٢}$ أ ب × أ جـ × جا أ



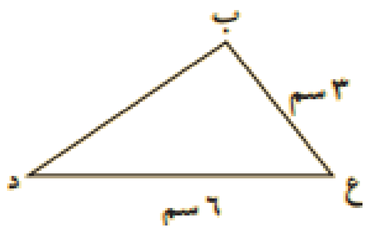
وباختصار نكتب مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ' جـ' جا ب

= $\frac{١}{٢}$ أ' ب' × جا جـ

= $\frac{١}{٢}$ ب' جـ' جا أ

مثال : ب ع د مثلث فيه ب ع = ٦ سم ، ب د = ٤ سم ، ق($\widehat{ب}$) = ٧٠° . أوجد مساحة هذا المثلث .

تطبيق : في المثلث المقابل إذا كانت مساحته = ٧ سم^{٢} . فأوجد ق($\widehat{ع}$)



اليوم : التاريخ : / / ٢٠١٨

****

مساحة القطعة الدائرية

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (هـ^{د} − جاهـ^{د})

مثال : أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم و قياس زاويتها المركزية ٧٠°

تطبيق : أوجد مساحة القطعة الدائرية التي طول نصف قطر دائرتها ٢٠ سم و طول قوسها ١٠ سم

****

الوحدة الثالثة : الجبر - التغير

بند ١-٣ : النسبة و التناسب

تعلم أن النسبة هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه يمكن تمثيلها بكسر

التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر

خاصية التساوي :

ليكن أ، ب، جـ، د، ∈ ح*، ك ∈ ح.

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \text{ك} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} \times \text{ك}$ ، $\text{ك} \times \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \text{ك} \times \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$

خاصية الضرب التقاطعي :

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإن أد = ب جـ

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \quad \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$$

مثال(١): أوجد قيمة ب في التناسب : $\frac{٢}{\text{ب}} = \frac{٨}{٢٠}$

تطبيق(١): إذا كان (٥س – ١) : (س + ٤) = ٤ : ٥ ، أوجد س

****

مثال(٢): ما لعدد الذي يطرح من حدي النسبة ٤٣ :٢٣ ليكون الناتج مساويا ً للنسبة $\frac{١}{٣}$ ؟

تطبيق(٢): ما لعدد الذي يضاف إلى حدي النسبة ٧:٣٧ ليكون الناتج مساويا ً للنسبة $\frac{١}{٣}$ ؟

****

تعريفٌ:

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ فإنه يقال أن أ، ب، جـ، د أعداد متناسبة.

وإذا كانت أ، ب، جـ، د متناسبة فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$

ويسمى أ، د **طرفي التناسب**، كما يسمى جـ، ب **وسطي التناسب**. ولأنّ في هذه الحالة أد = ب جـ **خاصيّة الضرب التقاطعي** فإنّ: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين.

مثال(٣): أثبت أن ٤ ، ١,٥ ، ٨ ، ٣ أعداد متناسبة .

تطبيق(٢) : (أ) أثبت أن ٣,٤ ، ٧ ، ٢,٠٤ ، ٤,٢ أعداد متناسبة .

(ب) أوجد قيمة الرابع المتناسب لكل مما يلي : ١ ، ٣ ، ٩ ، $\boxed{}$

****

مثال(٤) : إذا كانت م ، ب ، جـ متناسبة مع الأعداد ٣ ، ٥ ، ١١ فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{\text{٣ب + م}}{\text{٥ب + جـ}}$

تطبيق(٤): إذا كانت م ، ب ، جـ متناسبة مع الأعداد ٤ ، ٥ ، ٩ فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{\text{م + ب}}{\text{جـ - ب}}$

اليوم : التاريخ : / / ٢٠١٨

****

١ – التناسب المتسلسل الهندسي Geometric Proportion

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$ فإنّه يقال إن أ، ب، جـ في **تناسب متسلسل** (أو تناسب هندسي)

وبالعكس: إذا كانت أ، ب، جـ في تناسب متسلسل فإنّ: $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

ويسمى بـ **الوسط المتناسب** للعددين أ، جـ أو **الوسط الهندسي** لهما كما يسمى أ، جـ **طرفي التناسب**.

مثال(٥) : أثبت أن ٣ ، ٩ ، ٢٧ في تناسب متسلسل

تطبيق(٥) : إذا كانت الأعداد ٥ ، س ، ٢٠ في تناسب متسلسل ، أوجد قيمة س ثم تحقق

اليوم :   التاريخ : / / ٢٠١٨

****

خواص التناسب المتسلسل

خاصيّة (١)

ليكن أ، ب، جـ $\in$ ح*

إذا كان $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ (أي أن أ، ب، جـ في تناسب متسلسل)

فإن ب^{٢} = أجـ   وذلك من خاصية الضرب التقاطعي

خاصيّة (٢)

ليكن أ، ب، جـ، د $\in$ ح*

إذا كان:

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ (أي أن أ، ب، جـ، د في تناسب متسلسل)

فإن:

جـ = د × م ،   ب = د × م^{٢} ،   أ = د × م^{٣}

مثال(٦) : إذا كانت الأعداد ٦ ، س ، ٥٤ ، ١٦٢ في تناسب متسلسل ، أوجد قيمة س

تطبيق(٦) : إذا كانت الأعداد ٤ ، س - ٢ ، ١ ، ٠,٥ في تناسب متسلسل ، أوجد قيمة س

إذا كانت الأعداد: ٢ ، س – ٢ ، ١٨ ، ٥٤ في تناسب متسلسل أوجد قيمة س

****

التغير هو ظاهرة طبيعية في الحياة نلمسها و نشاهدها في العديد من المواقف و الأشياء

التغيّر الطردي

هو دالة خطية يمكن أن تكتب بالصورة: ص = ك س حيث ك ≠ ٠

ويسمى ك ثابت التغيّر أو ثابت التناسب أو معدل التغير.

ويمكن التعبير عن العلاقة ص = ك س على الصورة ص α س.

ملاحظات

١ يمكن تمثيل دالة التغير الطردي: ص = ك س بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل.

٢ يمكن كتابة المعادلة الخطيّة ص = ك س بالصورة: ك = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ حيث س ≠ ٠

٣ ثابت التغيّر ك = معدل التغيّر في البيانات التي تصف التغيّر.

٤ الثابت ك = ميل الخط المستقيم الذي يمثّل المعادلة بيانيًّا.

٥ في حالة التغيّر الطردي فإنّ: ثابت التغيّر = معدل التغيّر = ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغيّر.

٦ التغير قد يكون بالزيادة أو بالنقصان.

٧ إذا كانت ص α س فمعنى ذلك أن $\frac{\text{ص}_١}{\text{س}_١} = \frac{\text{ص}_٢}{\text{س}_٢} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{\text{التغير في ص}}{\text{التغير في س}}$: المقام ≠ صفر

مثال(١): إذا كانت ص α س و كانت ص = ٣٠ عندما س = ١٠

أوجد قيمة ص عندما س = ٤٠ ثم مثل العلاقة بين س ، ص بيانياً

تطبيق(١) : إذا كانت ص α س و كانت ص = ١,٥ عندما س = ١٠

أوجد قيمة ص عندما س =١٥ ثم مثل العلاقة بين س ، ص بيانيا

****

مثال(٢) : أي من المعادلات التالية تمثل تغيرا ً طرديا ً ؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي .

(أ) ٣س + ٤ص = ٨

(ب) ص + ٣س = ٢(س + ٢ص)

مثال(٤) : إذا كان المستقيم المار بالنقطتين ﻡ ، ب يمثل تغيرا ً طرديا ً أوجد ص :

(أ) ﻡ(٢ ، ١) ، ب (٦ ، ص)

(ب) ﻡ(٥ ، ص) ، ب (١٥ ، ١٢)

مثال(٥) : في ما يلي هل المستقيم الذي يمر بالنقطتين م ، ن يمثل تغيرا ً طرديا ً بين س ، ص

اشرح إجابتك .

أ) م (٢ ، ٥) ، ن (٤ ، ١٠)

ب) م (٣ ، ٤) ، ن (٦ ، ١٢)

اليوم : التاريخ : / / ٢٠١٨

****

بند ٣-٣ : التغير العكسي

١ – التغير العكسي

إذا تغيرت كمية س مع تغيّر كمية أخرى ص بحيث كان **حاصل ضرب الكميتين** ثابتًا، فإن هذا التغير يسمى **تغيّرًا عكسيًّا**. ويسمى حاصل الضرب س ص ثابت التغيّر، ويرمز إلى ذلك:

س ص = ك أو ص = $\frac{ك}{س}$ ، ك $\neq$ ٠

ويمكن التعبير عن التغيّر العكسي بالصورة ص α $\frac{١}{س}$

مثال(١):- أكمل الجدول التالي حيث س ص = ١٠٠

س	١	٢	٤	٥	١٠	٢٠	٥٠	١٠٠
ص	١٠٠							

- كيف تتغير قيم ص مع زيادة قيم س في الجدول السابق ؟ وما نوع هذا التغير

مثال(٣) : في تغير عكسي ص α $\frac{١}{س}$ إذا كانت ص = ٠,٢ عندما س = ٧٥

أوجد س عندما ص = ٣

تطبيق : في تغير عكسي ص α $\frac{١}{س}$ إذا كانت ص = ٣ عندما س = ٩

أوجد س عندما ص = ٨

****

مثال(٤) : أوجد ثابت التغير لكل من التغيرات العكسية التالية :

أ) ن = ٦ عندما ب = ٩

ب) ص = ١٣ عندما س = ٧

مثال(٥) : أوجد قيمة م لكي تمثل الأزواج التالية في كل مسألة تناسبات عكسية :

أ) (٥ ، ٨) ، (٤ ، م)

ب) (٤ ، ٨) ، (م ، ٢)

الوحدة الرابعة : الهندسة المستوية

بند ٤-١ : المضلعات المتشابهة

يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان التاليان معًا:
- قياسات زواياهما المتناظرة متساوية.
- أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

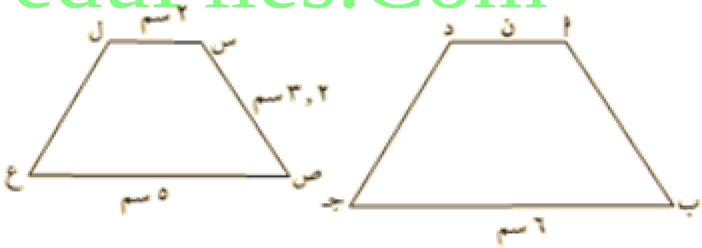
والعكس صحيح.

وتسمى النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين **نسبة التشابه**.

تعميم (٢) : المضلعان المتطابقان يكونان متشابهان

مثال (١)

في الشكل المقابل: إذا كان أ ب جـ د ∼ س ص ع ل ، أوجد قيمة ن.



المستطيل الذهبي :

هو مستطيل يمكن تقسيمه إلى جزئين أحدهما مربع و الآخر مستطيل

و المستطيل الناتج يكون مستطيلاً ذهبياً آخر و يكون مشابهاً للمستطيل الأصلي .

النسبة الذهبية :

في كل مستطيل ذهبي نسبة طول الضلع الأكبر إلى طول الضلع الاصغر تسمى النسبة الذهبية و تساوي $\frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$

أي حوالي ١,٦١٨ : ١

مثال : لوحة مستطيلة الشكل طولها ٦٠ سم . كم يجب ان يكون عرض اللوحة ليكون المستطيل ذهبي ؟

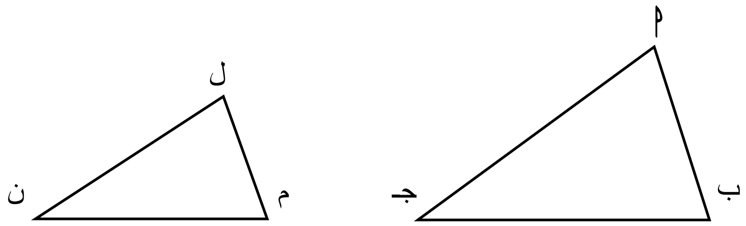
تطبيق: إذا كان عرض أحد المستطيلات الذهبية ٦٠ سم . كم يجب ان يكون طوله ؟

****

بند ٢-٤ : تشابه المثلثات

نظرية(١) : يتشابه مثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر

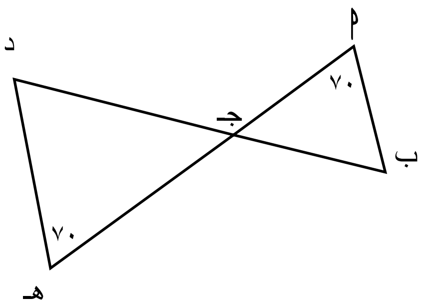
Δ ﻡ ب جـ ~ Δ ل م ن .



مثال(١) : المثلث ﻡ ب جـ قائم الزاوية في ﻡ̂ ، ق(ب̂) = ٥٥°

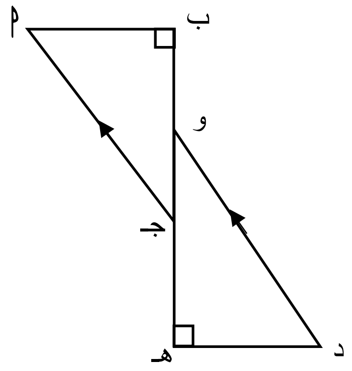
المثلث م ل ح قائم الزاوية مˆ ، ق(لˆ) = ٣٥° . أثبت تشابه المثلثين ﻡب جـ ، م ح ل

مثال(٢) : أثبت أن المثلثين في الشكل المقابل متشابهان . اكتب عبارة التشابه

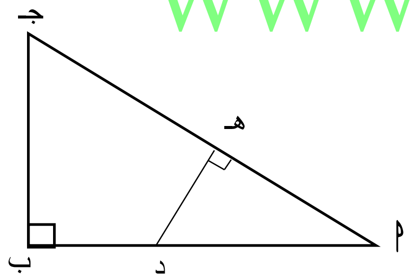


****

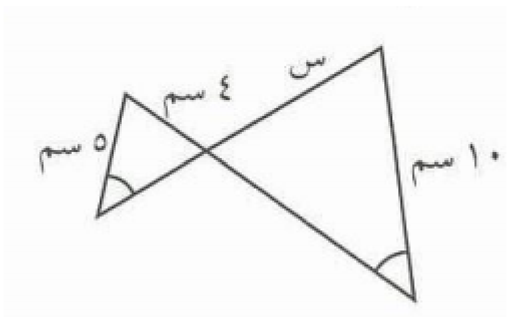
تطبيق(٢) : في الشكل المقابل ، أثبت تشابه المثلثين ﻡب جـ ، د هـ و



مثال(٣) : أثبت أن المثلثين ﻡ ب جـ ، ﻡ هـ د متشابهان . اكتب عبارة التشابه.



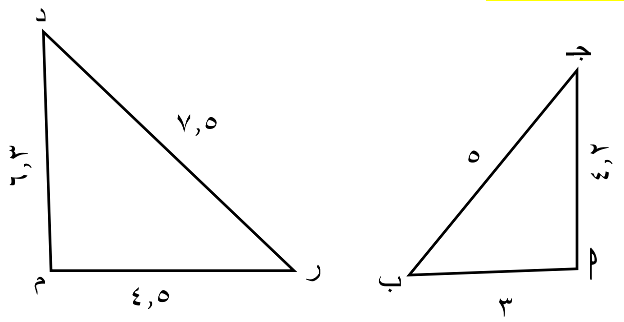
تطبيق(٣): استخدم التشابه لإيجاد قيمة س



****

نظرية(٢) : يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما .

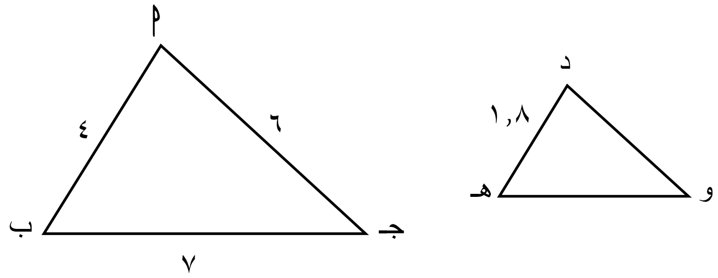
مثال(٤) : في الشكل المقابل :



أ) أثبت تشابه المثلثين ﻡ ب جـ ، م ر د .
ب) اكتب أزواج الزوايا متساوية القياس .

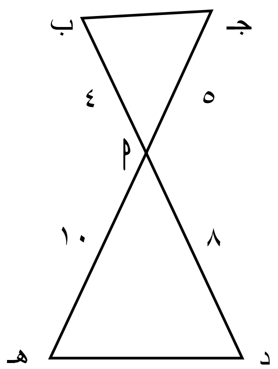
تطبيق(٤) : في الشكل المقابل : المثلثان ﻡ ب جـ ، د هـ و متشابهان

أوجد طول كل من $\overline{\text{د و}}$ ، $\overline{\text{و هـ}}$



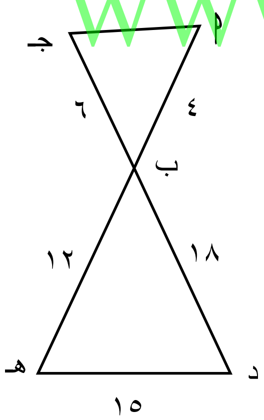
نظرية(٣) : يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاوية في أحدهما مع زاوية في المثلث الآخر ، و تناسب طولا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين .

مثال(٥): في الشكل المقابل $\overline{\text{ب د}} \cap \overline{\text{جـ هـ}} = \{\text{م}\}$ ، أثبت أن المثلثين م ب جـ ، م د هـ متشابهان

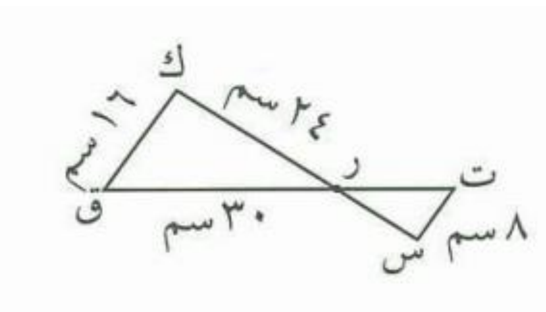


تطبيق(٥): في الشكل المقابل م هـ ∩ جـ د = {ب} ، برهن أن :

أ) $\overline{\text{م جـ}}$ // $\overline{\text{د هـ}}$ ب) أوجد طول م جـ



تطبيق : في الشكل المقابل، Δق ك ر ~ Δت س ر، أوجد طول $\overline{\text{رت}}$.

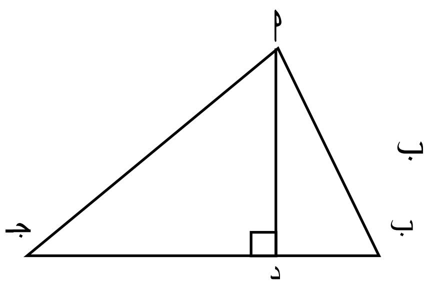


بند ٣-٤ : التشابه في المثلثات قائمة الزاوية

نظرية (١) : العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين و كل منهما يشابه المثلث الأصل .

نتيجة(١) مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود.

(م د)^{٢} = ب د × جـ د



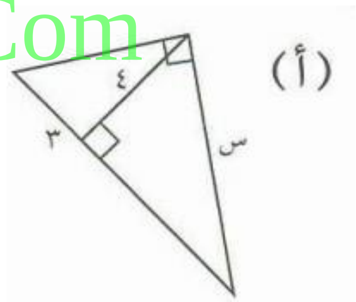
نتيجة(٢) : إذا كان ∆ م ب جـ قائم الزاوية م ، م د ⊥ جـ ب :

١ (م ب)^{٢} = ب د × ب جـ ٢ (م جـ)^{٢} = جـ د × جـ ب

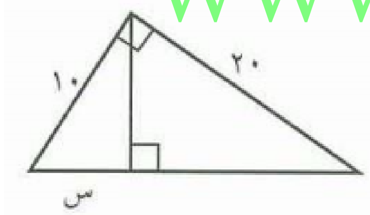
٣ م ب × م جـ = م د × ب جـ

مثال(١) : أوجد س في كل من :

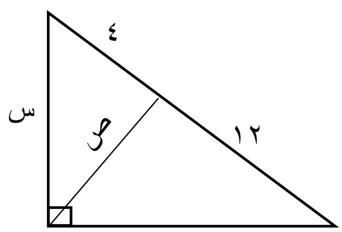
(أ)



(ب)



تطبيق(١) : أوجد من الشكل المرسوم س ، ص في أبسط صورة



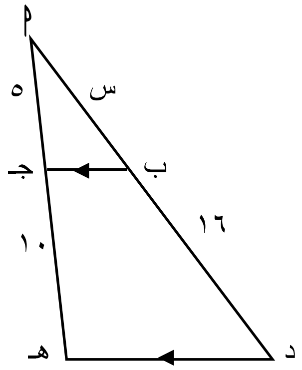
****

٤ – ٤ : التناسبات و المثلثات المتشابهة

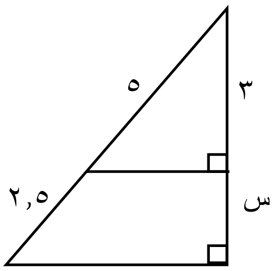
نظرية(١) : نظرية المستقيم الموازي

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث و قطع ضلعيه الآخرين فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة .

مثال(١) : في الشكل المقابل استخدم نظرية المستقيم الموازي لإيجاد قيمة س



تطبيق (١) : في الشكل المقابل استخدم نظرية المستقيم الموازي لإيجاد قيمة س

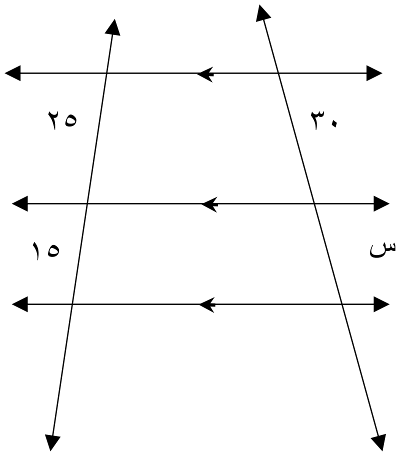


****

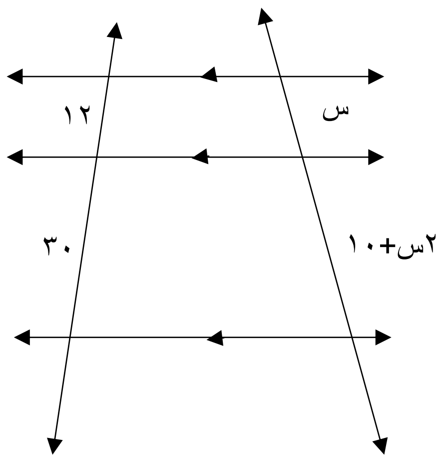
نظرية (٢) : نظرية طاليس

إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر .

مثال(٢) : من الشكل المقابل أوجد قيمة س



تطبيق (٢) : من الشكل المقابل أوجد قيمة س

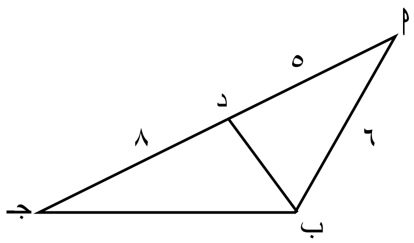


****

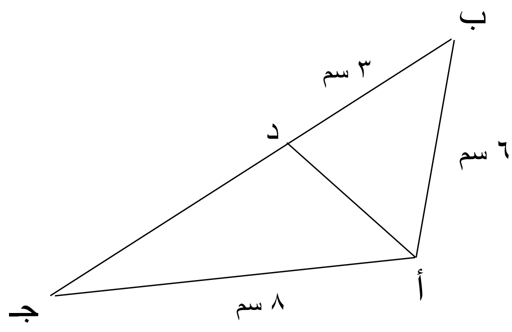
نظرية(٣) : نظرية منصف الزاوية في مثلث

إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجية للمثلث عند هذا الرأس ، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من خارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث .

مثال(٣) : أوجد جـ ب في الشكل حيث ب د ينصف ٢ب جـ



تطبيق(٣) : م ب جـ مثلث حيث م ب = ٦ سم ، م جـ = ٨ سم ، ثم رسم م د منصف ب م جـ ، و يقطع ب جـ في د ، إذا كان ب د = ٣ سم ، أوجد جـ د .



****

العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين و العلاقة بين مساحتيهما

نظرية :

إذا كانت نسبة التشابه لأي شكلين متشابهين هي $\frac{أ}{ب}$ فإن:

١ النسبة بين محيطي الشكلين = $\frac{أ}{ب}$

= نسبة التشابه.

٢ النسبة بين مساحتي الشكلين = $\frac{أ^٢}{ب^٢} = \left(\frac{أ}{ب}\right)^٢$

= مربع نسبة التشابه.

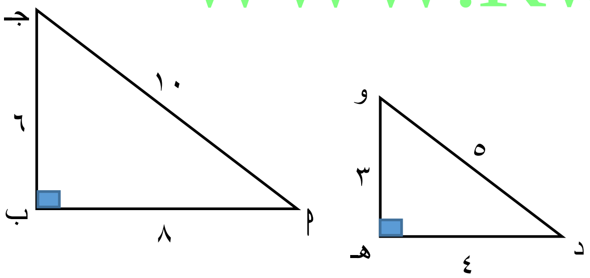
نسبة التشابه بين أي دائرتين هي النسبة بين طولي نصفي قطريهما.

النسبة بين محيطي دائرتين تساوي النسبة التشابه بين الدائرتين.

النسبة بين مساحتي دائرتين تساوي مربع نسبة التشابه بين الدائرتين.

مثال(١) : في الشكل المقابل أثبت أن المثلثين متشابهان

ثم أوجد النسبة بين محيطي المثلثين ، و النسبة بين مساحتيهما



مثال(٢) : لدينا مثلثان متشابهان بنسبة $\frac{٢}{٣}$ إذا كان محيط المثلث الأكبر ٤٥ سم ، فأوجد محيط المثلث الأصغر

****

مثال(٣) : مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٦ سم ، ٨ سم ، ١٠ سم و الآخر ينقص محيطه ٨ سم عن محيط المضلع الأول . أوجد أطوال أضلاع المضلع الثاني .

مثال(٤) : النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين هي $\frac{١٦}{٩}$.
ما محيط المضلع الأكبر إذا كان محيط المضلع الأصغر ٢٤ سم ؟

مثال(٥) : دائرتان م ، ن طول نصف قطر الأولى = ٥ سم و طول نصف قطر الثانية = ٨ سم .
أوجد النسبة بين محيطي الدائرتين و النسبة بين مساحتيهما .

****

٥-١ : الانماط الرياضية المتتاليات

تعريف : المتتالية الحقيقية هي دالة حقيقية مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو مجموعة جزئية مرتبة منها على الصورة {١ ، ٢ ، ٣ ، ...... ، م } حيث م ∈ ص ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح

مثال(١) : لتكن الدالة ت :{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ⟵ ح حيث ت(ن) = ن^{٢}

بيّن فيما إذا كانت هذه الدالة متتالية ثم أوجد حدودها .

تطبيق(١) : لتكن ص$_{+}$ ⟵ ح دالة معرفة بالقاعدة ت(ن) = $\frac{\text{ن}}{\text{ن} + ١}$

بيّن فيما إذا كانت هذه الدالة متتالية ثم أوجد الحدود الثلاثة الأولى منها .

****

الصيغة الصريحة (الحد النوني للمتتالية) :

يمكنك أحياناً معرفة قيمة الحد في متتالية دون معرفة الحد الذي يسبقه . بدلاً منه يمكنك استخدام عدد الحدود لحساب قيمة الحد . الصيغة التي تعبر عن الحد النوني بدلالة ن تسمى صيغة صريحة .

مثال(٢) : اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) للمتتالية (٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ....)

تطبيق(٢) : اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) للمتتالية (٠ ، ٣ ، ٨ ، ١٥ ، ٢٤ ، ....)

****

٥-٢ : المتتالية الحسابية

تعريف : المتتالية (المتتابعة) الحسابية هي متتالية ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة عدداً ثابتاً هذا الناتج يسمى أساس المتتالية و يرمز إليه بالرمز ك و على ذلك

$$ح_{ن+١} - ح_ن = ء \quad \text{أو} \quad ح_{ن+١} = ح_ن + ء$$

مثال(١) : بين أن المتتالية التالية (٤٨ ، ٤٥ ، ٤٢ ، ٣٩) حسابية ، حدد أساسها .

تطبيق(١) : هل المتتالية المعطاة حسابية ؟ إذا كانت كذلك حدد الأساس .

أ) (١، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ....) (ب) (-٢١ ، -١٨ ، -١٥ ، -١٢ ، ....)

مثال(٢) : إذا كانت $ح_١$ = -٤ ، ء = -٣ في متتالية حسابية ،

فاكتب الحدود الستة الأولى من المتتالية .

****

الحد النوني للمتتالية الحسابية General Term of an Arithmetic Sequence

إذا كان الحد الأوّل في المتتاليّة الحسابيّة (حن) هو ح١ وأساس المتتاليّة يساوي د. واعتبرنا الحد النوني هو حن.

فمن تعريف المتتاليّة الحسابيّة:

ح٢ = ح١ + د

ح٣ = ح١ + ٢د

ح٤ = ح١ + ٣د

وبصفة عامّة

حن = ح١ + (ن − ١)د لكل ن ∈ ص+.

إذا كان الحد المعروف حك فإن حن = حك + (ك − ١)د: ل ∈ ص+

ومنه يكون حن − حك = (ن − ك)د

أي أن حن = حك + (ن − ك)د

وتكون الصورة العامة للمتتالية الحسابية هي (ح١، ح١ + د، ح١ + ٢د، ...، ح١ + (ن − ١) د، ...)

لاحظ أن د = $\frac{\text{حن} - \text{حك}}{\text{ن} - \text{ك}}$: ن ≠ ك

ملاحظة:

ن تمثّل رتبة الحد حن أما حن فتمثّل قيمة الحدّ. فمثلاً: ح٧ = ٣٥ تعني أن قيمة الحدّ السابع تساوي ٣٥.

د

مثال(٣) : في المتتاليه الحسابيه ح١ = ٤ ، د = ٣ . اوجد الحد ح١٢

مثال(٤) : في المتتاليه الحسابيه (٢ ، ٥ ، ٨ ، ....) أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٧١ .

****

مثال(٥): أوجد عدد حدود المتتالية الحسابية (٧ ، ١١ ، ١٥ ، .... ، ٤٧)

مثال(٦) :في المتتاليه (ح $_{ن}$) حيث ح $_{ن}$=٣ن + ٥ حيث ن ∋ ص$^{+}$ أثبت أن المتتالية حسابية .

مثال(٧) : إذا كان الحد الثاني من متتالية حسابية يساوي ٩ و الحد السادس يساوي -٣ ، فأوجد أساس المتتالية ثم أوجد المتتالية الحسابية مكتفياً بالحدود الأربعة الأولى منها .

****

الأوساط الحسابية Arithmetic Means

إذا كونت أ، ب، جـ متتالية حسابية حيث أ، ب، جـ هي عناصر من ح. (أعداد حقيقية)

فإن: ب − أ = جـ − ب

٢ب = جـ + أ

$$ب = \frac{أ + جـ}{٢}$$

أي أن ب هو الوسط الحسابي للعددين أ، جـ.

مثال(٨) : أوجد قيمة ص من المتتالية الحسابية (٤٣ ، ص ، ٥٧)

مثال (٩) : أدخل خمسة أوساط حسابية بين ١٣ ، ١

تطبيق : أدخل ٥ أوساط حسابية بين ٢٣ ، ٦٥

****

مجموع ن حد الأولى من حدود متتالية حسابية

مجموع ن من حدود متتالية حسابية $(ح_ن)$ يُعطى بالقاعدة:

$$جـ_ن = \frac{ن}{٢}(ح_١ + ح_ن) \quad \text{أو} \quad جـ_ن = \frac{ن}{٢}[٢ح_١ + (ن - ١)د]$$

حيث $ح_ن$ هو الحد الذي ترتيبه ن من المتتالية الحسابية وحدها الأول $ح_١$.

مثال(١٠) : أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الحسابية
التي حدها الأول -١٢ و حدها العاشر ٢٤

تطبيق : أوجد مجموع العشرين حداً الأولى من المتتالية الحسابية
التي حدها الأول ١٠ و حدها العشرون ٥٠٠

مثال(١١) :متتالية حسابية حدها الأول -٧ وأساسها ٤ .أوجد مجموع أول خمسة و عشرين حدا منها .

****

تطبيق : أوجد مجموع الحدود الستة عشرة الأولى من المتتالية الحسابية
(١٥ ، ٢٢ ، ٢٩ ، ٣٦ ، ....)

مثال(١٢) : أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية (٥ ، ٧ ،٩ ، ....،٩٥).

مثال(١٣) :كم حداً يلزم أخذه من المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٥ و أساسها ٣ ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع ٩٤٨ ؟

****

في المتتالية الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ....) أوجد ما يلي :

١) الحد العشرون
٢) مجموع الحدود العشرين الأولى منها (مستخدماً قانون المجموع للمتتالية الحسابية)

أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٧١ من المتتالية الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ....)

مستخدماً قانون الحد النوني للمتتالية الحسابية

****

٥-٣ : المتتاليه الهندسية

تعريف : المتتالية الهندسية : هي متتالية ناتج قسمة أي حد فيها على الحد السابق له مباشرة يساوي عدداً حقيقياً ثابتاً غير صفري ، هذا العدد يساوي أساس المتتالية الهندسية و يرمز إليه بالرمز ر

مثلاً : المتتالية (٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٤٠) متتالية هندسية

أما (٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ....) فليست متتالية هندسية

تعريف:

المتتالية $(ح_ن)$ تُسمى متتالية هندسية إذا كان $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = ر$ حيث $ح_ن \neq ٠$.

لكلّ ن من ح، ر عدد حقيقيّ ثابت يسمى أساس المتتالية الهندسيّة common ratio

مثال(١) : أثبت أن المتتالية $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = (٢)^ن$ ، هي متتالية هندسية .

****

الحد النوني للمتتالية الهندسية

إذا كانت $(ح_ن)$ متتالية هندسية أساسها $ر \neq ٠$ فإن $ح_ن = ح_١ \times ر^{ن-١}$

حيث $ح_١$ هو الحد الأول، $ح_ن$ هو الحد النوني، $ر$ هو أساس المتتالية الهندسية.

ويكون $ح_٢ = ح_١ \times ر$ ، $ح_٣ = ح_١ \times ر^٢$ ، $ح_٤ = ح_١ \times ر^٣$ ، ...

وتكون الصورة العامة للمتتالية الهندسية $ح_١$ ، $ح_١ ر$ ، $ح_١ ر^٢$ ، $ح_١ ر^٣$ ، ... ، $ح_١ ر^{ن-١}$ ، ...

إذا كان الحد المعروف $ح_ك$ فإن $ح_ك = ح_١ \times ر^{ك-١}$

ومنه يكون $\frac{ح_ن}{ح_ك} = \frac{ح_١ \times ر^{ن-١}}{ح_١ \times ر^{ك-١}} = ر^{ن-ك}$

أي أن $ح_ن = ح_ك \times ر^{ن-ك}$

مثال(٢): اكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٥ و أساسها -٣

مثال(٣) : متتالية هندسية حدها الأول ٢٧ وحدها الخامس $\frac{١}{٣}$.
اكتب المتتالية مكتفياً بالحدود الخمسة الأولى منها .

****

الأوساط الهندسية بين عددين Geometric Means Between two Numbers

إذا كوّنت أ، ب، جـ متتالية هندسية حيث أ، ب، جـ أعداد حقيقية غير صفرية وحيث أجـ > ٠ فإن: $\frac{ب}{أ} = \frac{جـ}{ب}$ ومنه $ب^2 = أجـ$

∴ $ب = \pm\sqrt{أجـ}$.

يسمى ب وسطًا هندسيًّا بين العددين أ، جـ، أي أن: $\sqrt{أجـ}$ أو $-\sqrt{أجـ}$ وسطًا هندسيًّا بين العددين أ، جـ.

مثال(٤) : أوجد وسطاً هندسياً بين العددين -٢ ، -٧٢

مثال(٥) : أدخل خمسة أوساط هندسية موجبة بين العددين ٥١٢ ، ٨ .

تطبيق : أدخل ٨ أوساط هندسية بين ٢ ، ١٠٢٤

****

مجموع ن حداً الأولى من متتالية هندسية :

قانون

إذا كانت ($\text{ح}_{\text{ن}}$) متتالية هندسية، $\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{ح}_{١} + \text{ح}_{٢} + \text{ح}_{٣} + \dots + \text{ح}_{\text{ن}}$ هو مجموع ن حدًّا الأولى، فإن:

١) $\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{ح}_{١} \times \frac{\text{ر}^{\text{ن}} - ١}{\text{ر} - ١}$ أو $\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{ح}_{١} \times \frac{١ - \text{ر}^{\text{ن}}}{١ - \text{ر}}$ ، $\text{ر} \neq ١$

٢) إذا كانت $\text{ر} = ١$ فإن $\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{ح}_{١}$

مثال(٦) :أوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتتالية الهندسية (٣ ، ٩ ، ٢٧ ، .....)

مثال(٧): أوجد مجموع الحدودالستة الأولى من متتالية هندسية حيث $\text{ح}_{١} = ٤$ ، $\text{ح}_{٣} = ١$

أوجد مجموع الحدودالعشرة الأولى من المتتالية الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ، ....)