فهرس كتاب الأساسيات فى الرياضيات
من الابتدائى الى الثانوى

اعداد الاستاذ / خالد المنفلوطى
عاشق الرياضيات

وهذا العمل يأتى بعد التأكد من حاجة الابناء الطلاب اليه

[١] أساسيات الحساب و الجبر

(١) الجمع و الطرح :

أ- العددين لهم نفس الاشارة (نجمع و نضع نفس الاشارة)

مثلا : ـ ٧ ـ ٣ = ـ ١٠ ، ٧ + ٣ = ١٠

ب - العددين مختلفين فى الاشارة (نضع إشارة الكبير و نطرح)

مثلا : ـ ٧ + ٣ = ـ ٤ ، ١٦ ـ ٧ = ٩

- **جمع و طرح الأعداد النسبية** (الكسور) (نوحد المقامات و نستخدم القاعدة التالية)

$$\frac{أ}{ب} \pm \frac{\text{—}}{\text{—}} = \frac{ء \times أ \pm ب \times جـ}{ب \times ء}$$

مثلا :

$$\frac{٣}{٧} + \frac{٥}{٦} = \frac{٦ \times ٣ + ٧ \times ٥}{٧ \times ٦} = \frac{٥٣}{٤٢}$$

$$\frac{٣}{٧} - \frac{٥}{٦} = \frac{٦ \times ٣ - ٧ \times ٥}{٧ \times ٦} = \frac{-١٧}{٤٢}$$

(٢) الضرب و القسمة : (قاعدة ضرب و قسمة الاشارات)

الاشارات المختلفة + * ـ = ـ ، ـ * + = ـ

الاشارات المتشابهة + * + = + ، ـ * ـ = +

مثلا : ـ ٨ × ٥ = ـ ٤٠ ، ٧ × (ـ ٥) = ـ ٣٥ ، (ـ ٤) × (ـ ٦) = ٢٤

ـ ١٢ ÷ ٤ = ـ ٣ ، ١٥ ÷ (ـ ٣) = ـ ٥ ، (ـ ٩) ÷ (ـ ٣) = ٣

* **فى حالة ضرب الكسور** : (يتم ضرب $\frac{\text{البسط} \times \text{البسط}}{\text{المقام} \times \text{المقام}}$)

مثلا :

$$\frac{٣}{٧} \times \frac{-٢}{٦} = \frac{٣ \times (-٢)}{٧ \times ٦} = \frac{-٦}{٤٢}$$

* فى حالة القسمة (يتم تغير الضرب الى قسمة و قلب الكسر الثانى)

مثلا :

$$\frac{٣}{٧} \div \frac{-٢}{٦} = \frac{٣}{٧} \times \frac{٦}{-٢} = \frac{١٨}{-١٤} = \frac{-٩}{٧}$$

(٣) ترتيب إجراء العمليات الحسابية :

(ما دام الكتابة بالعربى نجرى العمليات من اليمين إلى اليسار)

الاقواس ثم الاسس ثم الضرب و القسمة ثم الجمع و الطرح

مثلا : [٣ + ٥ × ٢ ـ (٩ + ٤ ^{٢}) ^{٢}] = ٣ + ٥ × ٢ ـ (٢٥) ^{٢}

= ٣ + ١٠ ـ ٦٢٥ = ـ ٦١٢

(٤) مجموعات الأعداد :

١ـ ع مجموعة أعداد العِد { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... }

٢ـ ط مجموعة الأعداد الطبيعية { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... }

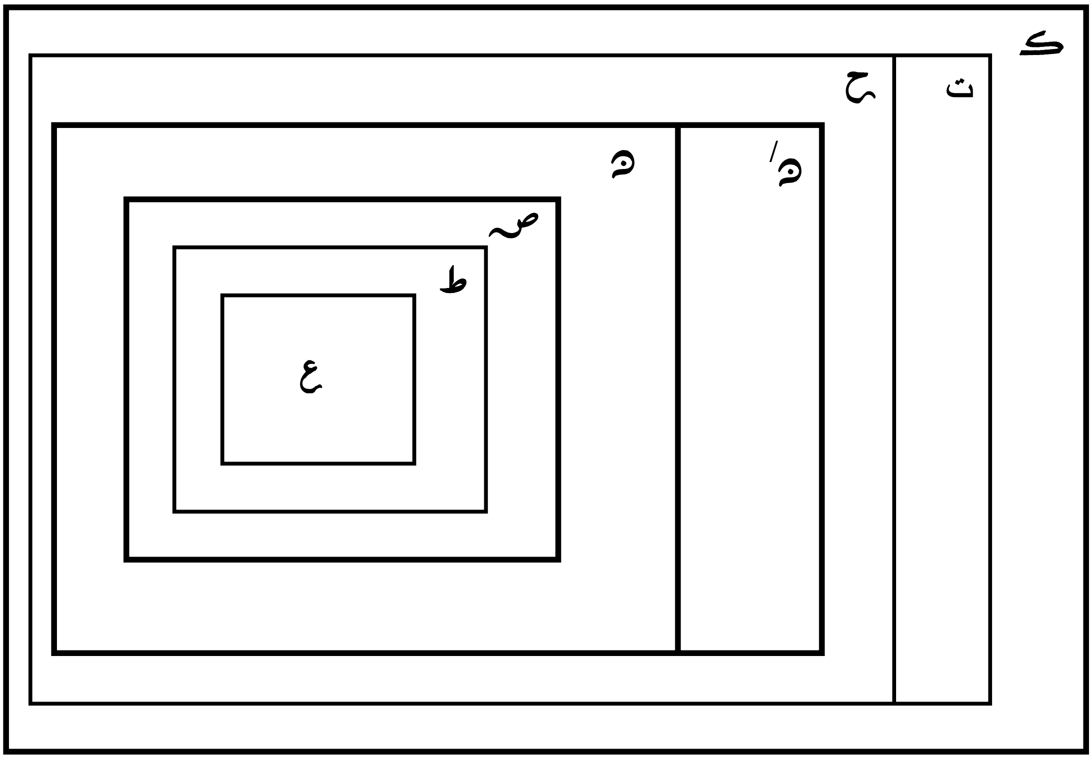
٣ـ ص مجموعة الأعداد الصحيحة { ... ، ـ ٢ ، ـ ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣، ... }

٤ـ ن مجموعة الأعداد النسبية : مجموعة الأعداد التى يمكن وضعها على هيئة $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$
بشرط أن يكون البسط و المقام كلاهما عدد صحيح ، المقام ≠ صفر

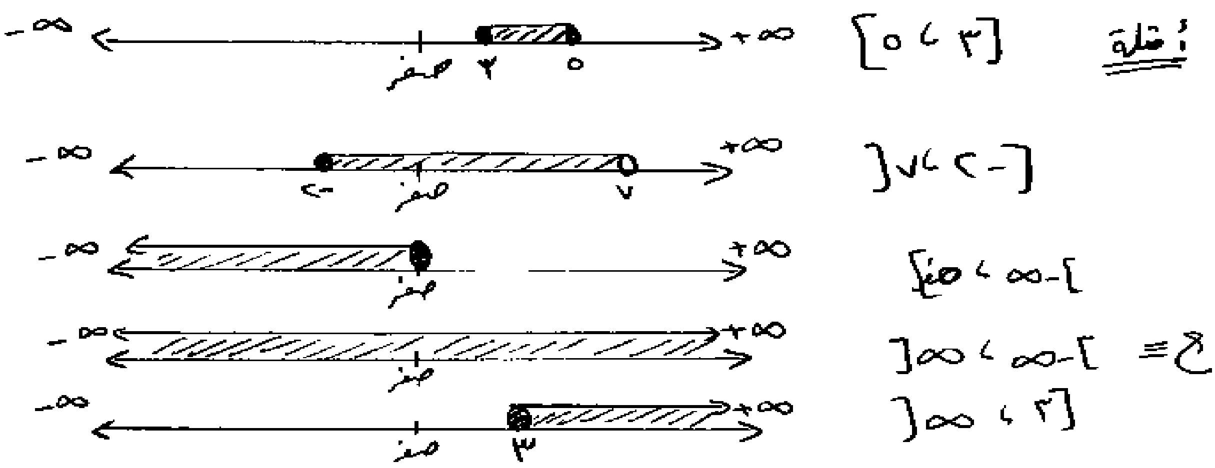
٥ـ ح مجموعة الأعداد الحقيقية : ح = ن ∪ ن$'$ = ح$^{+}$ ∪ { ٠ } ∪ ح$^{-}$ =] ـ ∞ ، ∞ [
لاحظ أن أى رقم عشرى غير منتهى و غير دائر هو عدد غير نسبى
مثل ط = ٣,١٤ ، هـ = ٢,٧١٨ ، ...

٦ـ ت الأعداد التخيلية : هى مجموعة جذور الأعداد السالبة
مثل $\sqrt{ـ٣}$ = ٣ ت ، $\sqrt{ـ٩}$ = ٣ ت

٧ـ ك الأعداد المركبة : هى التى تتكون من جزء حقيقى و جزء تخيلى
مثلا : ٧ + ٣ ت ، ٤ + ٨ ت ، ٩ ـ ٤ ت



٥) <u>الفترات</u> : الفترة تحتوى عدد لانهائى من الأرقام ، يتم كتابة الرقم الأصغر يمين الفترة
الاقواس : [ ] فترة مغلقة
،] [فترة مفتوحة
،]] ، [[فترة نصف مفتوحة أو نصف مغلقة



٦) <u>الحد الجبرى و المقدار الجبرى</u> :

<u>ا لحد الجبري</u> : يتكون من حاصل ضرب عاملين أو أكثر .

عامل عددى [يسمى معامل الحد (يكون عدد) و عامل جبرى (يكون رمز)]

مثلا : الحد ٥ س ص^{٢} ، ـ ٧ م ، ٨ ، ل ، ....

<u>درجة ا لحد ا لجبري</u> :

هي مجموع أسس الرموز للحد مثلا : الحد ٥ س ص^{٢} من الدرجة الثالثة ، الحد ٧ من الدرجة صفر ، الحد ١٠ س من الدرجة الأولى

<u>ا لمقدار ا لجبري</u> : هو ما تكون من حدين أو أكثر بينهما + أو ـ

<u>مثلا</u> : م + ٥ ب مقدار مكون من حدين ، ٤ س^{٢} ـ ص + ٢ مقدار مكون من ثلاث حدود

<u>درجة ا لمقدار ا لجبري</u> : هي أعلي درجة لحدود ا لمقدار

<u>جـمـع ا لحدود ا لمتشابهة</u> : مجموع عدة حدود جبرية متشابهة يساوي حد مشابه لها معامله يساوي مجموع معاملات هذه ا لحدود .

<u>مثلا</u> : ٣ س + ٤ س = ٧ س ، ٥ م ب + م ب = ٦ م ب

<u>ملحوظة</u> : لا يمكن جمع ا لحدود غير ا لمتشابهة

مثلا : ٣ م + ٢ ب ≠ ٥ م ، س + ص ≠ س ص

طرح الحدود المتشابهة :

٥ س	ـ س	٤ س	ـ ٦ س
٣ س	ـ س	ـ ٣ س	٥ س
٨ س	ـ ٢ س	س	ـ س

ضرب الحدود الجبرية و قسمتها :

ضرب حد جبري في حد جبري :

قاعدة الضرب الحدود :

(١) نضرب معاملات الحدود معاً (٢) نضرب الأساسان المتحدة بجمع أسسها

مثلا : ٣ أ × ٥ أ = ١٥ أ^{٢} ، ـ ٣ أ × ٢ ب = ـ ٦ أ ب

ملحوظة : عند ضرب الإساسات ا لمتساوية نجمع الاسس .

(س^{م} × س^{ن} = س$^{م+ن}$ حيث م ، ن ∈ ح)

مثلا : س^{٤} × س^{٦} = س$^{٤+٦}$ ، ٣^{٧} × ٣^{٢} = ٣^{٩} ، (-٥)^{٣} × (-٥)^{٤} = (-٥)^{٧}

ملحوظة هامة :

(-أ)^{ن} = - أ^{ن} حيث ن عدد فردى مثلا : (-٥)^{٣} = - ١٢٥ ، (-٢)^{٥} = ٣٢

(-أ)^{ن} = أ^{ن} حيث ن عدد زوجى مثلا : (-٥)^{٢} = ٢٥ ، (-٢)^{٦} = ٦٤

(أى عدد أس صفر عدا صفر = ١) مثلا : (-٧)^{صفر} = ١ ، ٩^{صفر} = ١

قاعدة قسمة حد جبرى على حد آخر :

أ ÷ ب (أو $\frac{أ}{ب}$) تعني العدد الذي إذا ضرب في ب كان الناتج أ

٨ ÷ ٢ = ٤ ، ـ ٦ ÷ ٢ = ـ ٣ ، ـ ٤ ÷ ـ ٤ = ١ ، س^{٥} ÷ س^{٣} = س^{٢}

١٥ س^{٦} ÷ ٥ س^{٢} = ٣ س^{٢} ، ـ ٨ ب^{٥} ÷ ٢ ب^{٥} = ـ ٤ ، ٧ س ÷ ٧ س = ١

ملحوظة : عند قسمة الاساسات المتساوية نطرح الاسس .

أ^{م} ÷ أ^{ن} = أ$^{م-ن}$ ، أ ≠ صفر ، م > ن

مثلا س^{٧} ÷ س^{٥} = س$^{٧-٥}$ = س^{٢} ، أ^{١٢} ÷ أ^{٨} = أ^{٤} , ٣^{٢٠} ÷ ٣^{١٥} = ٣^{٥}

ملحوظة: لا يجوز ا لقسمة على الصفر . مثلا صفر ÷ ٧ = صفر

و لكن ٧ ÷ صفر = ليس لها معنى .

ـ ١٥ س^{٤} ص^{٤} ÷ ـ ٣ س^{٣} ص^{٣} = $\frac{ـ ١٥ س^{٤} ص^{٤}}{ـ ٣ س^{٣} ص^{٣}}$ = ٥ س ص

خطوات القسمة لحد على حد : نقسم الاشارات ثم الاعداد ثم الرموز

ملحوظة : لا يجوز ا لقسمة على الصفر . مثلا صفر ÷ ٧ = صفر
و لكن ٧ ÷ صفر = ليس لها معنى .

ضرب حد في مقدار جبري :

عند ضرب حد في مقدار نضرب هذا الحد في كل حد من حدود المقدار الجبري

مثلا : ٩ س × (٢ ص + ٣ ع) = ٩ س × ٢ ص + ٩ س × ٣ ع
= ١٨ س ص + ٢٧ س ع
، أ^{2} (٥ أ + ٦ ب) = ٥ أ^{3} + ٦ أ^{2} ب

ضرب المقادير الجبرية :

الضرب بمجرد النظر : (مقدارين متشابهان) الناتج ثلاث حدود

ـ ٤ س
١٥ س
١١ س

الثالث الأول

(٢ س + ٣) (٥ س ـ ٢) = ١٠ س^{2} + (ـ ٤ س + ١٥ س) ـ ٦
= ١٠ س^{2} + ١١ س ـ ٦

ضرب مقدارين غير متشابهين : (الناتج يكون اربعة حدود)

(٣ س + ٢ ص) (٥ س ـ ٣ ب) = ١٥ س^{2} + ١٠ س ص ـ ٩ ب س ـ ٦ ب ص

مربع مقدار جبري ذي حدين :

(س + ص)^{2} = مربع الحد الأول+٢× الحد الأول×الحد الثاني+ مربع الحد الثاني
= س^{2} + ٢ س ص + ص^{2}
(٢ أ + ٥)^{2} = ٤ أ^{2} + ١٠ أ + ٢٥
(٧ س ـ ١)^{2} = ٤٩ س^{2} ـ ١٤ س + ١

ضرب مجموع حدين × الفرق بينهما :

(س + ص) (س ـ ص) = مربع الحد الأول ـ مربع الحد الثاني = س^{2} ـ ص^{2}
(٢ أ + ٤) (٢ أ ـ ٤) = ٤ أ^{2} ـ ١٦

- **ضرب المقادير المكونة من أكثر من حدين :**

مثال : أوجد مفكوك (٣ أ ـ ٢ ب + ١)^{2}

الحل :

٣ م − ٢ ب + ١

٣ م − ٢ ب + ١

٩ م^{٢} − ٦ م ب + ٣ م

− ٦ م ب + ٤ ب^{٢} + ب

٣ م − ٢ ب + ١

٩ م^{٢} − ١٢ م ب + ٦ م + ٤ ب^{٢} − ب + ١

٧) <u>مراجعة على التحليل</u>

١) التحليل بإخراج (ع . م . أ)

١٢ س^{٣} − ٤ س = ٤س (٣ س^{٢} − ١)

٢) تحليل فرق بين مربعين

٤ س^{٢} − ٩ = (٢ س − ٣) (٢ س + ٣)

٣) تحليل الفرق بين مكعبين :

س^{٣} − ٨ = (س − ٢) (س^{٢} + ٢ س + ٤)

٤) تحليل مجموع مكعبين :

س^{٣} + ١٢٥ = (س + ٥) (س^{٢} + ٥ س + ٢٥)

٥) تحليل المقدار الجبري الثلاثي البسيط " معامل س^{٢} = ١ "

س^{٢} + ٥ س + ٦ = (س + ٣)(س + ٢)

س^{٢} − ٥ س + ٦ = (س − ٣)(س − ٢)

س^{٢} + ٥ س − ٦ = (س − ١)(س + ٦)

س^{٢} − ٥ س − ٦ = (س − ٦)(س + ١)

٦) تحليل المقدار الثلاثي غير البسيط " معامل س^{٢} ≠ ١ "

٣ س^{٢} + ١١ س + ٦ = (س + ٣)(٣ س + ٢)

٣ س^{٢} − ١٩ س + ٦ = (٣ س − ١)(س − ٦)

٣ س^{٢} + ٧ س − ٦ = (س + ٣)(٣ س − ٢)

٣ س^{٢} – ١٧ س – ٦ = (س – ٦)(٣ س + ١)

٧) المقدار الثلاثى المربع الكامل :

س^{٢} + ٦ س + ٩ = (س+ ٣)^{٢}

٢٥ س^{٢} – ٤٠ س + ١٦ = (٥ س – ٤)^{٢}

٨) التحليل بالتقسيم : (أربعة حدود غالباً أو أكثر)

ا لطريقة : (١) نقسم ا لمقدار إلى مقدارين أو أكثر حسب عدد حدود ا لمقدار

(٢) نستخرج ع ٠ م ٠ أ من المقدار إن وجد

حلل تحليلاً تاماً : أ حـ + أ د + ب حـ + ب د

الحل : ا لمقدار = (أ حـ + أ د) + (ب حـ + ب د)

= أ (حـ + د) + ب (حـ + د) = (حـ + د) (أ + ب)

٩) طريقة التحليل بإكمال المربع

(١) نُضيف إلى المقدار المعطى ضعف حاصل ضرب جذري الحدين المربعين ثم نطرحه حتى لا يتغير المقدار .

(٢) باستخدام الإبدال و الدمج نعيد ترتيب حدود المقدار حتى نصل إلى الصورة : مقدار ثلاثي مربع كامل - مربع كامل

(٣) نحلل المقدار الناتج كفرق بين مربعين

(٤) إن أمكن نحلل المقادير الناتجة حتى يكون التحليل كاملاً

مثال : حلل تحليلا كاملا : ٩ س^{٤} – ٢٥ س^{٢} + ١٦

الحل : نضيف إلى المقدار المعطى : ٢ × $\sqrt{\text{٩ س}^{٤}}$ × $\sqrt{\text{١٦}}$ أي ٢٤ س^{٢} ثم نطرحه حتى لا يتغير المقدار المعطى

المقدار = ٩ س^{٤} – ٢٤ س^{٢} + ١٦ - ٢٥ س^{٢} + ٢٤ س^{٢}

= (٣ س^{٢} – ٤)^{٢} – س^{٢}

مثال : حلل تحليلا تاما : س^{٢} + ٤ س + ٦

الحل : = [(س – ٢)^{٢} – (٤)] + ٦ = (س – ٢)^{٢} + ٢

* **المعنى الهندسي لجذور المعادلة " أو أصفار المعادلة "**

إذا اعتبرنا المعادلة دالة فنضعها = صفر

، إذا عوضت بالجذور فى المعادلة فإنها تجعلها = صفر

مثلا : إذا كان س = ٣ أحد حلول المعادلة س^{٢} ـ س ـ ٦ = ٠ ∴ تحقق المعادلة
الطرف الايمن = ٣ ^{٢} ـ ٣ ـ ٦ = ٠ = الطرف الايسر

بحث نوع جذرى المعادلة التربيعية :

عن طريق المميز هو $\boxed{\text{ب}^{٢} - ٤ \text{ ٲ جـ}}$

(١) إذا كان المميز > ٠ كان الجذران حقيقيان مختلفان .
(٢) إذا كان المميز = ٠ كان الجذران حقيقيان متساويان . (جذر حقيقى واحد مكرر)
إذا كان المميز < ٠ كان الجذران تخيليان .(مركبان

* **حل المعادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد:**

المعادلة: ٲ س^{٢} + ب س + حـ = ٠ حيث ٲ ، ب ، حـ ∈ ع ، ٲ ≠ ٠
هى معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد هو س لها جذران (حلان)
* ويسمى ٲ معامل س^{٢} ، ب معامل س ، حـ الحد المطلق
* جذرا المعادلة " مجموعة الحل للمعادلة " هو كل عدد حقيقى يحققها

حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد جبريا بإستخدام التحليل:

١) إذا كان : س^{٢} ـ ٥ س ـ ٦ = ٠ ، س ∈ ع فإن : (س ـ ٦) (س + ١) = ٠
∴ إما س ـ ٦ = ٠ ومنها س = ٦ أ، س + ١ = ٠ ومنها س = ـ ١
∴ مجموعة الحل = { ٦ ، ـ ١ }

٢) إذا كان : س^{٢} ـ ٦ س + ٩ = ٠ ، س ∈ ع فإن : (س ـ ٣)^{٢} = ٠ ∴ س ـ ٣ = ٠
ومنها س = ٦ ∴ مجموعة الحل = { ٣ }

٣) أما إذا كان : س^{٢} ـ ٤ س ـ ٦ = ٠ ، س ∈ ع فإن : س^{٢} ـ ٤ س ـ ٦ يصعب تحليله
لذا لحل مثل هذه المعادلات نلجأ :

*استخدام القانون العام : (غالبا نستخدمه إذا كانت المعادلة غير قابلة للتحليل)

إذا كانت : المعادلة : ء س^{2} + ب س + حـ = ٠ ، ء ، ب ، حـ ∈ ع ، ء ≠ ٠

فإن : س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{2} - ٤ ء جـ}}{٢ ء}$

مثلا : المعادلة س^{2} + ٣ س ـ ٥ = ٠ فإن ء = ١ ، ب = ٣ ، جـ = ـ ٥

المميز = ب^{2} ـ ٤ ء جـ = ٩ ـ ٤ × ١ × ـ ٥ = ٢٩ > ٠ ∴ الجذران حقيقيان مختلفان

نستخدم القانون العام لإيجاد الحذران .

ملحوظة :

إذا كان ل، م هما جذرى المعادلة ء س^{2} + ب س + جـ = ٠ فإنهما يحققان المعادلة

أي أنه بالتعويض نجد : ء ل^{2} + ب ل + جـ = ٠ ، ء م^{2} + ب م + جـ = ٠

مثلا : إذا كان س = ٣ أحد حلول المعادلة س^{2} ـ س ـ ٦ = ٠ ∴ تحقق المعادلة

الطرف الايمن = ٣ ^{2} ـ ٣ ـ ٦ = ٠ = الطرف الايسر

* حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبريا : توجد طريقتان هما :

١ ـ طريقة التعويض :

و فيها نستخدم إحدى المعادلتين لإيجاد أحد المتغيرين بدلالة الآخر ثم نعوض عنه فى المعادلة الثانية فتحصل على معادلة فى متغير واحد و بحلها نحصل على قيمة هذا المتغير ثم بالتعويض فى إحدى المعادلتين نحصل على قيمة المتغير الآخر

٢ـ طريقة الحذف :

وفيها نجعل معاملى أحد المتغيرين فى المعادلتين كل منهما معكوساً جمعياً للآخر و بإجراءعملية جمع المعادلتين نحذف هذا المتغير ثم بالتعويض فى إحدى المعادلتين نحصل على قيمة المتغير الآخر

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين جبريا : س ـ ص = ٣ ، س + ص = ٧

الحل :

بالتعويض : نضع المعادلة الاولى على الصورة س = ٣ + ص

ثم نعوض فى المعادلة الثانية ∴ ٣ + ص + ص = ٧

∴ ٢ ص = ٧ ـ ٣ ∴ ٢ ص = ٤ ∴ ص = ٢

و بالتعويض فى المعادلة الاولى نجد : س = ٣ + ٢ = ٥ ∴ م . ح = { (٥ ، ٢) }

حل أخر : الحذف : س ـ ص = ٣ (١)

س + ص = ٧ (٢)

بالجمع

٢ س = ١٠ ∴ س = ٥ و بالتعويض فى (٢)

∴ ٥ + ص = ٧ ∴ ص = ٧ ـ ٥ = ٢ ∴ م . ح = { (٥ ، ٢) }

- **حل المعادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى و الأخرى من الدرجة الثانية**

يعنى إيجاد الزوج المرتب أو الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية التى تمثل حلاً مشتركاً للمعادلتين معاً

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلتين : س + ٢ ص = ١ ، $س^٢$ ـ $ص^٢$ = ١

الحل : س = ١ ـ ٢ ص (١) ، $س^٢$ ـ $ص^٢$ = ١ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) نجد : $(١ ـ ٢ ص)^٢$ ـ $ص^٢$ = ١

١ ـ ٤ ص + ٤ $ص^٢$ ـ $ص^٢$ = ١ ← ٣ $ص^٢$ ـ ٤ ص = ٠

ص (٣ ص ـ ٤) = ٠ ← ص = ٠ أ، ص = $\frac{٤}{٣}$

بالتعويض فى (١) نجد : س = ١ أ، س = $\frac{-٥}{٣}$

م . ح = { (١ ، ٠) ، ($\frac{-٥}{٣}$ ، $\frac{٤}{٣}$) }

* **لحل المتباينة التربيعية نتبع الخطوات الآتية :**

١ - نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة ص = د(س) فى الصورة العامة.

٢ - ندرس اشارة الدالة د المرتبطة بالمتباينة ونوضحها على خط الأعداد.

٣ - تحديد مجموعة حل المتباينية طبقًا للفترات التى تحققها.

مثال : ابحث إشارة الدالة د :حيث د(س) = $س^٢$+ ٢ س ـ ١٥ مع توضيح ذلك على خط الأعداد

ثم أوجد مجموعة حل المتباينة د(س) > ٠ فى ح

الحل: ﻣ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = ـ ١٥

المميزة = ب^{٢} ـ ٤ ﻣ جـ = (٢)^{٢} ـ ٤ × ١ × ـ ١٥ = ٤ + ٦٠ = ٦٤ > ٠

للدالة جذران حقيقيان مختلفان

س^{٢} + ٢ س ـ ١٥ = ٠

(س ـ ٣)(س + ٥) = ٠ ⟸ س = ٣ ، س = ـ ٥

الدالة موجبة عند س ∈ ح ـ [ـ ٥ ، ٣] ، سالبة عند س ∈] ـ ٥ ، ٣ [

، الدالة صفر عند س ∈ { ـ ٥ ، ٣ } ، م . ح = ح ـ] ـ ٥ ، ٣ [

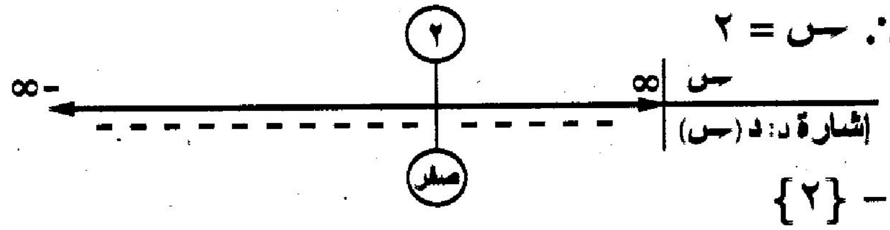
مثال : أوجد مجموعة الحل للمتباينة : ٤ س ـ س^{٢} ـ ٤ > ٠ فى ح

الحل : بوضع د (س) = ٤ س ـ س^{٢} ـ ٤ وبحث إشارة الدالة د نجد أن :

المميز = ب^{٢} ـ ٤ ﻣ حـ = ١٦ ـ ٤ × (ـ١) × (ـ٤) = ٠

∴ المعادلة ٤ س ـ س^{٢} ـ ٤ = ٠ لها جذران متساويان.

وبالتحليل : (س ـ ٢)^{٢} = ٠ ∴ س = ٢



، ∵ ﻣ = ـ١ < ٠

∴ الدالة سالبة عندما س ∈ ح ـ {٢}

، د (س) = ٠ عندما س = ٢

∴ مجموعة حل المتباينة ٤ س ـ س^{٢} ـ ٤ > ٠ هى ح ـ {٢}

* (مفهوم المقياس) ⇦ هو عدد حقيقى غير سالب (≥ ٠)

* (المقياس العـدد) ⇦ هو الجذر التربيعى الموجب لمربع هذا العدد . | س | = $\sqrt{س^{٢}}$

مثلا: | ـ ٥ | = $\sqrt{٢٥}$ ، | ٣ | = $\sqrt{٩}$ = ٣ ، | ٠ | = ٠ ، | $\frac{١}{٢}$ | = $\frac{١}{٢}$

* **تعريف " فك " المقياس :**

| س | = { س ، س ≥ ٠ ، − س ، س < ٠ } ، | س ـ ٢ | = { س − ٢ ، س ≥ ٢ ، − س +٢ ، س < ٢ }

| ٢ س + ٦ | = { ٢س +٦ ، س ≥ − ٣ ، − ٢س − ٦ ، س < − ٣ }

تذكر أن :

صفر المقياس هو قيمة س الناتجة من وضع ما بداخل المقياس مساويا الصفر
مثلا : لإيجاد صفر | ٢ س ـ ٦ | نضع ٢ س ـ ٦ = ٠ و منها س = ٣
∴ صفر هذا المقياس هو { ٣ } و هو يفيد فى تحقيق الحل لمعادلة المقياس بسهولة

فكـرة حل معادلات المقياس :

نأخذ ما بداخل المقياس بنفس إشارته عندما س ⩾ (صفر المقياس)
، و نأخذه بعكس إشارته عندما س < (صفر المقياس)

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة : | ٢ س ـ ٥ | ـ ٣ س = ٢

الحل :

٢ س ـ ٥ = ٠ ⟸ س = ٥/٢ = ٢,٥

عندما س ⩾ ٢,٥

٢ س ـ ٥ ـ ٣ س = ٢
⟸ – س = ٧ ⟸ س = - ٧ مرفوض

عندما س < ٢,٥

- ٢ س + ٥ ـ ٣ س = ٢
⟸ – ٥ س = - ٣ ⟸ س = ٣/٥ تحقق

م . ح = { ٣/٥ }

* **حل المتبـــايـنـات** *

مجموعة حل المتباينة فى متغير واحد هى قيمة أو قيم المتغير التى تجعل المتباينة صحيحة

(١) | س – ٥ | < ٢

إما س – ٥ < ٢ ⟸ س < ٢ + ٥ ⟸ س < ٧
أو - (س - ٥) < ٢ ⟸ س – ٥ > - ٢ ⟸ س > ٣
∴ م . ح =] ٣ ، ٧ [

(٢) | ٢ س + ٣ | ⩽ ٥

إما ٢ س + ٣ ⩽ ٥ ⟸ ٢ س ⩽ ٥ − ٣ ⟸ ٢ س ⩽ ٢ ⟸ س ⩽ ١

أو − (٢ س + ٣) ⩽ ٥ ⟸ ٢ س + ٣ ⩾ − ٥

⟸ ٢ س ⩾ − ٨ ⟸ س ⩾ - ٤

∴ س ∈ [- ٤ ، ١]

(٣) | ٣ س − ٤ | > ٥

إما ٣ س − ٤ > ٥ ⟸ ٣ س > ٩ ⟸ س > ٣

أو − (٣ س − ٤) > ٥ ⟸ ٣ س − ٤ < - ٥

⟸ ٣ س < - ١ ⟸ س < $\frac{-\text{١}}{\text{٣}}$

∴ م . ح = ح −] $\frac{-\text{١}}{\text{٣}}$ ، ٣ [

(٤) | س + ٧ | ⩾ ٠

إما س + ٧ ⩾ ٠ ⟸ س ⩾ − ٧

أو − (س + ٧) ⩾ ٠ ⟸ س + ٧ ⩽ ٠ ⟸ س ⩽ − ٧

∴ م . ح = ح

ملاحظة : عزيز الطالب أوجد مجموعة حل المتباينة | س + ٧ | < ٠ ولاحظ الفرق عن (٤)

*** الأسس :**

إذا كان أ ، ب عددين نسبيين ، م ، ن عددين صحيحين فإن :

(١) $\text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}+\text{ن}}$ فمثلا $\text{٣}^{\text{٢}} \times \text{٣}^{\text{٣}} = \text{٣}^{\text{٥}} = \text{٢٤٣}$

(٢) $\frac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{أ}^{\text{ن}}} = \text{أ}^{\text{م}-\text{ن}}$ فمثلا $\frac{\text{٧}^{\text{٩}}}{\text{٧}^{\text{٥}}} = \text{٧}^{\text{٩}-\text{٥}} = \text{٧}^{\text{٤}} = \text{٢٤٠١}$

(٣) $(\text{أ ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}}\ \text{ب}^{\text{ن}}$ فمثلا $(\text{٣ س})^{\text{٤}} = \text{٣}^{\text{٤}}\ \text{س}^{\text{٤}}$

(٤) $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = \frac{\text{أ}^{\text{ن}}}{\text{ب}^{\text{ن}}}$ فمثلا $\left(\frac{\text{٨}}{\text{٢٧}}\right)^{\text{٣}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

(٥) $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ فمثلا $٧^{-١} = \frac{١}{٧}$ ، $س^{-١} = \frac{١}{س}$

(٦) $(أ^{م})^{ن} = أ^{م \times ن}$ فمثلا $(٢^{٢})^{٣} = ٢^{٦} = ٦٤$

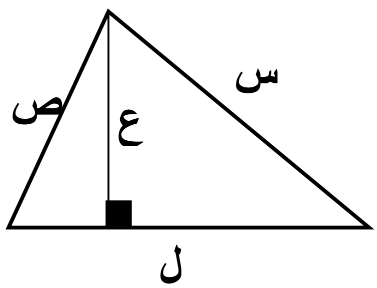
٦) **الكـــــميات :**

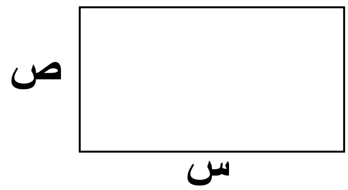
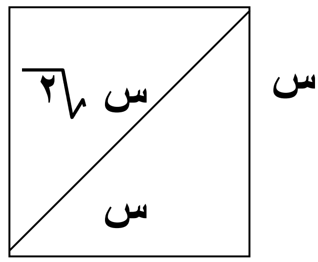
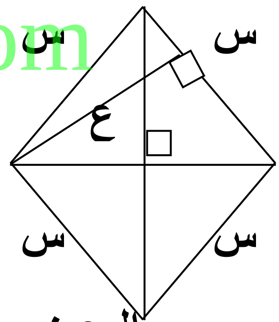
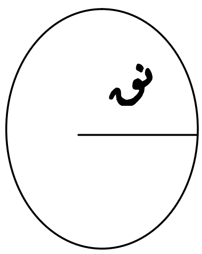
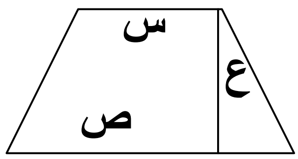
١ـ الكميات المعرفة : محددة و معروفة مثل ... الاعداد الحقيقية

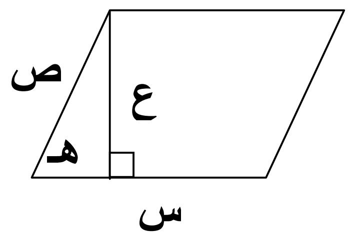
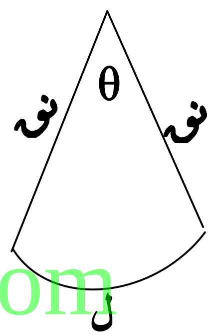
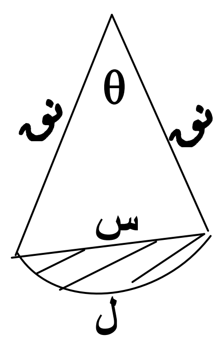
٢ـ الكميات الغير مُعرفة : غير محددة و ليس لها معنى مثل ... $\frac{٨}{صفر}$ ، $\frac{-٩}{صفر}$ ، $+\infty$ ، $-\infty$ ، الاعداد التخيلية

٣ـ الكميات الغير معينة : مثل ... $\frac{صفر}{صفر}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $(صفر)^{\infty}$ ، $(\infty)^{صفر}$ ، ...

٧) **المسطحات:**

المساحة	المحيط	الشكل
١ـ نصف طول القاعدة × الارتفاع ٢ـ نصف حاصل ضرب طولا ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما ٣ـ باستخدام صيغة هيرون $\sqrt{ح(ح-س)(ح-ص)(ح-ل)}$	مجموع أطوال أضلاعه س + ص + ل	

الشكل	المحيط	المساحة
 المستطيل	٢ × (الطول + العرض) نصف المحيط = الطول + العرض	الطول × العرض
 المربع	٤ × طول ضلعه = ٤ × س	مربع طول ضلعه = س^{٢} أو نصف مربع قطره = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} أو طول الضلع × نفسه
 المعين	٤ × طول ضلعه = ٤ × س	نصف حاصل ضرب طولا قطريه أو طول قاعدته × ارتفاعه = س × ع
 الدائرة	٢ π نق نق نصف قطر الدائرة π = ٣,١٤ أو $\frac{٢٢}{٧}$ مالم يذكر خلاف ذلك	π نق^{٢}
شبة منحرف 	مجموع أطوال أضلاعه	$\frac{١}{٢}$(س + ص) × ع القاعدة المتوسطة × ع

الشكل	المحيط	المساحة
متوازى الاضلاع 	٢ (س + ص)	طول القاعدة × الارتفاع = س × ع حاصل ضرب ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما = س ص حا هـ
القطاع الدائرى 	٢ نق + ل نق نصف قطر الدائرة ل طول القوس	= $\frac{1}{2}$ ل نق = $\frac{1}{2}$ $\theta^{ء}$ نق^{2} = $\frac{\theta}{360}$ × π نق^{2} θ الزاوية بالستينى
القطعة الدائرية 	س + ل	مساحة القطاع ـ مساحة Δ $\frac{1}{2}$ نق^{2} [$\theta^{ء}$ ـ حا θ]

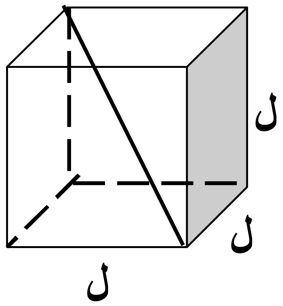
٨) **المجسمات** : قوانين عامة للمجسمات القائمة (منتظمة المقطع)

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

١) **المكعب :**



الخواص : ١- كل الأحرف متساوية فى الطول و عددها ١٢

٢- له ٨ رؤوس

٣- كل الأوجه متطابقة (مربعات)

٤- كل الاقطار متساوية فى الطول

بفرض طول ضلعه (حرفه) = ل ، مساحة الوجة الواحد = ل^{٢}

طول قطر المكعب = ل$\sqrt{٣}$

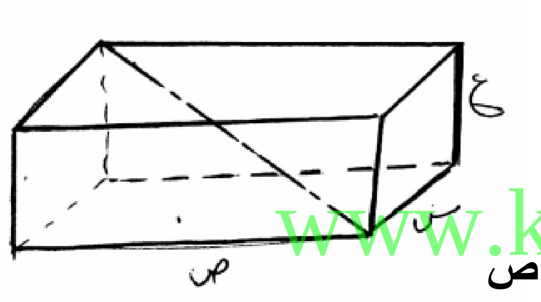
الحجم = ل^{٣} ، المساحة الجانبية = ٤ ل^{٢} ، المساحة الكلية = ٦ ل^{٢}

٢) **متوازى المستطيلات :**

الخواص : ١- الاحرف المتوازية متساوية فى الطول و عدد الاحرف ١٢

٢- له ٨ رؤوس و ٦ أوجة مستطيلة

٣- كل وجهين متقابلين متطابقين



ابعاد متوازى المستطيلات س ، ص ، ع

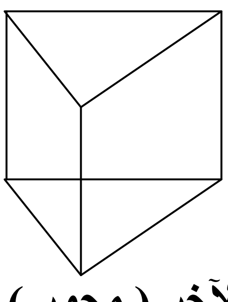
الحجم = الطول × العرض × الارتفاع = س ص ع

المساحة الجانبية = ٢ (س + ص) × ع

المساحة الكلية = [٢ (س + ص) × ع] + ٢ س ص

طول القطر = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢}}$

٣) **المنشور الثلاثى القائم** : عدد الأوجة = ٥ ، عدد الرؤوس = ٦ ، عدد الأحرف = ٩



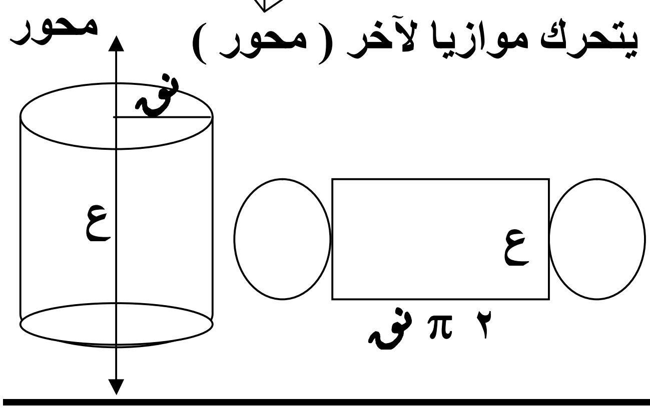
القاعدتين المتقابلتين متطابقتين

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

٤) **الاسطوانة القائمة** : هى المحل الهندسي لمستقيم يتحرك موازيا لآخر (محور) و على بعد ثابت منه

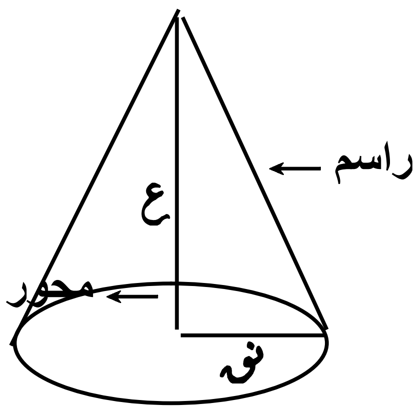


الحجم = π نق^{٢} × ع

المساحة الجانبية = ٢ π نق × ع

المساحة الكلية = ٢ π نق × ع + ٢ π نق^{٢}

٥) **المخروط القائم :** هو المحل الهندسي لدوران مستقيم مثبت من أحد طرفيه على مستقيم آخر



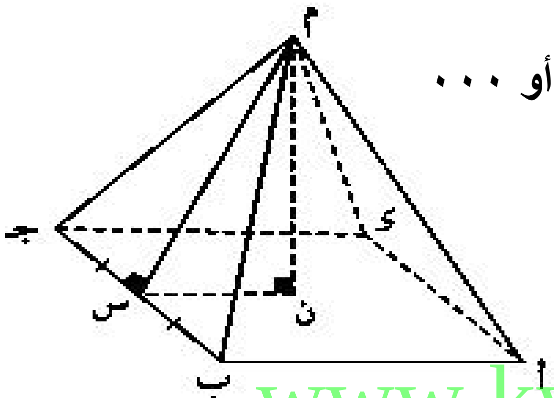
الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ (π نق^٢) × ع

المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل نق

مساحة الكلية للمخروط القائم = π ل نق + π نق^٢

٦) **الهرم :** يسمى حسب اضلاع قاعدته ثلاثى أو رباعى أو ...

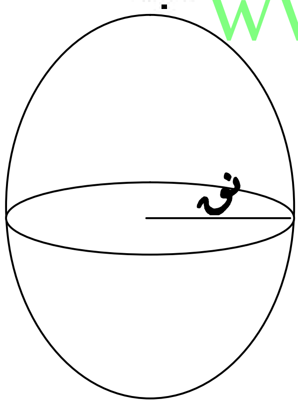


المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة ×الارتفاع الجانبى

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

٧) **الكرة :**



مساحة سطحها = ٤ π نق^٢ ، الحجم = $\frac{٤}{٣}$ π نق^٣

٩) **الدوال الأساسية :**

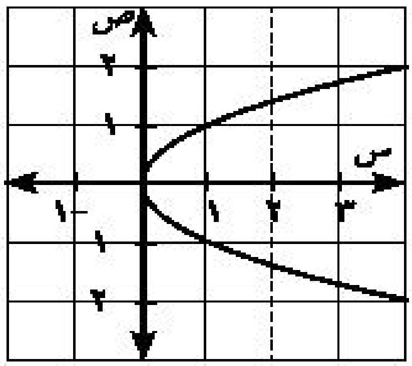
* **الدالة :** هى علاقة بين متغيرين بحيث كل قيمة للمتغير المستقل (س) يقابلها قيمة واحدة وواحدة فقط للمتغير التابع (ص) مثلا : ص = د(س)

و يقال للعلاقة د(س) دالة إذا كان لكل قيمة حقيقية لـ س يناظرها قيمة وحيدة لـ د(س)

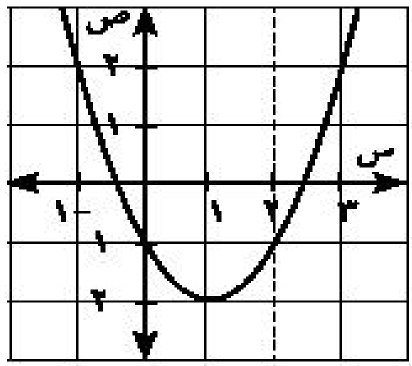
مثلا : ص = س^٢ + ١ دالة ، ص^٢ = س^٢ + ١ ليست دالة لان لكل قيمة لـ س قيمتان لـ ص

- لتحديد العلاقة ما إذا كانت دالة أم لا (نستخدم اختبار الخط الرأسي)

العلاقة لا تمثل دالة إذا وجد خط رأسي (مستقيم // محور الصادات) يقطع الشكل البيانى فى أكثر من نقطة .



ليست دالة



دالة

* لنقل نقطة رأس المنحنى (أو نقطة تقاطع محاور التماثل) إلى النقطة ($س_1$ ، $ص_1$)
نستبدل فى الدالة الأصلية كل س بـــ (س ـ $س_1$) ، ص بـــ (ص ـ $ص_1$)

الدالة الأحادية :

الدالة د : ~س~ ⟵ ~ص~ تسمى دالة أحادية

إذا كان لكل م ، ب ∈ ~س~ ، د(م) = د(ب) فإن م = ب

أو لكل م ≠ ب فإن د(م) ≠ د(ب)

و يتحقق من ذلك بيانيا بالخط الأفقى الذى لا يمر بأكثر من نقطة واحدة من بيان الدالة

المجال : هو القيم الممكنة لــ س أو هو مجموعة العناصر التى يأخذها المتغير س بحيث يكون الناتج كمية معرفة " عدد حقيقى

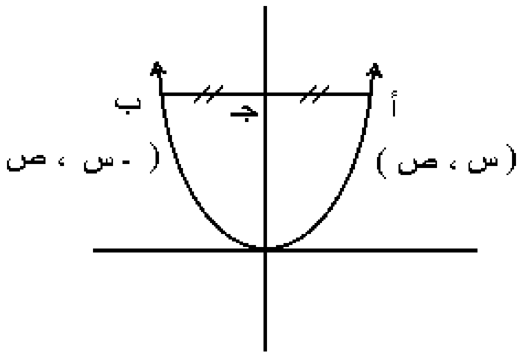
و تكون قيمه على محور السينات (الفترة المقابلة للشكل البيانى على محور السينات)

المدى : هو القيم الممكنة لــ ص

أو هو مجموعة العناصر الحقيقية التى يأخذها المتغير ص
ونحصل عليه بيانيا من محور الصادات

• لأى دالة تمر بنقطتين متتاليتين ($س_1$ ، $ص_1$) ، ($س_2$ ، $ص_2$) حيث $س_2 > س_1$
و كان $ص_2 > ص_1$ فإن الدالة تزايدية و العكس صحيح

* انواع الدوال :



أولا : الدالة الزوجية :

جبريا : الدالة د : س ⟵ ص تكون زوجية

إذا كانت : د (- س) = د (س)

∀ س ، - س ∋ المجال . [الرمز ∀ يقال لكل]

بيانيا : تكون الدالة زوجية إذا كان الشكل البيانى لها متماثلا حول الصادات .

فإذا كانت النقطة (س ، ص) ∋ منحنى الدالة فإن النقطة (- س ، ص) ∋ منحنى الدالة .

ثانياً : الدالة الفردية :

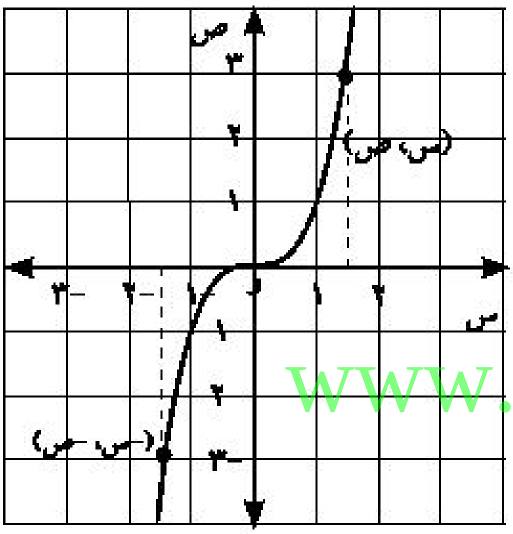
جبريا : الدالة د : س ⟵ ص تكون فردية

إذا كانت : د (- س) = ـ د (س)

∀ س ، - س ∋ المجال .

بيانيا : تكون الدالة فردية إذا كان الشكل البيانى لها متماثلا حول نقطة الأصل .

فإذا كانت النقطة (س ، ص) تقع على منحنى الدالة فإن النقطة (- س ، - ص) تقع أيضا على منحنى الدالة



التماثل حول محور نقطة الأصل.

ملاحظة: إذا كان د (- س) ≠ ـ د (س) ≠ د (س)
فإن الدالة ليست فردية أو زوجية

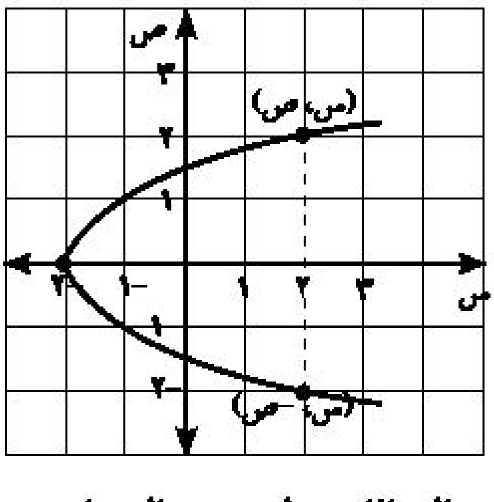
* ثالثا : التماثل (الانعكاس) حول محورى الاحداثيات :

(١) التماثل حول محور السينات :

فى الشكل المقابل :

النقطة (س ، - ص) الواقعة على الشكل البيانى لمنحنى الدالة هى صورة النقطة (س ، ص) الواقعة عليه ايضا بالانعكاس حول محور السينات

النقطة (٢ ، ٢) صورة النقطة (٢ ، ـ ٢)



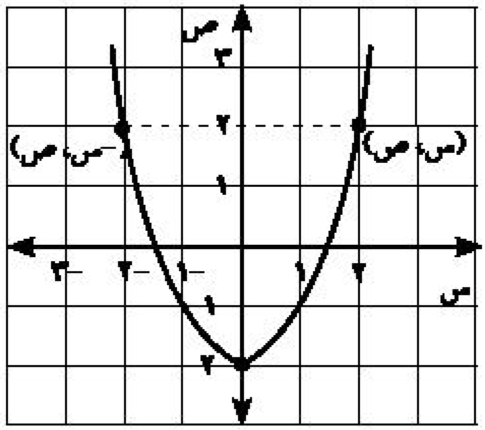
التماثل حول محور السينات

(٢) **التماثل حول محور الصادات :**

فى الشكل المقابل :

النقطة (ـ س ، ص) الواقعة على الشكل البيانى لمنحنى الدالة هى صورة النقطة (س ، ص) الواقعة عليه أيضا بالانعكاس حول محور الصادات

مثلا : النقطة (ـ ١ ، ٠) صورة النقطة (١ ، ٠) بالانعكاس حول محور الصادات



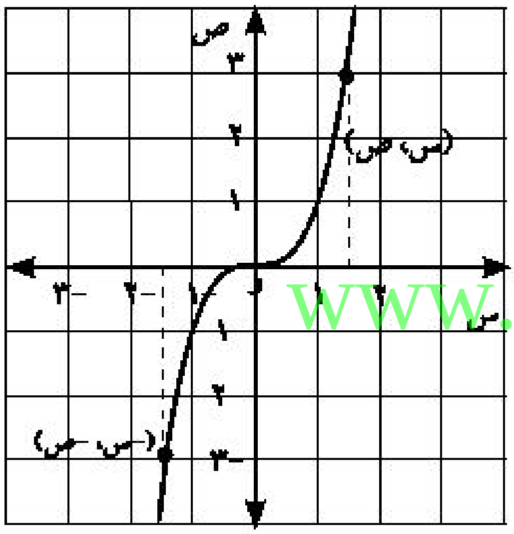
التماثل حول محور الصادات

(٣) **التماثل حول نقطة الأصل :**

فى الشكل المقابل :

النقطة (ـ س ، ـ ص) الواقعة على الشكل البيانى لمنحنى الدالة هى صورة النقطة (س ، ص) الواقعة على نفس المنحنى أيضا بالانعكاس حول نقطة الأصل

النقطة (٢,٥ ، ٣) صورة النقطة (ـ ٢,٥ ، ـ ٣)

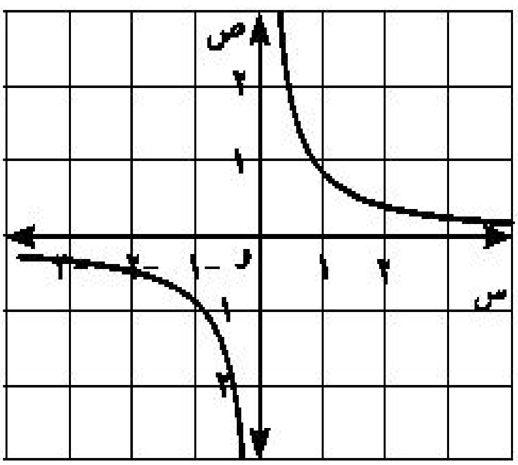


التماثل حول محور نقطة الأصل.

فى الشكل المقابل :

المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

مثلا النقطة (١ ، ١) صورة النقطة (ـ ١ ، ـ ١) بالانعكاس فى نقطة الأصل

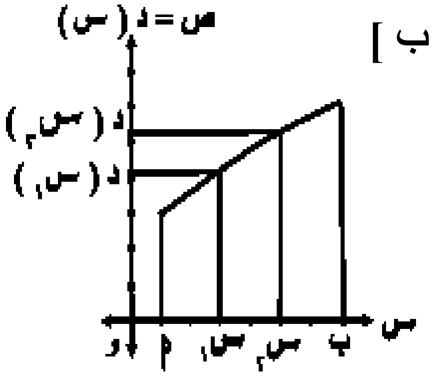


* لنقل نقطة رأس المنحنى (أو نقطة تقاطع محاور التماثل) إلى النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) نستبدل فى الدالة الأصلية كل س بـــ (س ـ $س_١$) ، ص بـــ (ص ـ $ص_١$)

(اطـــــــراد الـدالــــــة)

تزايدية	تناقصية	ثابتة

١ - (**الدالة التزايدية**) ⇐ يقال للدالة أنها تزايدية فى الفترة [أ ، ب]

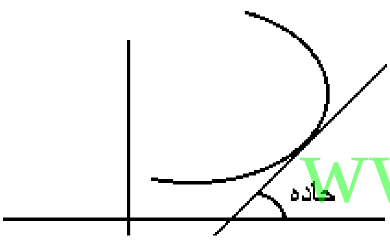


إذا كان لكل $س_1$ ، $س_2$ ∈ [أ ، ب] يتحقق الشرط الآتى :

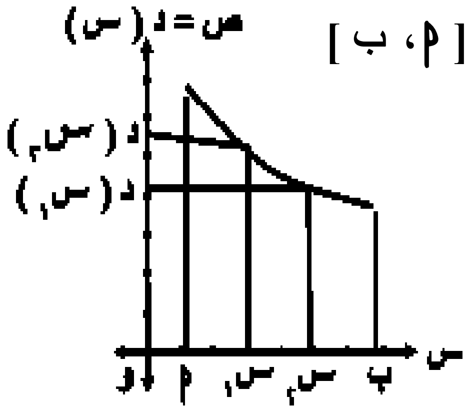
إذا كان $س_1 < س_2$ ⇐ $د(س_1) < د(س_2)$

وبصفة عامـــة : د (س) تكون تزايدية إذا كانت : قيمة الدالة تتزايد بإزدياد قيمة س .

وبطريقة أخرى : د (س) تكون تزايدية إذا كان المماس لمنحنى الدالة يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .



٢- (**الدالة التناقصية**) ⇐ يقال للدالة أنها تناقصية فى الفترة [أ، ب]



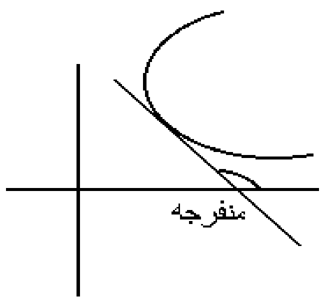
إذا كان لكل $س_1$ ، $س_2$ ∈ [أ، ب]

يتحقق الشرط الآتى :

إذا كان $س_1 < س_2$ ⇐ $د(س_1) > د(س_2)$

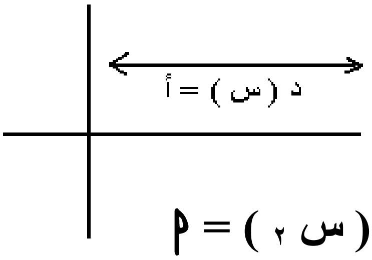
وبصفة عامـــة : د (س) تكون تناقصية إذا كانت :قيمة الدالة تتناقص بإزدياد قيمة س .

وبطريقة أخرى : د (س) تكون تناقصية إذا كان المماس لمنحنى الدالة يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .



٣- (الدالة الثابته) ⇦ يقال للدالة أنها ثابته فى الفترة [م ، ب]

إذا كان لكل س ١ ، س ٢ ∋ [م ، ب]



يتحقق الشرط الآتى : إذا كان س ١ > س ٢ ⇦ د (س ١) = د (س ٢) = م

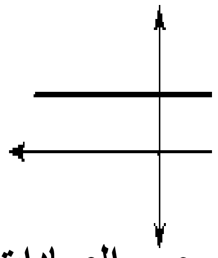
⇩ وبصفة عامـــة : د (س) تكون ثابتة إذا كانت قيمة الدالة ثابتة مهما كانت قيمة س .

يقصد باطراد الدوال معرفة الفترات التى تكون عندها الدالة : متزايدة أو متناقصة أو ثابتة

(١) الدالة تكون متزايدة إذا كان كلما اتجهنا من اليسار إلى اليمين يصعد المنحنى لأعلى

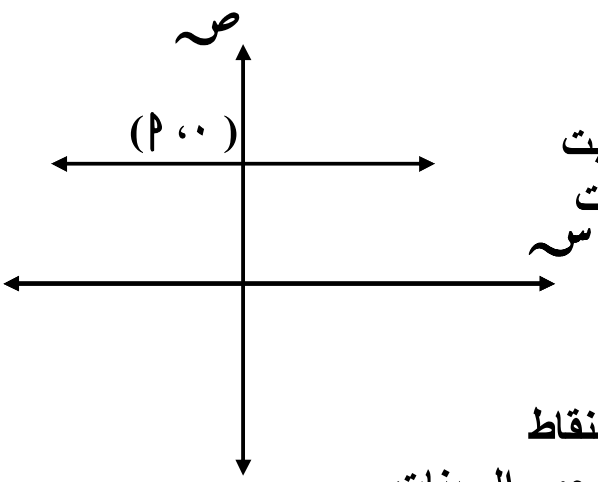
(٢) الدالة تكون متناقصة إذا كان كلما اتجهنا من اليسار إلى اليمين يهبط المنحنى لأسفل

(٣) الدالة تكون ثابتة إذا كان منحنى الدالة خط مستقيم يوازى محور السينات .



* رسم الدوال :

١) الدالة الثابتة :



الصورة العامة للدالة الثابتة هى د(س) = م حيث م ثابت

لكل س ∋ ح* وتمثل بيانيا بمستقيم يوازى محور السينات

و يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، م)

كما فى الشكل الموضح :

مجالها = ح ، مداها = { م } ، الدالة زوجية

و هى الدالة الوحيدة التى مداها نقطة أو مجموعة من النقاط

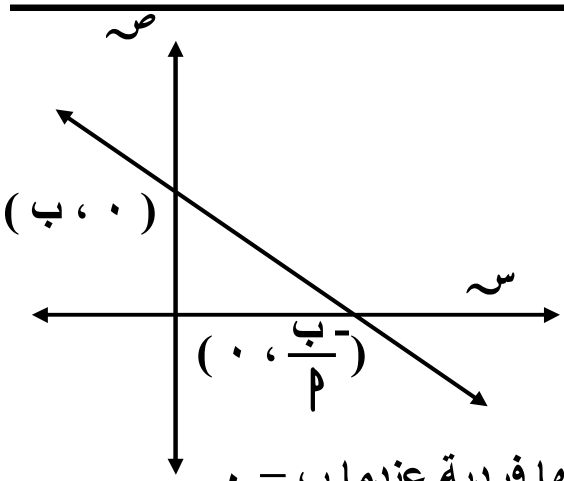
ملحوظة : إذا كانت م موجبة فإن المستقيم يكون أعلى محور السينات

، و إذا كانت م سالبة فإن المستقيم يكون أسفل محور السينات

٢) الدالة الخطية :

الصورة العامة للدالة الخطية هى د(س) = م س + ب لكل س ∋ ح ، م ≠ ٠

و تمثل بخط مستقيم ميله = م ، ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب) و يقطع محور السينات فى النقطة ($\frac{-ب}{م}$ ، ٠) ، ب الجزء المقطوع من محور الصادات



مجالها = ح ، مداها = ح

اطرادها :

الدالة تزايدية عندما م > ٠ (موجبة)

مثلا : الدالة د(س) = ٣ س – ٢ متزايدة

الدالة تناقصية عندما م < ٠ (سالبة)

مثلا : الدالة د(س) = ٢ – ٣ س متناقصة

نوعها :

الدالة ليست زوجية و ليست فردية بصفة عامة و لكنها فردية عندما ب = ٠

اى د(س) = مس (مستقيم يمر بنقطة الأصل)

٣) الدالة التربيعية :

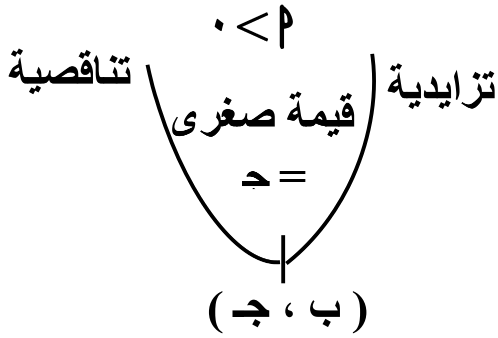
الصورة العامة هى $\boxed{\text{د(س) = م (س ـ ب)}^{٢} + \text{جـ}}$ ، م ≠ ٠

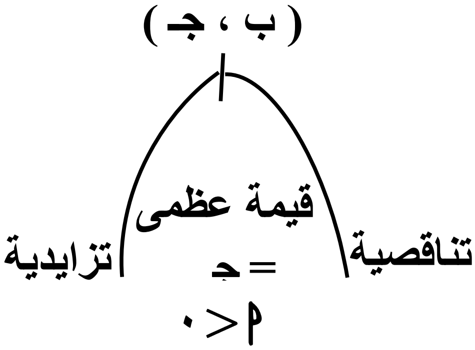
تمثل بيانيا بمنحنى ذو فرعين لأعلى أو لأسفل و تكون نقطة الرأس المنحنى = (ب ، جـ)

، معادلة خط التماثل هى س = ب

الازاحة السينية (الانتقال فى اتجاه محور السينات) = ب

، الازاحة الصادية (الانتقال فى اتجاه محور الصادات) = جـ





إذا كان : م > ٠ (موجبة)

مدى الدالة = [جـ ، ∞ [

الدالة تزايدية فى] ب ، ∞ [

الدالة تناقصية فى] - ∞ ، ب [

إذا كان : م < ٠ (سالبة)

مدى الدالة =] - ∞ ، جـ]

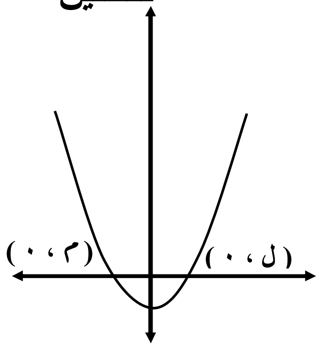
الدالة تزايدية فى] - ∞ ، ب [

الدالة تناقصية فى] ب ، ∞ [

ملاحظات :

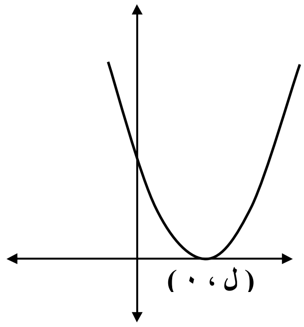
تحتوى مجموعة الحل على :

عنصرين إذا كان المنحنى يقطع محور السينات فى نقطتين



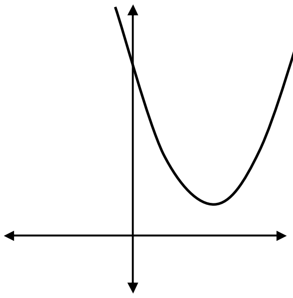
يوجد حلان للمعادلة فى ح
مجموعة الحل = { ل ، م }

عنصر واحد إذا كان المنحنى يقطع محور السينات فى نقطة واحدة



يوجد حل وحيد للمعادلة فى ح
مجموعة الحل = { ل }

لا توجد عناصر إذا كان المنحنى لا يقطع محور السينات فى أى نقطة



لا يوجد حل للمعادلة فى ح
مجموعة الحل = $\emptyset$

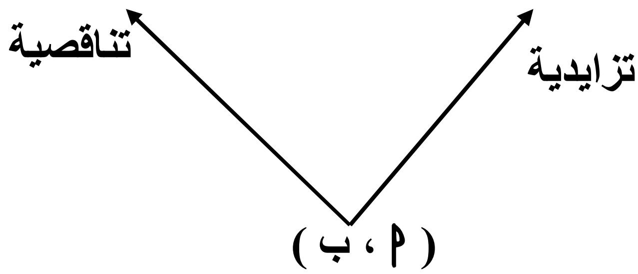
٤) دالة المقياس :

الصورة العامة هى : $\boxed{\text{د(س) = ك | س - أ | + ب}}$ ، ك = ± ١

تمثل بيانيا بشعاعين من النقطة (أ ، ب) هى نقطة رأس المنحنى (أ ، ب)

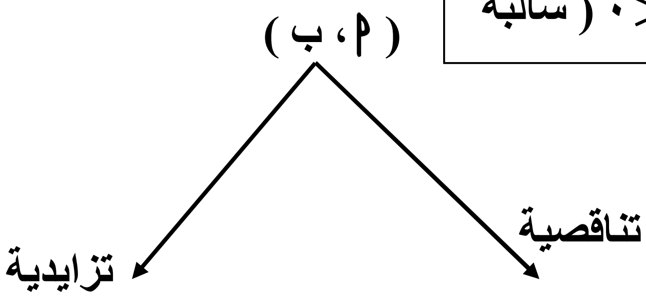
أ = الازاحة السينية ، ب = الازاحة الصادية ، معادلة محور التماثل هو س = أ

ك > ٠ (موجبة)



مدى الدالة = [ب ، ∞ [
الدالة تزايدية فى] أ ، ∞ [
الدالة تناقصية فى] - ∞ ، أ [

ك < ٠ (سالبة)



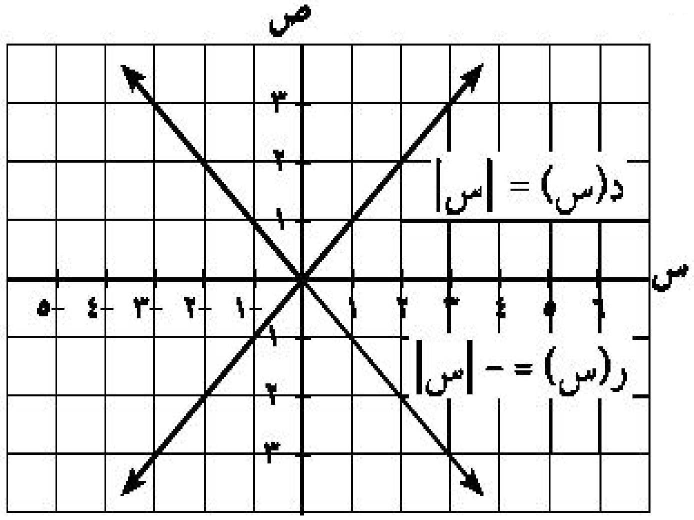
مدى الدالة =] - ∞ ، ب]
الدالة تزايدية فى] - ∞ ، أ [
الدالة تناقصية فى] أ ، ∞ [

- **انعكاس دالة المقياس :**

منحنى الدالة ر حيث ر(س) = ـ | س |

هو انعكاس لمنحنى الدالة د(س)

حيث د(س) = | س |على محور السينات



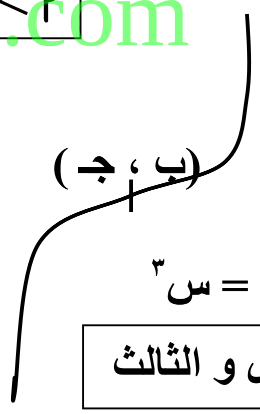
٥) الدالة التكعيبية :

الصورة العامة : $\boxed{\text{د(س) = أ (س ـ ب)}^{٣}\text{ + جـ}}$ ، أ = ± ١

تمثل بيانيا بمنحنى ذو فرعين أحدهما لأعلى و الآخر لأسفل

منحنى الدالة متماثل حول النقطة (ب ، جـ) و هى رأس المنحنى (نقطة التماثل)

| أ > ٠ (موجبة) |



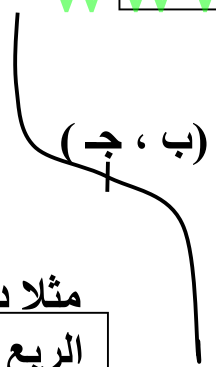
مثلا د(س) = س^{٣}

الربع الاول و الثالث

الدالة تزايدية على ح

الدالة لا زوجية و فردية

| أ < ٠ (سالبة) |



مثلا د(س) = ـ س^{٣}

الربع الثانى و الرابع

الدالة تناقصية على ح

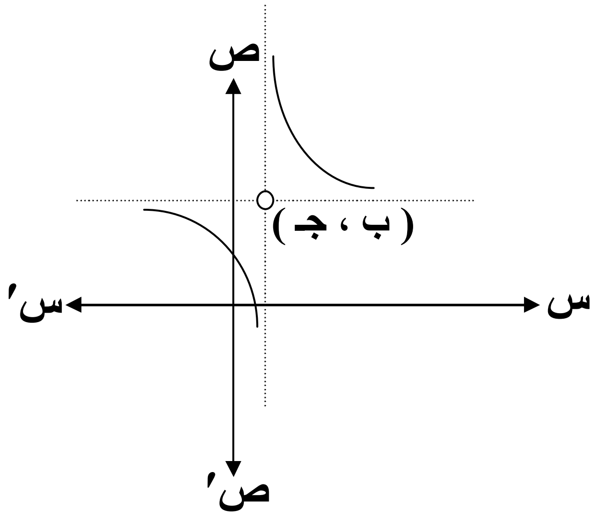
الدالة لا زوجية و فردية

٦) الدالة الكسرية :

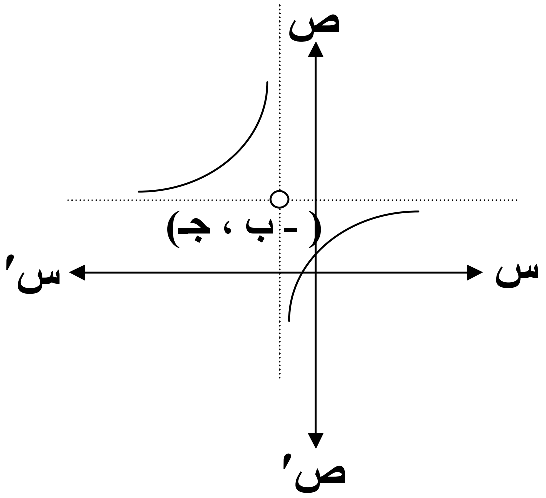
الصورة العامة $\boxed{\text{د(س) = } \frac{\text{ك}}{\text{س - ب}} \text{ + جـ}}$ ، ك ≠ ٠ ، س ≠ ب

نقطة التماثل هى (ب ، جـ)

ويكون مجالها = ح – { ب } ، مداها = ح – { جـ }



الدالة تناقصية فى] ب ، ∞ [،] - ∞ ، ب [
المنحنى يقع فى الربعين الاول و الثالث
الدالة لا زوجية ولا فردية

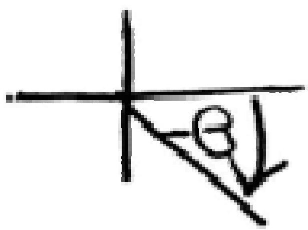


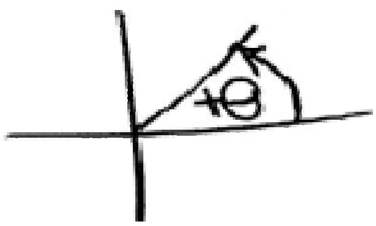
الدالة تزايدية فى] - ∞، - ب [،] - ب،∞[
المنحنى يقع فى الربعين الثانى و الرابع
الدالة لا زوجية ولا فردية

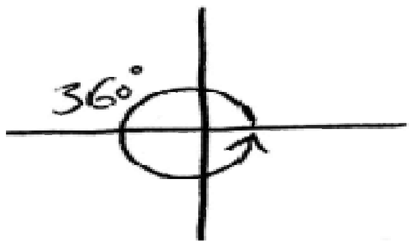
[٢] أساسيات فى حساب المثلثات

١) الزاوية الموجهة :

الدائرة الكاملة عبارة عن ٣٦٠ ° (بالتقدير الستينى) أو ٢ π (بالتقدير الدائرى)
تكون الزاوية موجبة إذا كان قياسها عكس عقارب الساعة
و سالبة إذا كان قياسها فى اتجاه عقارب الساعة







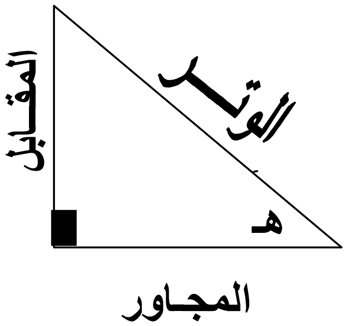
٢) القياس الستينى و الدائرى : الزاوية بالستينى ← الزاوية بالدائرى

الزاوية بالستينى		الزاوية بالدائرى
٣٦٠ °	←	٢ π
θ	←	θ ؏

التحويل من الستينى الى الدائرى : $\theta \times \frac{\pi}{١٨٠}$

التحويل من الدائرى الى الستينى : $\theta^{ء} \times \frac{١٨٠}{\pi}$

٣) **الدوال المثلثية للزاوية الحادة :**



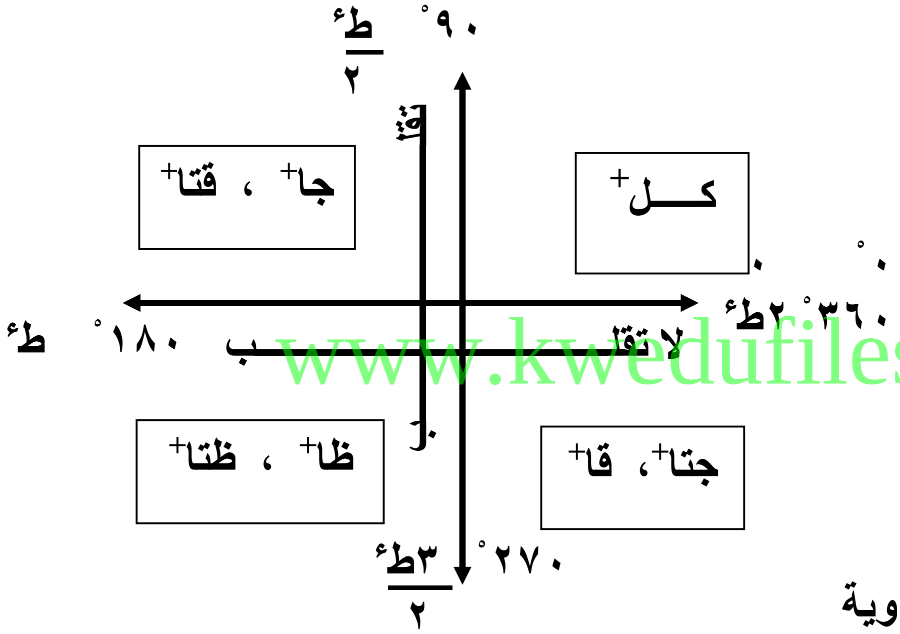
جاهـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، قتاهـ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ = $\frac{1}{\text{حا } \theta}$

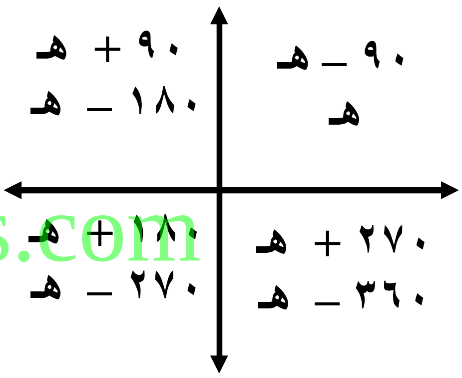
جتاهـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ، قاهـ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{1}{\text{حتا } \theta}$

ظاهـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{1}{\text{ظتا هـ}}$ = $\frac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}}$

، ظتاهـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ = $\frac{1}{\text{ظا } \theta}$ = $\frac{\text{حتا هـ}}{\text{حا هـ}}$

٤) **العلاقة بين الدوال :**





خطوات التحويل :

١ـ حدد الربع الذى تقع فيه الزاوية

٢ـ حدد اشارة الدالة المثلثية بناءاً على الربع الذى تقع فيه

٣ـ إذا كانت الدوال فيها ٩٠ ، ٢٧٠ يتم التغير من التاء الى غير التاء و العكس

بعض الأمثلة على التحويلات :

١) حا (١٨٠ ـ هـ) = حا هـ [١٨٠ – هـ تقع فى الربع الثانى]

٢) حا (٢٧٠ ـ ٣هـ) = ـ حتا هـ [٢٧٠ ـ ٣ هـ تقع فى الربع الثالث]

٣) حا (١٨٠ + هـ) = ـ حا هـ [١٨٠ + هـ تقع فى الربع الثالث]

٤) ظتا (٣٦٠ ـ ٢ هـ) = ـ ظتا ٢ هـ [٣٦٠ ـ ٢ هـ تقع فى الربع الرابع]

٥) قا (٣٦٠ ـ هـ) = قا هـ [٣٦٠ ـ هـ تقع فى الربع الرابع]

٦) حا (٦٠ + هـ) = حا (٦٠ + ٣٠ ـ ٣٠ + هـ)

= حا (٩٠ ـ (هـ ـ ٣٠)) = حتا (هـ ـ ٣٠)

٧) حا (ـ هـ) = ـ حا هـ ، حتا (ـ هـ) = حتا هـ ، طا (ـ هـ) = ـ طا هـ ٠٠٠٠

* الزاوية السالبة تحول للزاوية الموجبة باضافة ٣٦٠ (تعامل الزاوية فى الربع الرابع)

حفظ لسرعة الحل : الدالة الفردية إذا كان د(ـ س) = ـ د(س)
الدالة الزوجية إذا كان د(ـ س) = د(س)

١) حا (ـ هـ) = ـ حا هـ (دالة فردية)
٢) طا (ـ هـ) = ـ طا هـ (دالة فردية)
٣) حتا (ـ هـ) = حتا هـ (دالة زوجية)

نفس القواعد يتم تطبيقها على مقلوباتهم

٥) **المتطابقات المثلثية** : نفرض θ أى زاوية كذلك م ، ب

١) * حا^2 θ + حتا^2 θ = ١ * ١ + طا^2 θ = قا^2 θ * ١ + طتا^2 θ = قتا^2 θ

٢) حا (م ± ب) = حا م حتا ب ± حتا م حا ب [دوال مختلفة]

٣) حتا (م ± ب) = حتا م حتا ب ∓ حا م حا ب [دوال متشابهة]

٤) طا (م ± ب) = $\frac{\text{طا م} \pm \text{طا ب}}{١ \mp \text{طا م طا ب}}$ [البسط متشابهة الاشارة و المقام مختلف الاشارة]

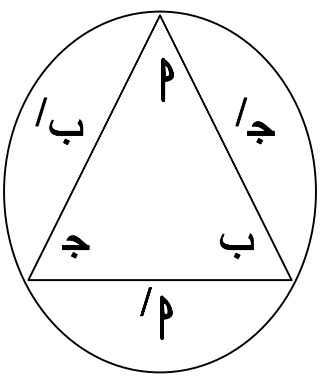
٥) حا ٢ θ = ٢ حا θ حتا θ ، حا ٤ م = ٢ حا ٢ م حتا ٢ م [ضعف الزاوية]

٦) حتا ٢ ب = حتا^2 ب ـ حا^2 ب = ٢ حتا^2 ب ـ ١ = ١ ـ ٢ حا^2 ب

٧) طا ٢ م = $\frac{\text{٢طا م}}{\text{١ ـ طا}^2\text{ م}}$ ، طا ٦ ب = $\frac{\text{٢طا ٣ب}}{\text{١ ـ طا}^2\text{ ٣ب}}$

٧) من ٦ نجد :
حا^2 ب = $\frac{١}{٢}$ (١ ـ حتا ٢ ب) ، حتا^2 ب = $\frac{١}{٢}$ (١ + حتا ٢ ب)

٦) **قانون الجيب** : $\frac{\text{م}/}{\text{حا م}}$ = $\frac{\text{ب}/}{\text{حا ب}}$ = $\frac{\text{جـ}/}{\text{حا جـ}}$ = ٢ نق



حيث م زاوية ، م/ طول الضلع المقابل للزاوية
نق نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث م ب جـ

٧) <u>قانون جيب التمام</u> :

$أ^{/٢} = ب^{/٢} + حـ^{/٢} - ٢ ب^{/} حـ^{/}$ حتا أ ومنها حتا أ $= \frac{ب^{/٢} + حـ^{/٢} - أ^{/٢}}{٢ ب^{/} حـ^{/}}$

$ب^{/٢} = أ^{/٢} + حـ^{/٢} - ٢ أ^{/} حـ^{/}$ حتا ب ومنها حتا ب $= \frac{أ^{/٢} + حـ^{/٢} - ب^{/٢}}{٢ أ^{/} حـ^{/}}$

$حـ^{/٢} = أ^{/٢} + ب^{/٢} - ٢ أ^{/} ب^{/}$ حتا حـ ومنها حتا حـ $= \frac{أ^{/٢} + ب^{/٢} - حـ^{/٢}}{٢ أ^{/} ب^{/}}$

تستخدم هذه الصورة من قانون جيب التمام إذا علم طولا ضلعين فى مثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما	تستخدم هذه الصورة من قانون جيب التمام إذا علمت أطوال أضلاع مثلث أو النسبة بينها

٨) <u>مهم إضافى</u> :

* حا ٣ θ = ٣ حا θ ـ ٤ حا^{٣} θ
* حتا ٣ θ = ٤ حتا^{٣} θ ـ ٣ حتا θ

ايجاد حا ، حتا ٣ θ بدلالة حا ، حتا يمكن إثباتهم باستخدام ديموافر

* فى أى مثلث إذا كان ح $= \frac{أ^{/}+ب^{/}+جـ^{/}}{٢}$ نصف المحيط
* يمكن ايجاد مساحة سطح المثلث الذى أطوال أضلاعه هى $أ^{/}$، $ب^{/}$ ، $جـ^{/}$ هى :

$$م \Delta = \sqrt{ع (ع - أ^{/}) (ع - ب^{/}) (ع - جـ^{/})}$$

حيث ع نصف محيط المثلث

* من قانون مجموع زاويتين يمكن استنتاج الصيغ الآتية :

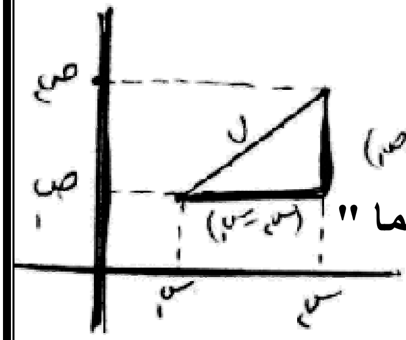
حا س حتا ص = $\frac{١}{٢}$ [حا (س + ص) + حا (س ـ ص)]

حا س حا ص = $\frac{١}{٢}$ [حتا (س ـ ص) ـ حتا (س + ص)]

حتا س حتا ص = $\frac{١}{٢}$ [حتا (س + ص) + حتا (س ـ ص)]

[٣] أساسيات الهندسة التحليلية :

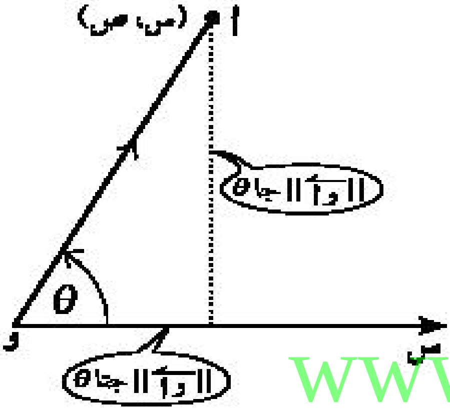
١) البعد بين نقطتين :



لأى نقطتين فى المستوى (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢)
يمكن إيجاد البعد بينهما " طول القطعة المستقيمة ل الواصلة بينهما "
من العلاقة :

$$\text{ل} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$$

٢) الصورة القطبية لمتجه الموضع :



فى الشكل المقابل :
المتجه $\overrightarrow{\text{و أ}}$ يصنع زاوية قياسها θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، معياره = $\|\overrightarrow{\text{و أ}}\|$
فيمكن التعبير عن المتجه كالتالى :
$\overrightarrow{\text{و أ}} = (\|\overrightarrow{\text{و أ}}\| ، \theta)$ و تعرف بالصورة القضبية للمتجه
و يكون إحداثيا النقطة أ فى المستوى الاحداثى المتعامد هما

$\text{س} = \|\overrightarrow{\text{و أ}}\| \text{ حتا } \theta$ ، $\text{ص} = \|\overrightarrow{\text{و أ}}\| \text{ حا } \theta$ و يكون: $\text{طا } \theta = \dfrac{\text{ص}}{\text{س}}$

٣) ايجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة :

$$(\text{س} ، \text{ص}) = \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2}\right)$$ الصيغة الإحداثية

٤) ايجاد الرأس الرابعة متى علمت ثلاثة رؤوس من متوازى أضلاع و إخواته :

بفرض الرأس الرابع (س٤ ، ص٤)

$\text{س}_1 + \text{س}_3 = \text{س}_2 + \text{س}_4$ ، $\text{ص}_1 + \text{ص}_3 = \text{ص}_2 + \text{ص}_4$

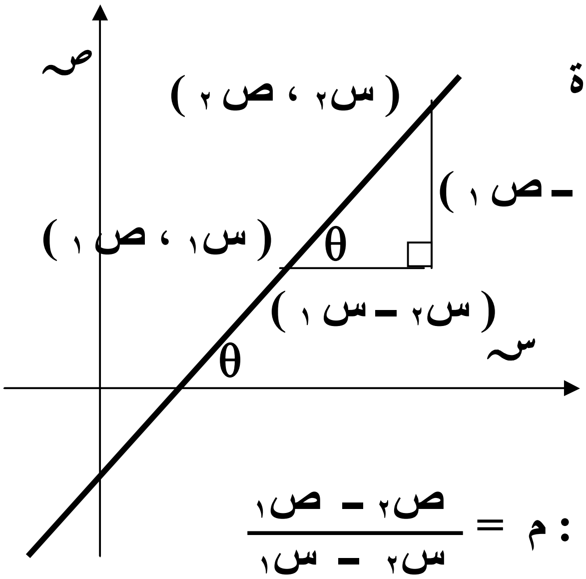
٥) ايجاد نقطة تقاطع متوسطات مثلث :

إذا كانت أ(س١ ، ص١) ، ب(س٢ ، ص٢) ، جـ (س٣ ، ص٣) رؤوس مثلث
فإن إحداثيى نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب جـ و لتكن م

$$\text{م} = \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3}{3} ، \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3}{3}\right)$$

٦) **<u>ايجاد ميل خط مستقيم</u> :**

<u>تعريف</u> : ميل الخط المستقيم بأنه ظل الزاوية التى يصنعها هذا المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .



<u>ملاحظة</u> : يكون الميل موجب إذا كانت الزاوية حادة ، الميل سالب إذا كانت الزاوية منفرجة

& <u>طرق إيجاد الميل</u> :

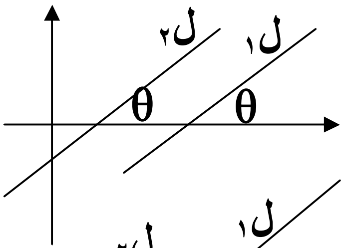
(١) الذى يصنع زاوية موجبة (θ) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات م = طا θ

(٢) الذى يمر بالنقطتين (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) : م = $\dfrac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

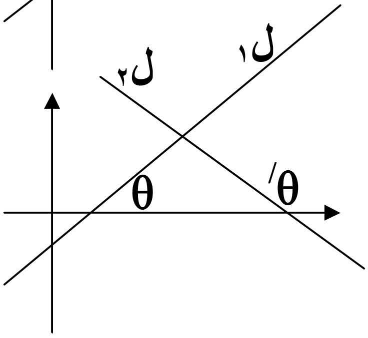
(٣) الذى معادلته على الصورة : أس + ب ص + جـ = ٠ هو م = $\dfrac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \dfrac{-\text{أ}}{\text{ب}}$

(٤) الذى معادلته على الصورة المتجهة: $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (س١ ، ص١) + ك (أ ، ب) هو م = $\dfrac{\text{ب}}{\text{أ}}$

٧) **<u>التوازى و التعامد لمستقيمين</u> :**



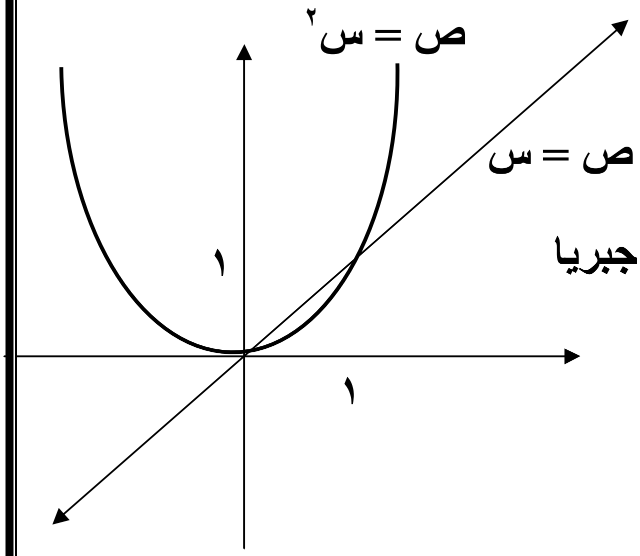
(١) إذا كان ل١ // ل٢ فإن م١ = م٢
أى إذا توازى مستقيمان فإن ميليهما يكونان متساويين و العكس صحيح



(٢) إذا كان ل١ ⊥ ل٢ فإن م١ × م٢ = - ١
أى أنه حاصل ضرب ميلى المستقيمين المتعامدين = - ١ و العكس صحيح

<u>ملاحظة</u> : إذا كان ميل مستقيم $\dfrac{3}{7}$ يكون ميل المستقيم العمودى $\dfrac{-7}{3}$ و العكس صحيح

٨) تعريف : **التقاطع لمنحنين :**



إذا اشترك منحنين فى نقطة يقال لهما انهما متقاطعان عند هذه النقطة .

* لإيجاد نقاط التقاطع نقوم بحل المعادلتين معا جبريا

مثلا : أوجد نقاط تقاطع المنحنين :

ص = س (١)

ص = س^{٢} (٢)

بالتعويض من ١ فى ٢ نجد :

س = س^{٢} ∴ س^{٢} ـ س = ٠

∴ س (س ـ ١) = ٠ ∴ س = صفر أ، س = ١ و بالتعويض فى (١)

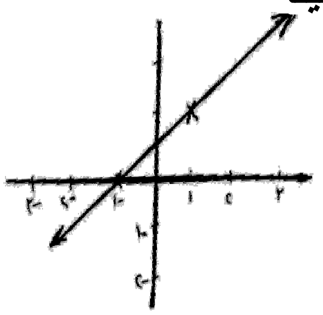
∴ ص = ٠ أ، ص = ١ ∴ نقاط التقاطع (٠ ، ٠) ، (١ ، ١)

٩) **لرسم خط مستقيم :**

يمكن رسم المستقيم بمعلومية ١ـ نقطتين عليه ٢ـ نقطة و ميل

٣ـ ميل و جزء مقطوع من محور الصادات

مثال : ارسم المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ١) ، (ـ ١ ، ٠) و احسب ميله

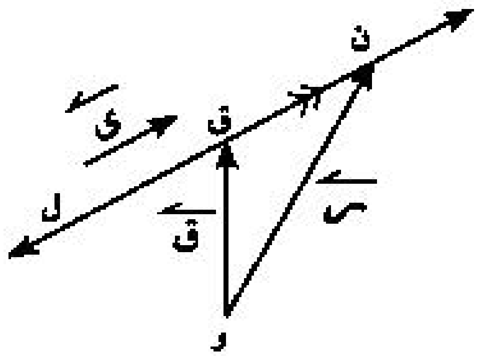


الحل : الميل = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{(٠) - (١)}{(-١) - (١)} = \frac{-١}{-٢} = \frac{١}{٢}$

١٠) **الصور المختلفة معادلات الخط المستقيم :**

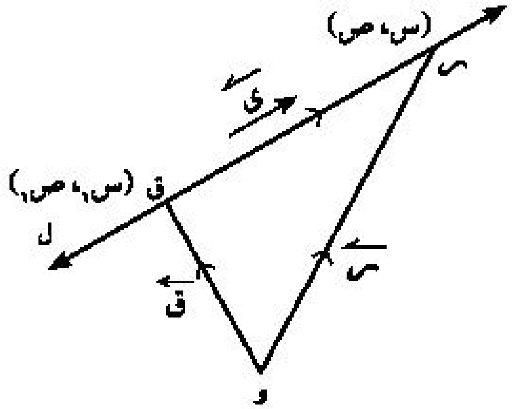
[١] **المعادلة المتجهة :** (الصيغة المتجهة)

بفرض أن الخط المستقيم المار بالنقطة و (س$_{١}$، ص$_{١}$)، والمتجه $\overleftarrow{ى}$ = (م ، ب) متجه اتجاه له ، ن (س ، ص) نقطة عليه ، و نقطة الأصل



المعادلة المتجهة هى $\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{و} + ك\,\overleftarrow{ى}$
أ، (س ، ص) = (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) + ك (م ، ب)

[٢] <u>المعادلات البارامترية (الوسيطية) :</u>



∵ المعادلة المتجهة هى $\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{و} + ك\,\overleftarrow{ى}$

أ، (س ، ص) = (س$_1$ ، ص$_1$) + ك (م ، ب)

و منها ينتج أن :

> س = س$_1$ + ك م ، ص = ص$_1$ + ك ب
>
> المعادلتان الوسيطيتان للخط المستقيم المار
> بالنقطة (س$_1$ ، ص$_1$) و المتجه ى = (م ، ب)
> متجه اتجاه له . حيث ك ∈ ح – { ٠ }

[٣] <u>المعادلة الكارتيزية :</u> (بمعلومية الميل و نقطة معلومة)

بحذف ك من المعادلتين البارامتريتين : س = س$_1$ + ك م ، ص = ص$_1$ + ك ب

نحصل على المعادلة : $\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{م}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}}$ أى أن $\frac{\text{ب}}{\text{م}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1}$

وبوضع $\frac{\text{ب}}{\text{م}}$ = م (حيث م هو ميل المستقيم)

> فإن المعادلة الكارتيزية على الصورة : م = $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1}$
>
> أو ص – ص$_1$ = م (س – س$_1$)

<u>ملاحظة</u> : متجه اتجاه المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل و النقطة (س$_1$ ، ص$_1$)

هو $\overleftarrow{ى}$ = (س$_1$ ، ص$_1$) و ميله = $\frac{\text{ص}_1}{\text{س}_1}$

[٤] <u>معادلة المستقيم بمعلومية الميل (م) وطول الجزء المقطوع من محورالصادات جـ :</u>

هى $\boxed{\text{ص} = \text{م س} + \text{جـ}}$

مثلا : معادلة المستقيم الذى ميله ٢ ، ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، – ٣)

هى ص = ٢ س – ٣

[٥] <u>معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين عليه (س_1 ، ص_1) ، (س_2 ، ص_2) هى :</u>

$$\boxed{\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}}$$

مثلا : معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٤) ، (٣ ، - ٦) هى :

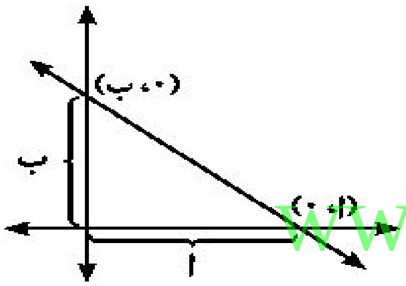
$$\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} \quad \therefore \quad \frac{\text{ص} - ٤}{\text{س} - ٢} = \frac{٣ - ٤}{-٦ - ٢} = \frac{١}{٨}$$

$\therefore$ س − ٢ = ٨ (ص − ٤) $\therefore$ س − ٢ = ٨ ص − ٣٢

$\therefore$ **المعادلة هى : س − ٨ ص + ٣٠ = ٠**

[٥] <u>معادلة المستقيم بمعلومية طولى الجزءين المقطوعين أ ، ب من محورى الاحداثيات :</u>

هى $\boxed{\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = ١}$

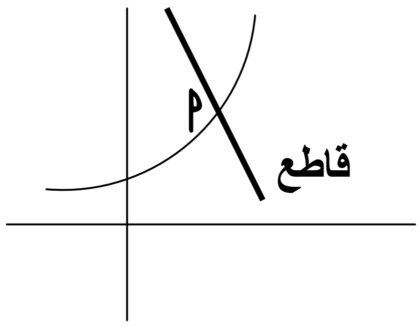


١١) <u>المستقيم المماس لدالة (أو منحنى):</u>

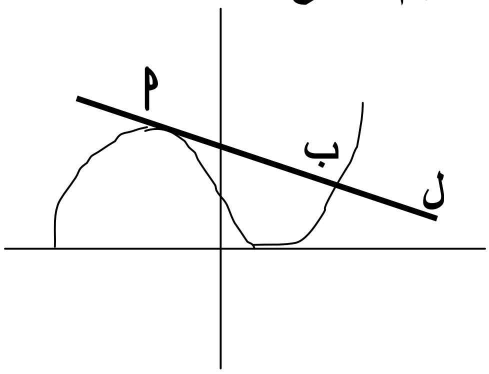
<u>تعريف</u> :

المماس لدالة هو الذى يقطعها فى نقطة واحدة و ميله عند هذه النقطة = ميل الدالة

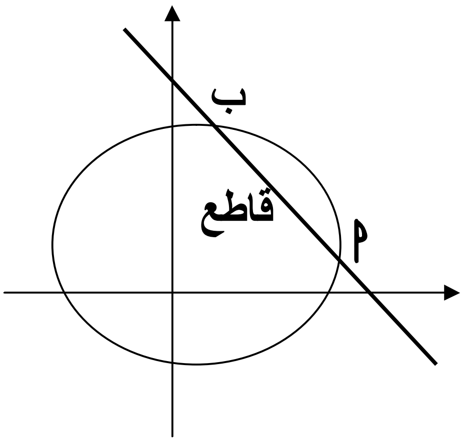
مثلا : حدد أيهم المماس وأيهم القاطع :



المستقيم قاطع عند أ



المستقيم ل مماس عند النقطة أ و قاطع عند النقطة ب



المستقيم قاطع عند أ، ب

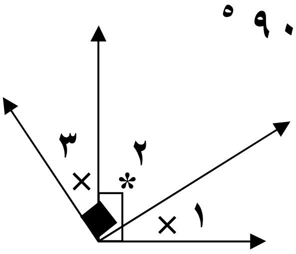
ملاحظة : يمكن إيجاد نقطة التماس (نقطة التقاطع) بشرطين :

١-من تعريف التقاطع " بحل المعادلتين معا "

٢- باستخدام التفاضل

[٤] أساسيات الهندسة المستوية :

* **الزاويتان المتتامتان : مجموع قياسيهما ٩٠ °** ∴ ق(١) + ق(٢) = ٩٠ °

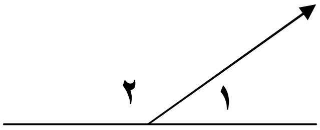


* **متممات الزاوية الواحدة تكون متساوية فى القياس**

مثلا :إذا كان ١ تتمم ٢ ، ٢ تتمم ٣ فإن :ق(١) = ق(٣)

* **الزاويتان ا لمتكاملتان : هما زاويتان مجموع قياسيهما ١٨٠ °**

∴ ق(١) + ق(٢) = ١٨٠ °

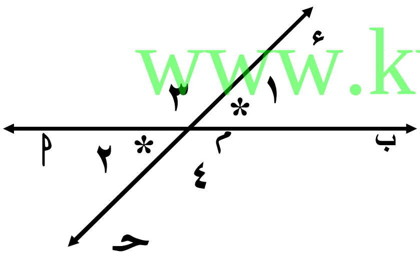


* **مكملات الزاوية الواحدة تكون متساوية فى القياس**

مثلا :إذا كان ﻡ تكمل ب ، حـ تكمل ب فإن :ق(ﻡ) = ق(حـ)

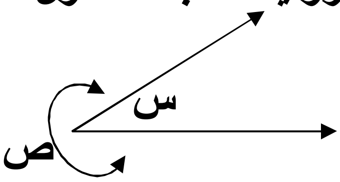
* **الزاويتان المتقابلتان بالرأس: هما زاويتان مشتركتان فى الرأس وكل من ضلعى إحداهما على إستقامة واحدة مع ضلع من ضلعي الزاوية الأخرى**

ق(١) = ق(٢) بالتقابل بالرأس
ق(٣) = ق(٤) // //



* **الزوايا المتجمعة حول نقطة : مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة = ٣٦٠°**

ق(س) + ق(ص) = ٣٦٠ °

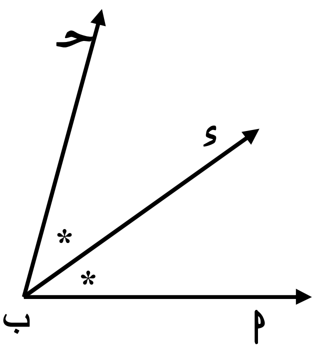


* **منصف الزاوية :**

هو الشعاع الذى يقسم الزاوية إلى زاويتين لهما نفس القياس

فى الشكل المقابل : ء حـ ينصف > ﻡ ب حـ

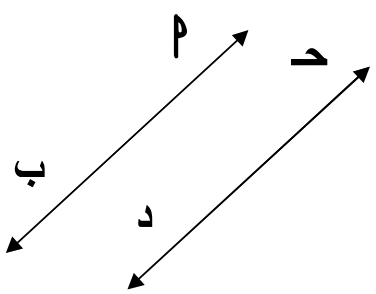
أى أن : ق (ﻡ ب ء) = ق (ء ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق (ﻡ ب جـ)



حالات تطابق مثلثين

ضلعين و زاوية ومحصورة	زاويتان و ضلع	الأضلاع الثلاثة	وتر و ضلع فى المثلث القائم

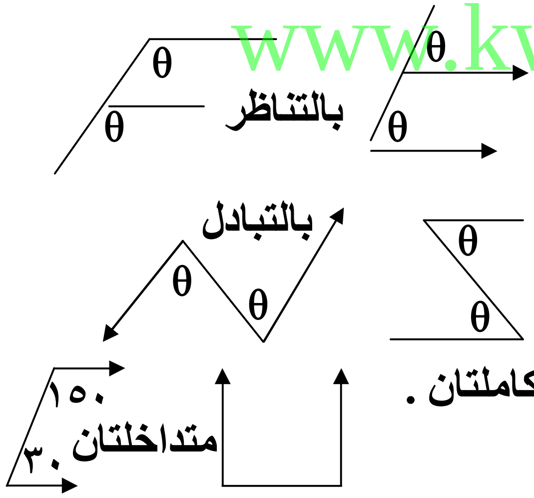
* التوازى



المستقيمان أب ، حـ د متوازيان إذا كان :

أب $\cap$ حـ د $=$ Ø أو أب $=$ حـ د والعكس صحيح .

* نظرية : إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن :



١- كل زاويتين متبادلتين متساويتان في القياس .

٢- كل زاويتين متناظرتين متساويتان في القياس .

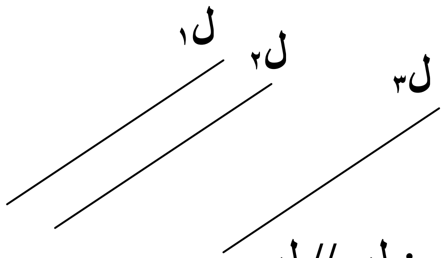
٣- كل زاوتيين داخلتين و في جهة واحدة من القاطع متكاملتان .
لانهما داخلتان و في جهة واحدة من القاطع .

* لاثبات مستقيم يوازى مستقيم نحاول إثبات إحدى الحالات الآتية :

١- زاويتان متبادلتان متساويتان في القياس .

٢- زاويتان متناظرتان متساويتان في القياس .

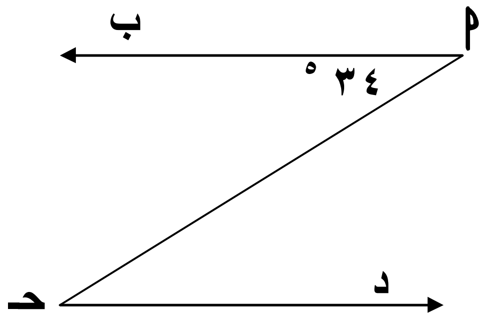
٣- زاويتان داخلتان و في جهة واحدة من القاطع متكاملتان .



* المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان $\because$ $ل_1 \,//\, ل_3$ ، $ل_2 \,//\, ل_3$ $\therefore$ $ل_1 \,//\, ل_2$

مثال توضيحي :

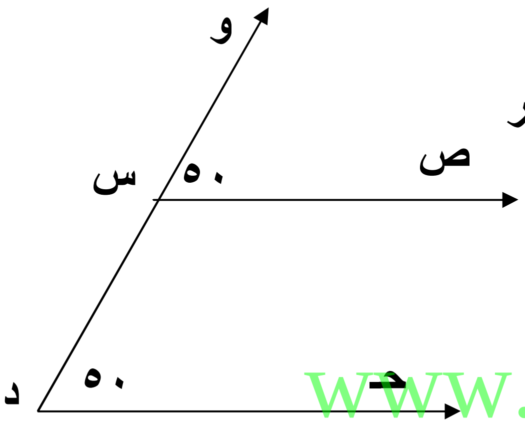
(١) في الشكل المقابل :



∵ أ ب // حـ د ، أ حـ قاطع لهما

∴ ق(∠ب أ حـ) = ق(∠أحـ د) = ٣٤° بالتبادل

(٢) في الشكل المقابل :



∵ س ص// د حـ ، د و قاطع لهما

∴ ق(∠ص س و) = ق(∠حـ د س) = ٥٠° بالتناظر

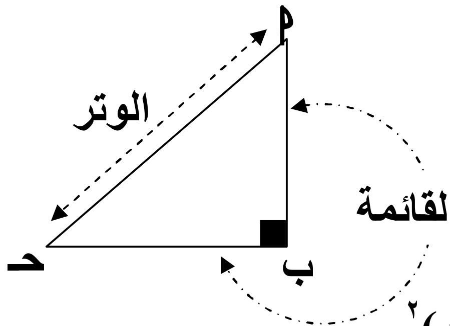
∵ س ص // د حـ ، د س قاطع لهما

∴ ق(∠ص س د) + ق(∠حـ د س) = ١٨٠°

لأنهما داخلتان وفي جهة واحدة

∴ ق(∠ص س د) = ١٨٠° ــ ٥٠° = ١٣٠°

* نظرية فيثاغورث



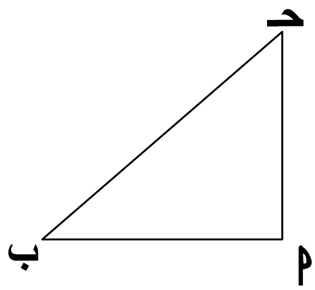
في المثلث أ ب حـ :

إذا كان ق(ب̂) = ٩٠° فإن (أ ب)^2 + (ب حـ)^2 = (أ حـ)^2

، (ب حـ)^2 = (أ حـ)^2 ـ (أ ب)^2 ، (أ ب)^2 = (أ حـ)^2 ـ (ب حـ)^2

أو في المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر = مجموع مربعي طولي ضلعي القائمة

عكس فيثاغورث

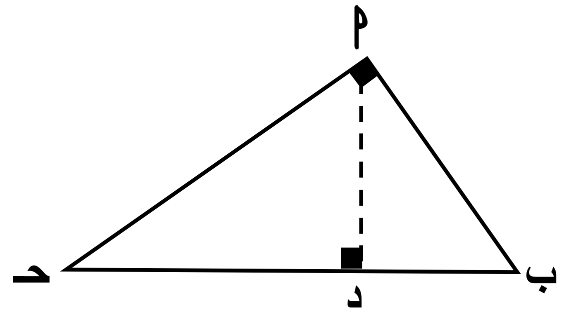


في الشكل المقابل : في المثلث أ ب حـ

إذا كان : (أ ب)^2 + (أ حـ)^2 = (ب حـ)^2 فإن : ق(أ̂) = ٩٠° قائمة

نتائج فيثاغورس وإقليدس :

ق(∠ ب أ حـ) = ٩٠ ، $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ فإن :



[١] (أ ب)^{٢} = ب د × ب حـ

[٢] (أ حـ)^{٢} = حـ د × حـ ب

[٣] (أ د)^{٢} = د ب × د حـ

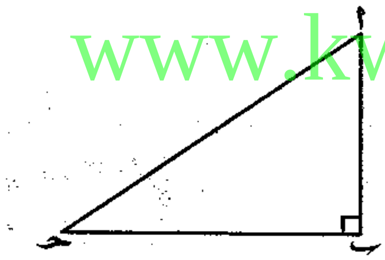
[٤] أ د = $\dfrac{\text{أ ب × أ حـ}}{\text{ب حـ}}$

[٥] (ب حـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (أ حـ)^{٢}

* انواع المثلث بالنسبة لزواياه :

تنقسم المثلثات بالنسبة لزواياها إلى ثلاثة أنواع هى :

(١) المثلث القائم الزاوية :



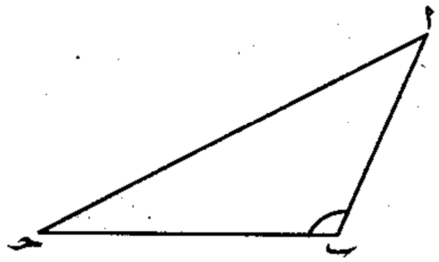
إذا كان $\overline{\text{أ حـ}}$ أكبر أضلاع المثلث أ ب حـ طولاً

وكان : (أ حـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢}

فإن : ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠°

، أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب

(٢) المثلث المنفرج الزاوية :



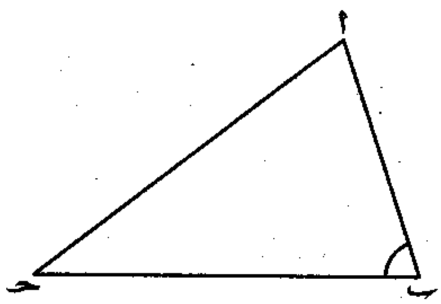
إذا كان $\overline{\text{أ حـ}}$ أكبر أضلاع المثلث أ ب حـ طولاً

وكان : (أ حـ)^{٢} > (أ ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢}

فإن : ق (∠ أ ب حـ) > ٩٠°

، أ ب حـ مثلث منفرج الزاوية فى ب

(٣) المثلث الحاد الزوايا :



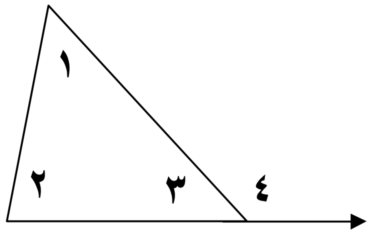
إذا كان $\overline{\text{أ حـ}}$ أكبر أضلاع المثلث أ ب حـ طولاً

وكان : (أ حـ)^{٢} < (أ ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢}

فإن : ق (∠ أ ب حـ) < ٩٠°

، أ ب حـ مثلث حاد الزوايا.

- مجموع الزوايا الداخلة لمثلث = ١٨٠ °



- قياس الزاوية الخارجة عن مثلث

= مجموع قياس الزاويتين الداخلتين ما عدا المجاورة لها

∵ الزاوية ٤ خارجة عن Δ ∴ ق(٤) = ق(١) + ق(٢)

- مجموع الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ن = (ن – ٢) × ١٨٠ °

- قياس الزاوية الداخلة لمضلع منتظم عدد أضلاعه ن = $\frac{(\text{ن} - ٢) \times ١٨٠^\circ}{\text{ن}}$

مثلا : مجموع قياسات الزوايا الداخلة لشكل سداسي منتظم = ٧٢٠ °

، قياس كل زاوية من زواياه = ٧٢٠ ÷ ٦ = ١٢٠ °

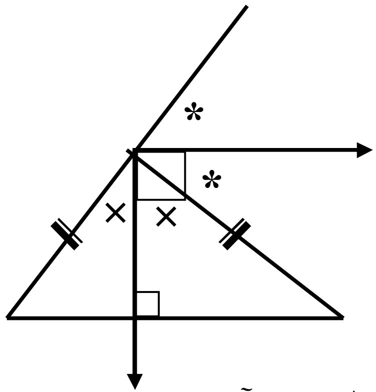
* **ملاحظة** :

عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه س° = $\frac{٣٦٠^\circ}{١٨٠ - \text{س}^\circ}$

مثلا : إذا كانت الزاوية ٦٠ ° يكون المضلع ثلاثى منتظم (ن = ٣)

- مضلع منتظم :هو مضلع أضلاعه متساوية فى الطول ، زواياه متساوية فى القياس

مثل المربع ، السداسي المنتظم ، ...



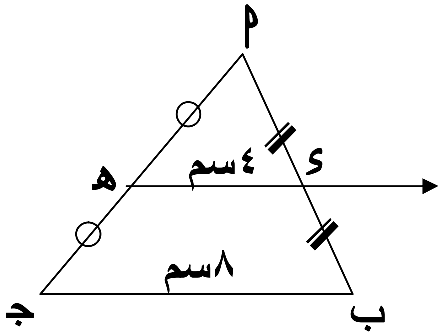
- عدد رؤوس المضلع = عدد أضلاعه = عدد زواياه

- محيط أى شكل (مضلع) = مجموع أطوال أضلاعه

- المنصفان الداخلى و الخارجى لزاوية ما يكون متعامدان

- الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى مثلث موازيا أحدا لضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث

∵ $\overleftarrow{\text{هـ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ∴ ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$



* القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازى الضلع الثالث وتساوى نصفه

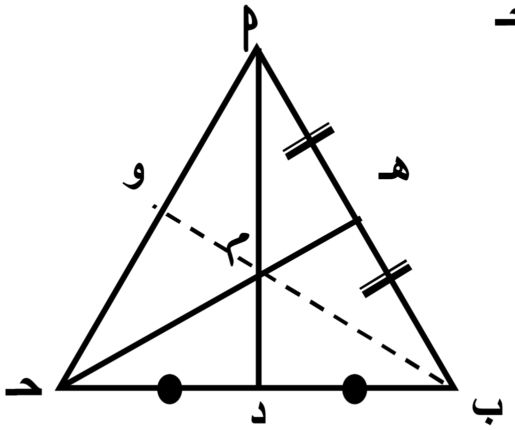
∵ ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

متوسطات المثلث

- **المتوسط في المثلث :**

هو قطعة مستقيمة مرسومة من أحد رؤوس المثلث إلي منتصف الضلع المقابل .



$\overline{ﻡ\,د}$ ، $\overline{حـ\,هـ}$ ، $\overline{ب\,و}$ متوسطات في المثلث ﻡ ب حـ

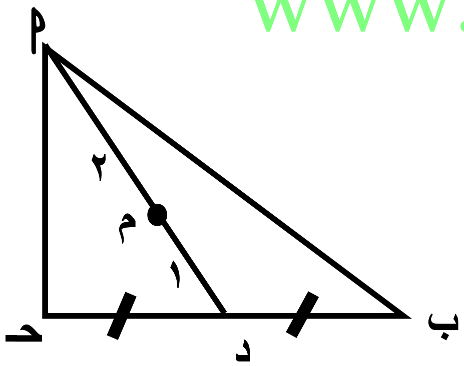
$\overline{ﻡ\,د} \cap \overline{حـ\,هـ} \cap \overline{ب\,و} = \{م\}$

تسمى نقطة م نقطة تقاطع المتوسطات

يلاحظ انه يوجد ثلاث متوسطات لاي مثلث

- متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة .

- نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة ، بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس



$\because$ م تسمى نقطة تقاطع المتوسطات

$\therefore$ م د $= \frac{١}{٢}$ م ﻡ $= \frac{١}{٣}$ ﻡ د

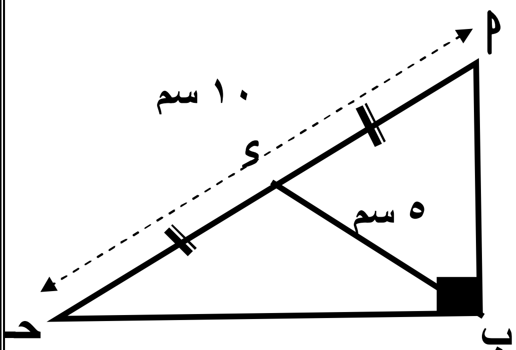
، م ﻡ = ٢ م د $= \frac{٢}{٣}$ ﻡ د

، ب د = د حـ $= \frac{١}{٢}$ ب حـ

- طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول الوتر

$\because$ ق($\hat{ب}$) = ٩٠ ، $\overline{ب\,د}$ متوسط

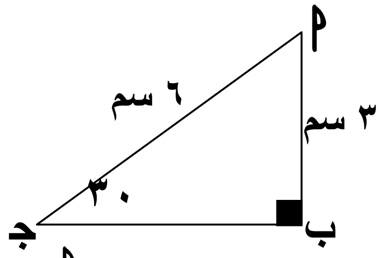
$\therefore$ ب د $= \frac{١}{٢}$ ﻡ حـ



* إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة

- $\because$ ب ی $= \frac{١}{٢}$ ﻡجـ ، ی منتصف $\overline{ﻡجـ}$ $\therefore$ ق($\hat{ب}$) = ٩٠

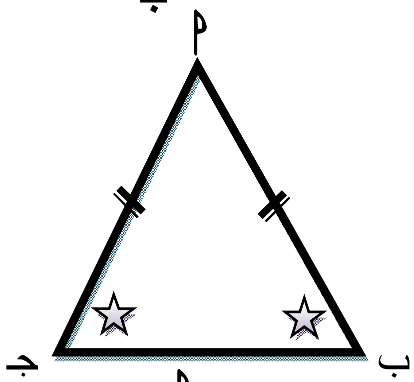
* فى المثلث القائم الزاوية طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠ يساوى نصف طول الوتر



∵ ق(ب̂) = ٩٠ ، ق(ج̂) = ٣٠ °

∴ ا ب = $\frac{١}{٢}$ ا ج

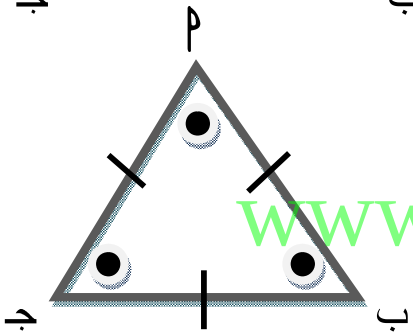
* زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين متطابقتان (متساويتان في القياس)



∵ ا ب = ا ج ∴ ق(ب̂) = ق(ج̂)

و العكس صحيح : ∵ ق(ب̂) = ق (ج̂) ∴ ا ب = ا ج

* إذا كان المثلث متساوي الأضلاع زواياه الثلاث تكون متطابقة و يكون قياس كل منها ٦٠



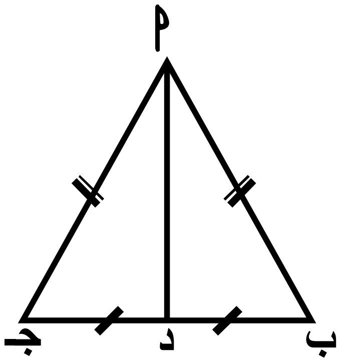
∵ ا ب = ب ج = ا ج

∴ ق(∠ ا) = ق(∠ ب) = ق (∠ ج) = ٦٠ °

* إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث المتساوي الساقين ٦٠ ° كان المثلث متساوى الأضلاع

نتائج هامة :

* متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من زاوية الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عموديا على القاعدة



إذا كان ا د متوسط (د منتصف ب ج)

فان (١) ا د ينصف ب ا̂ ج

(٢) ا د ⊥ ب ج

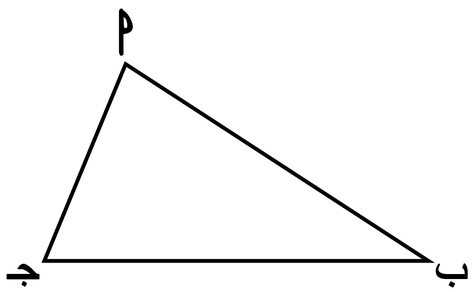
* منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون عموديا عليها .

إذا كان ا د ينصف ب ا̂ ج فان (١) ا د متوسط (د منتصف ب ج) (٢) ا د ⊥ ب ج

* المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوى الساقين عموديا على القاعدة ينصف كلا من القاعدة وزاوية الرأس .

إذا كان $\overline{\text{أ د}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ فان (١) $\overline{\text{أ د}}$ متوسط (د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$) (٢) $\overline{\text{أ د}}$ ينصف ب $\hat{\text{أ}}$ جـ

* <u>التباين فى المثلث</u> :



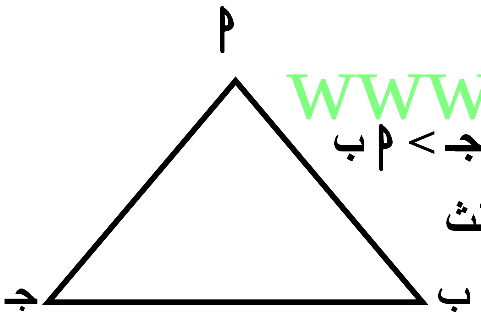
إذا كان أ ب > أ جـ فإن : ق ($\hat{\text{جـ}}$) > ق ($\hat{\text{ب}}$)

و العكس : ∵ ق ($\hat{\text{جـ}}$) > ق ($\hat{\text{ب}}$) ∴ أ ب > أ جـ

<u>ملحلوظة هامة</u> : أكبر ضلع فى المثلث طولا تقابله أكبر زوايا المثلث قياسا .
و كذلك أصغر أضلاع المثلث طولا تقابله أصغر زوايا المثلث قياساً

- <u>متباينة المثلث</u> : مجموع طولى أى ضلعين من مثلث أكبر من طول الضلع الاخر

فى أى Δ أ ب جـ يكون :



أ ب + أ جـ > ب جـ ، أ ب + ب جـ > أ جـ ، أ جـ + ب جـ > أ ب

تستخدم لمعرفة هل تصلح الاعداد الثلاثة تمثل أضلاع مثلث
و معرفة هل يمكن رسم مثلث

مثلا : الأعداد ٣ ، ٤ ، ٥ تصلح لتمثل أطوال أضلاع مثلث لان ٣ + ٤ > ٥
الأعداد ٦ ، ٧ ، ١٣ لا تصلح لان ٦ + ٧ = ١٣
، الأعداد ٥ ، ٥ ، ٥ تصلح لان ٥ + ٥ > ٥

[٥] أساسيات التفاضل :

تعريف التفاضل :

المشتقة الأولى = معدل التغير للدالة = ميل المماس لمنحنى الدالة = $\frac{ءص}{ءس}$ = ظا هـ

حيث هـ الزاوية التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

معدل التغير = $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(س_١ + هـ) - (س_١)}{هـ}$ ، هـ مقدار التغير فى س

١) <u>تفاضل الدالة كثيرة الحدود</u> : (دالة بسط مجموع حدود و المقام واحد صحيح)

مثلا : د(س) = ٧ ، د(س) = ٣ س ـ ٦ ، د(س) = $س^٣$ + ٧ س ـ ١ ، ....

(١) $\frac{ء}{ءس}$ ($س^٢$ + ٢ س ـ ١) = ٢ س + ٢

(٢) إذا كان ص = ٣ $س^٢$ ـ ٥ س + ٧ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س ـ ٥

٢) <u>تفاضل حاصل ضرب دالتين</u> :

إذا كانت ص = د × ر فإن: $ص^/$ = $د^/$ × ر + $ر^/$ × د

مشتقة ضرب دالتين = مشتقة الأولى × الثانية + مشتقة الثانية × الأولى

نتيجة :<u>مشتقة حاصل ضرب ثلاث دوال</u> :

إذا كانت ص = د × ر× ق فإن: $ص^/$ = $د^/$× ر × ق + $ر^/$ × د × ق + $ق^/$ × د × ر

= مشتقة الاولى × الثانية × الثالثة + مشتقة الثانية × الاولى × الثالثة

+ مشتقة الثالثة × الاولى × الثانية

مثال : أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الاتية ثم أوجد $د^/$ (ـ ١) :

١) ص = ($س^٢$ +٧)($س^٣$ – ١)

٢) ص = $س^٥$ (٣$س^٢$+٨)

٣) ص = $س^٦$ ($س^٢$ + $\frac{١}{س^٢}$)

الحل :

١) ∵ ص = ($س^٢$ +٧)($س^٣$ – ١) ∴ $ص^/$ = ٢ س × ($س^٣$ – ١) + ٣ $س^٢$ × ($س^٢$ +٧)

= ٢ س^{٤} ـ ٢ س + ٣ س^{٤} + ٢١ س^{٢} = ٥ س^{٤} – ٢ س + ٢١ س^{٢}

د$^{/}$(- ١) = ٥ × (- ١)^{٤} – ٢ × (- ١) + ٢١ × (- ١)^{٢}

= ٢٨

نستخدم الآلة الحاسبة فى إيجاد النتيجة بعد التعويض

حل آخر :

يمكن إجراء الضرب ثم نقوم بالتفاضل يعطى نفس النتيجة

ص = س^{٥} - س^{٢} + ٧ س^{٣} – ٧

ص$^{/}$ = ٥ س^{٤} - ٢ س + ٢١ س^{٢}

د(- ١) = ٥ (- ١)^{٤} – ٢ (- ١) + ٢١ (- ١)^{٢} = ٢٨

٢) ∵ ص = س^{٥} (٣س^{٢}+٨)

∴ ص$^{/}$ = ٥ س^{٤}×(٣ س^{٢}+ ٨) +٦س × س^{٥}

∴ د$^{/}$(- ١) = ٥ × (- ١)^{٤} [(٣ × (- ١)^{٢} + ٨] + ٦ (- ١) × (- ١)^{٥} = ٦١

٣) ∵ ص = س^{٦} (س^{٢} + س$^{-٢}$)

∴ ص$^{/}$ = ٦س^{٥}×(س^{٢} + س$^{-٢}$) + (٢س - ٢س$^{-٣}$)× س^{٦}

= ٦ س^{٥} × (س^{٢} + $\frac{١}{س^{٢}}$) + (٢ س – $\frac{٢}{س^{٣}}$) × س^{٦}

∴ د$^{/}$(- ١) = ٦ (- ١)^{٥} × [(- ١)^{٢} + $\frac{١}{(- ١)^{٢}}$] + [٢ (- ١) - $\frac{٢}{(- ١)^{٣}}$] × (- ١)^{٦}

= - ٦ × (١ + ١) + (- ٢ + ٢) × ١= - ١٢ + ٠ = ١٢

ملاحظة :

١- يمكن البدء بإجراء ضرب الدالتين أولا ثم إيجاد د$^{/}$(س) وهى نفس النتيجة

٢- يمكن الاكتفاء بالنتيجة و عدم فك الأقواس إلا إذا كان المطلوب وضع الناتج فى أبسط صورة يكمل الحل بفك الاقواس و جمع الحدود المتشابهة

مثال : أوجد المشتقة للدالة ص = س^{٢} (س^{٣} + ١)(٣ س – ٥) ثم أوجد د$^{/}$ (١)

الحل :

ص$^{/}$ = ٢ س (س^{٣} + ١)(٣ س – ٥) + ٣ س^{٢} × س^{٢} (٣ س – ٥)

+ ٣ × س^{٢} × (س^{٣} + ١)

∴ د$^{/}$(١) = ٢ × ١ × (١ ^{٣} – ٥) + ٣ × ١ ^{٤} (٣ × ١ – ٥) + ٣ × ١ ^{٢} × (١ ^{٣} + ١)

= ٢ × (- ٤) + ٣ × (- ٢) + ٣ × ٢ = - ٨

حل آخر :

يمكن ضرب الدالتين الاولى و الثانية و يصبح دالة × دالة

ص = (س^{٥} + س^{٢}) (٣ س – ٥)

ص$^{/}$ = (٥ س^{٤} + ٢ س)(٣ س – ٥) + ٣ × (س^{٥} + س^{٢})

أعداد / الاستاذ خالد المنفلوطى

د/ (١) = (٥ × ١ ^٤^ + ٢ × ١)(٣ × ١ – ٥) + ٣ × (١ ^٥^ + ١ ^٢^)

= ٧ × (-٢) + ٣ × ٢ = -١٤ + ٦ = -٨

٣) مشتقة خارج قسمة دالتين

إذا كانت ص = $\frac{\text{د}}{\text{ر}}$ فإن: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{د}' \times \text{ر} - \text{ر}' \times \text{د}}{\text{ر}^{٢}}$

مشتقة خارج قسمته = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$

مثال : أوجد المشتقة الأولى للدالة ص = $\frac{\text{٣ س}}{\text{٢ س} - ١}$ ثم أوجد د/ (٢)

الحل :

∴ ص/ = $\frac{٣ \times (\text{٢ س} - ١) - ٢ \times \text{٣ س}}{(\text{٢ س} - ١)^{٢}} = \frac{\text{٦ س} - ٣ - \text{٦ س}}{\text{٤ س}^{٢} - \text{٤ س} + ١}$

= $\frac{-٣}{\text{٤ س}^{٢} - \text{٤ س} + ١}$

∴ د/ (٢) = $\frac{-٣}{٤ \times ٢^{٢} - ٤ \times ٢ + ١} = -\frac{١}{٣}$

٤) مشتقة (قوس)^ن^

إذا كانت ص = (قوس)^ن^ فإن :

ص/ = ن (قوس)^ن – ١^ × مشتقة ما بداخل القوس

= مشتقة الأس × مشتقة القوس ما تحت الأس

إذا كانت : ص دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س فإن : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} (\text{ص})^{\text{ن}} = \text{ن ص}^{\text{ن}-١} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

مثال : إذا كانت ص = (٣ س^٢^ – ١)^٦^ أوجد ص/

الحل :

ص/ = ٦ (٣ س^٢^ – ١)^٥^ × ٦ س = ٣٦ س (٣ س^٢^ – ١)^٥^

مثال : أوجد المشتقة الاولى للدالة ص = $\sqrt[3]{(٢ س + ٣)^{٤}}$

الحل :

ص = $(٢ س + ٣)^{\frac{٤}{٣}}$

ص$'$ = $\frac{٤}{٣}(٢ س + ٣)^{\frac{١}{٣}} \times ٢ = \frac{٨}{٣}(٢ س + ٣)^{\frac{١}{٣}}$

إفتكر : علشان نقلب الأساس لازم نغير إشارة الأس و الجذر نحوله لأس كسرى مقامه دليل الجذر

الحالات المختلفة :

(١) إذا كانت د(س) = $\frac{١}{س^{ن}}$ فإن د$'$(س) = $\frac{-ن}{س^{ن+١}}$ مثلا: د(س) = $\frac{١}{س^{٣}}$ ∴ د$'$(س) = $\frac{-٣}{س^{٤}}$

(٢) إذا كانت د(س) = $\sqrt[م]{س^{ك}}$ فإن :

أ) إذا كان ك > م فإن د$'$(س) = $\frac{ك}{م \sqrt[م]{س^{م-ك}}}$

مثلا : د(س) = $\sqrt[٧]{س^{٥}}$ ∴ د$'$(س) = $\frac{٥}{٧\sqrt[٧]{س^{٢}}}$

ب) إذا كان ك < م فإن د$'$(س) = $\frac{ك \sqrt[م]{س^{ك-م}}}{م}$

مثلا : د(س) = $\sqrt[٤]{س^{٦}}$ ∴ د$'$(س) = $\frac{٦\sqrt[٤]{س^{٢}}}{٤}$

حالة خاصة (تفاضل الجذر التربيعى) : = $\frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{٢ \times \text{الجذر}}$

مثلا : د(س) = $\sqrt{س}$ ∴ د$'$(س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

د(س) = = $\sqrt{٥ س + ٣}$ ∴ د$'$(س) = $\frac{٥}{٢ \times \sqrt{٥ س + ٣}}$

٥) إذا كانت : ص = د (ع) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى ع ، ع = ر (س) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$ [قاعدة السلسلة]

أى أن : $\frac{ء}{ءس}$ د [ر(س)] = د$'$ [ر(س)] · ر$'$ (س)

مثال : إذا كانت ص = ع^{٤} ، ع = ٢س + ٣ أوجد : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ثم أوجد د$^{/}$(١)

الحل : بالتعويض

ص = (٢ س + ٣)^{٤}

ص$^{/}$ = ٤ (٢ س + ٣)^{٣} × ٢ = ٨ (٢ س + ٣)^{٣}

د$^{/}$(١) = ٨ (٢ × ١ + ٣)^{٣} = ٨ × ٥^{٣} = ١٠٠٠

> هناك حلان للمسألة
> ونحن نفضل الحل
> بالتعويض عن ع فى ص

حل آخر : $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ = ٤ ع^{٣} ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ = ٢

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ × $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ = ٤ ع^{٣} × ٢ = ٨ (٢ س + ٣)^{٣}

٦) <u>اشتقاق الدوال المثلثية</u> : بفرض أ ، ب ثابتان

- إذا كانت : ص = حا س فإن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = حتا س
- إذا كانت : ص = حتا س فإن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ـــ حا س
- إذا كانت : ص = طا س فإن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = قا^{٢} س
- إذا كانت : ص = حا (أ س + ب) فإن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = أ حتا (أ س + ب)
- إذا كانت : ص = حتا (أ س + ب) فإن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = – أ حا (أ س + ب)
- إذا كانت : ص = طا (أ س + ب) فإن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = أ قا^{٢} (أ س + ب)
- إذا كانت : ص = طتا (أ س + ب) فإن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ـ أ قتا^{٢} (أ س + ب)
- إذا كانت : ص = قا (أ س) فإن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = أ قا (أ س) طا (أ س)
- إذا كانت : ص = قتا (أ س) فإن: $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ـ أ قتا (أ س) طتا (أ س)

* **قابلية الاشتقاق :**

قواعد الإشتقاق السابقة تطبق على الدوال القابلة للإشتقاق

أما بحث قابلية إشتقاق دالة عند النقطة $س_1$ فيجب البحث فى المقدار :

$$\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{د(س_1 + هـ) - (س_1)}{هـ}$$ فإذا كان لهذه النهاية وجود

كانت الدالة قابلة للإشتقاق عند س و قيمة المشتقة عندها تساوى هذه النهاية

المشتقة اليمنى و المشتقة اليسرى للدالة :

إذا كانت النقطة س = ϻ تنتمى لمجال الدالة د ، كانت الدالة تتغير قاعدتها على يمين

و يسار ϻ لبحث قابلية إشتقاق الدالة عند س = ϻ

نوجد المشتقة اليمنى $د'(ϻ^+) = \underset{هـ \leftarrow ٠^+}{نهـا} \frac{د(ϻ + هـ) - د(ϻ)}{هـ}$

، المشتقة اليسرى $د'(ϻ^-) = \underset{هـ \leftarrow ٠^-}{نهـا} \frac{د(ϻ + هـ) - د(ϻ)}{هـ}$

فإذا تحقق أن : $د'(ϻ^+) = د'(ϻ^-)$ كانت الدالة قابلة للإشتقاق عند س = ϻ

و كان : $د'(ϻ) = د'(ϻ^+) = د'(ϻ^-)$

أما إذا كان : $د'(ϻ^+) \neq د'(ϻ^-)$ كانت الدالة غير قابلة للإشتقاق عند س = ϻ

قاعدة : إذا كانت الدالة ص = د(س) قابلة للاشتقاق عند س = ϻ فإنها متصلة عند نفس النقطة
إذا كانت الدالة غير متصلة عند س = ϻ فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عندها

٧) **النـــهايات :**

قواعد النهايات :

نهاية دالة عند نقطة ϻ : نحاول تعيين قيمة الدالة بجوار العدد ϻ
أى عندما س تقترب من ϻ من جهة اليميين أو اليسارمن ϻ
و تكتب $\underset{س \leftarrow ϻ}{نهـا}$ د(س)

ملاحظة (١) : علامة (⟵) (تقرأ تؤول الى أو تقترب من) تعامل معاملة علامة (=) من حيث أى عملية حسابية (ضرب أو قسمة أو أضافة أو طرح)
فمثلا س ⟵ ١ تعنى ٢ س ⟵ ٢ ، س + ٣ ⟵ ٤ و هكذا

ملاحظة (٢) : إذا كان س ⟵ م فإن س - م ⟵ ٠ و يسمى (س - م) **العامل الصفرى**

*** نهاية الدالة كثيرة الحدود :**

إذا كانت الدالة كثيرة حدود (غير كسرية) فإننا نحصل على نهايتها بالتعويض المباشر عن س = م فى قاعدة الدالة . $\underset{س \leftarrow م}{نهـــا}$ د(س) = د(م)

فمثلا : $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـــا}$ (س^٢ - ٣ س + ١) = (- ٢)^٢ - ٣ × (- ٢) + ١ = ١١

*** نظـــرية :** إذا كانت $\underset{س \leftarrow م}{نهـــا}$ د(س) = ل ، كان $\underset{س \leftarrow م}{نهـــا}$ ر (س) = م فإن :

(١) $\underset{س \leftarrow م}{نهـــا}$ [د(س) ± ر (س)] = $\underset{س \leftarrow م}{نهـــا}$ د(س) ± $\underset{س \leftarrow م}{نهـــا}$ ر (س)

(٢) $\underset{س \leftarrow م}{نهـــا}$ [ك × د(س)] = ك × $\underset{س \leftarrow م}{نهـــا}$ د(س) = ك × ل ، ك ∈ ح

(٣) $\underset{س \leftarrow م}{نهـــا}$ [د(س) × ر (س)] = $\underset{س \leftarrow م}{نهـــا}$ د(س) × $\underset{س \leftarrow م}{نهـــا}$ ر (س) = ل × م

(٤) نهـــا $\dfrac{د(س)}{ر(س)}$ = $\dfrac{\underset{س \leftarrow م}{نهـــا} د(س)}{\underset{س \leftarrow م}{نهـــا} ر(س)}$ = $\dfrac{ل}{م}$ ، م ≠ ٠

مثال : أوجد كلا من النهايات الآتية :

(أ) $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \dfrac{س^٢ - ٣}{٢س + ١}$ (ب) $\underset{س \leftarrow -٣}{نهـــا} \sqrt{٢س^٢ + ١}$ (جـ) $\underset{س \leftarrow ١}{نهـــا}$ س (س - ٢)

الحل :

(أ) $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \dfrac{س^٢ - ٣}{٢س + ١} = \dfrac{٢^٢ - ٣}{٢ \times ٢ + ١} = \dfrac{١}{٥}$

حل آخر : $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٣}{٢س + ١} = \frac{\lim\limits_{س \to ٢} (س^٢ - ٣)}{\lim\limits_{س \to ٢} (٢س + ١)} = \frac{٢^٢ - ٣}{٢ \times ٢ + ١} = \frac{١}{٥}$

(ب) $\lim\limits_{س \to ٢} \sqrt{٢س^٢ + ١} = \sqrt{٢ \times ٢^٢ + ١} = \sqrt{٩} = ٣$

(جـ) $\lim\limits_{س \to ١}$ س (س – ٢) = $\lim\limits_{س \to ١}$ س × $\lim\limits_{س \to ١}$ (س – ٢) = ١ × (١ – ٢) = ١ × -١ = -١

* **نهاية دالة الكسر الجبرى عندما س ← ٩ :**

نعوض تعويض مباشر فى الدالة أى نوجد د(٩) : فينتج إحدى الاحتمالات الثلاثة التالية :

(١) إذا كان د(٩) = عدد حقيقى (ليكن ل مثلا) فإن $\lim\limits_{س \to ٩}$ د(س) = ل (العدد الحقيقى)

مثال : أوجد $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{٢ س^٢ + ١}{٥ س - ١}$

الحل : د (٣) = $\frac{٢ \times ٣^٢ + ١}{٥ \times ٣ - ١} = \frac{١٩}{١٤}$ (عدد حقيقى)

$\therefore \lim\limits_{س \to ٣} \frac{٢ س^٢ + ١}{٥ س - ١} = \frac{١٩}{١٤}$

---

(٢) إذا كان د(٩) = $\frac{\text{عدد حقيقى}}{\text{صفر}}$ = ∞ أو - ∞ (كمية غير معرفة) فإن الدالة ليس لها نهاية

مثال : أوجد $\lim\limits_{س \to -٣} \frac{س^٢ - ١}{س + ٣}$

$\because$ د(- ٣) = $\frac{(-٣)^٢ - ١}{-٣ + ٣} = \frac{٩ - ١}{\text{صفر}} = \frac{٨}{\text{صفر}} = ∞$

$\therefore$ الدالة $\frac{س^٢ - ١}{س + ٣}$ ليس لها نهاية عندما س ← - ٣

---

(٣) إذا كان د(٩) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (كمية غير معينة)

فأننا يجب أن نتخلص من العامل الصفرى بإحدى الطرق الاتية :

التحليل - القسمة المطولة - الضرب فى المرافق - القانون

ملحوظة هامة : يمكن تعديل المعادلة الرمزية التى توجد أسفل " نهـا " " س ← ١ " عندما يكون أساس الحد الاول فى البسط و المقام على شكل قوس لكى تتوفر الشروط السابق ذكرها ثم إيجاد النهاية بعد ذلك

*__التعويض المباشر__ :

مثال : أوجد قيمة (١) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}+٢}{\text{س}^{٢}-٢}$ (٢) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}+٣}{\text{س}-٣}$

الحل :

(١) $\text{د}(٢) = \frac{(٢)^{٢}+٢}{(٢)^{٢}-٢} = \frac{٦}{٢} = ٣$

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}+٢}{\text{س}^{٢}-٢} = ٣$

(٢) $\text{د}(\text{س}) = \frac{٢\times ٣+٣}{٣-٣} = \frac{٩}{\ } = \infty$ (كمية غير معرفة)

∴ الدالة ليس لها نهاية

* **__خطوات إيجاد نهاية دالة كسرية باستخدام طريقة التحليل__ :**

١) نحلل كل من البسط و المقام تحليلا كاملا إلى عدة عوامل أحدها العامل الصفرى .

٢) نختصر العامل الصفرى من البسط و المقام

٣) نعوض عن س = a مع حذف رمز " نهـا "

العامل الصفرى يعتبر قوس هدية من قوسي التحليل و كل الى عليك تجيب القوس الثانى

مثال : أوجد قيمة (١) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}^{٢}-٣}{\text{س}-١}$ (٢) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}-\text{س}-٢}{\text{س}^{٢}-٢\text{س}}$

الحل :

(١) $\text{د}(١) = \frac{٣\times(١)^{٢}-٣}{١-١} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (كمية غير معينة)

∴ $\text{د}(\text{س}) = \frac{٣(\text{س}^{٢}-١)}{(\text{س}-١)} = \frac{٣(\text{س}-١)(\text{س}+١)}{(\text{س}-١)} = ٣(\text{س}+١)$

∴ $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = ٣(١+١) = ٦$

(٢) $\text{د}(٢) = \frac{٢^{٢}-٢-٢}{٢^{٢}-٢\times ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (كمية غير معينة)

∴ $\text{د}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}+١)}{\text{س}(\text{س}-٢)} = \frac{(\text{س}+١)}{\text{س}}$

∴ $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = \frac{٢+١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

مثال : أوجد قيمة (١) $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{٣}{٤}} \dfrac{١٦\,\text{س}^{٢} - ٩}{٨\,\text{س} - ٦}$ (٢) $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{(\text{س} + ٣)^{٣} - ٨}{\text{س}^{٢} - ٧\,\text{س} - ٨}$

الحل :

(١) لاحظ أن : $\text{س} \to \frac{٣}{٤}$ تعنى $٤\,\text{س} \to ٣$

$$\text{د}\left(\frac{٣}{٤}\right) = \frac{١٦ \times \left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢} - ٩}{٨ \times \frac{٣}{٤} - ٦} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \quad (\text{كمية غير معينة})$$

$$\therefore \text{د(س)} = \frac{١٦\,\text{س}^{٢} - ٩}{٨\,\text{س} - ٦} = \frac{(٤\,\text{س} - ٣)(٤\,\text{س} + ٣)}{٢\,(٤\text{س} - ٣)} = \frac{٤\,\text{س} + ٣}{٢}$$

$$\therefore \lim_{٤\text{س} \to ٣} \text{د(س)} = \frac{٣ + ٣}{٢} = ٣$$

(٢) $$\text{د}(-١) = \frac{(-١ + ٣)^{٣} - ٨}{(-١)^{٢} - ٧ \times (-١) - ٨} = \frac{٨ - ٨}{١ + ٧ - ٨} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \quad (\text{كمية غير معينة})$$

$$\therefore \text{د(س)} = \frac{[(\text{س} + ٣) - ٢][(\text{س} + ٣)^{٢} + ٢(\text{س} + ٣) + ٤]}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٨)}$$

$$= \frac{(\text{س} + ١)[\text{س}^{٢} + ٦\,\text{س} + ٩ + ٢\text{س} + ٦ + ٤]}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٨)}$$

$$= \frac{\text{س}^{٢} + ٨\,\text{س} + ١٩}{\text{س} - ٨} \qquad \therefore \lim_{\text{س} \to -١} \text{د(س)} = \frac{(-١)^{٢} + ٨ \times (-١) + ١٩}{-١ - ٨}$$

$$= \frac{١٢}{-٩} = \frac{-٤}{٣}$$

مثال : أوجد قيمة $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \left(\dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س} - ١} - \dfrac{٣ - ٢\,\text{س}}{\text{س} - ١} \right)$

الحل : $\text{د}(١) = \frac{١}{٠} - \frac{١}{٠} = \infty - \infty$ (كمية غير معينة)

وحد المقامات ثم حلل و اختصر العامل الصفرى

$$\text{د(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - ٣ + ٢\,\text{س}}{(\text{س} - ١)} = \frac{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ٣}{(\text{س} - ١)} = \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ١)} = \text{س} + ٣$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to ١} \text{د(س)} = ١ + ٣ = ٤$$

أعداد / الاستاذ خالد المنفلوطى

طريقة القسمة الطولة : لا نلجأ لهذه الطريقة إلا إذا تعذر علينا التحليل

مثال : أوجد قيمة $\displaystyle \text{نهـــا}_{\text{س} \leftarrow -٣} \frac{\text{س}^{٣} + ٥\,\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ٩}{\text{س}^{٣} + ٦\,\text{س}^{٢} + ٩\,\text{س}}$

الحل : $\text{د}(-٣) = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (كمية غير معينة)

سنلجا لقسمة البسط قسمة مطولة على العامل الصفرى أما المقام فيمكن تحليله بأخذ العامل المشترك س ثم نحلل المقدار الثلاثى

البسط $= \text{س}^{٣} + ٥\,\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ٩$

$$
\begin{array}{r|l}
\text{س}^{٣} + ٥\,\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ٩ & \text{س} + ٣ \\ \hline
-\;\text{س}^{٣} \; - \; ٣\,\text{س}^{٢} & \text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ٣ \\ \cline{1-1}
٢\,\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ٩ & \\
-\;٢\,\text{س}^{٢} \; - \; ٦\,\text{س} & \\ \cline{1-1}
-٣\,\text{س} - ٩ & \\
+\;٣\,\text{س} \; + \; ٩ & \\ \cline{1-1}
٠ \quad ٠ &
\end{array}
$$

$\therefore$ **البسط** $= (\text{س} + ٣)(\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ٣) = (\text{س} + ٣)(\text{س} + ٣)(\text{س} - ١)$

$= (\text{س} + ٣)^{٢}(\text{س} - ١)$

المقام $= \text{س}(\text{س}^{٢} + ٦\,\text{س} + ٩) = \text{س}(\text{س} + ٣)(\text{س} + ٣)$

$= \text{س}(\text{س} + ٣)^{٢}$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \frac{(\text{س} + ٣)^{٢}(\text{س} - ١)}{\text{س}(\text{س} + ٣)^{٢}} = \frac{(\text{س} - ١)}{\text{س}}$

$\therefore \text{نهـــا}_{\text{س} \leftarrow -٣} \text{د}(\text{س}) = \frac{(-٣ - ١)}{-٣} = \frac{-٤}{-٣} = \frac{٤}{٣}$

حل آخر : عن طريق القسمة التركيبية : **(الطريقة الاسهل)**

	معامل $\text{س}^{٣}$	معامل $\text{س}^{٢}$	معامل س	ثابت
-٣	١	٥	٣	-٩
		-٣	-٦	٩
	١	٢	-٣	صفر

الناتج : $\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ٣$ و هى نفس الاجابة فى الحل السابق بالقسمة المطولة .

* الضرب فى المرافق :

فى حالة الجذور التربيعية (فقط لا غير) نضرب بسطا و مقاما الكسر فى المرافق و ذلك عند وجود أى صورة من الصور الاتية : جذر ـ عدد ، عدد ـ جذر ، جذر ـ جذر

ملاحظات هامة :

١ـ تستخدم هذه الطريقة إذا كان البسط أو المقام أو كلاهما يحتوى على جذر تربيعى

٢ـ نضرب بسطا و مقاما فى مرافق المقدار المحتوى على الجذر التربيعي ثم نحذف العامل الصفرى ثم نعوض بقيمة س

٣ـ ناتج ضرب أى مقدار × المقدار المرافق له = فرق بين مربعين من المقدار السالب

مثال : أوجد النهايات الاتية : (١) $\displaystyle\lim_{\text{س}\to ٠} \frac{\sqrt{٩ + \text{س}^{٢}} - ٣}{\text{س}}$ (٢) $\displaystyle\lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\sqrt{\text{س} + ١} - ٢}{\sqrt{٦ + \text{س}} - ٣}$

الحل :

(١) $\text{د}(٠) = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (كمية غير معينة)

$$\text{د(س)} = \frac{\sqrt{٩ + \text{س}^{٢}} - ٣}{\text{س}} \times \frac{\sqrt{٩ + \text{س}^{٢}} + ٣}{\sqrt{٩ + \text{س}^{٢}} + ٣} = \frac{(٩ + \text{س}^{٢}) - ٩}{\text{س}\,(\sqrt{٩ + \text{س}^{٢}} + ٣)}$$

$$= \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}\,(\sqrt{٩ + \text{س}^{٢}} + ٣)} = \frac{\text{س}}{\sqrt{٩ + \text{س}^{٢}} + ٣}$$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to ٠} \text{د(س)} = \frac{\text{صفر}}{\sqrt{٩ + ٠^{٢}} + ٣} = \frac{\text{صفر}}{٦} = \text{صفر}$$

(٢) $\text{د}(٣) = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (كمية غير معينة)

$$\text{د(س)} = \frac{\sqrt{\text{س} + ١} - ٢}{\sqrt{٦ + \text{س}} - ٣} \times \frac{\sqrt{\text{س} + ١} + ٢}{\sqrt{\text{س} + ١} + ٢} \times \frac{\sqrt{٦ + \text{س}} + ٣}{\sqrt{٦ + \text{س}} + ٣}$$

$$= \frac{(\sqrt{\text{س} + ١} - ٢)(\sqrt{\text{س} + ١} + ٢)(\sqrt{\text{س} + ٦} + ٣)}{(\sqrt{٦ + \text{س}} - ٣)(\sqrt{\text{س} + ١} + ٢)(\sqrt{٦ + \text{س}} + ٣)}$$

$$= \frac{\left[\left(\sqrt{\text{س}+1}\right)^{2} - 4\right]\left(\sqrt{\text{س}+6}+3\right)}{\left[\left(\sqrt{\text{س}+6}\right)^{2} - 9\right]\left(\sqrt{\text{س}+1}+2\right)} = \frac{(\text{س}+1-4)\left(\sqrt{\text{س}+6}+3\right)}{(\text{س}+6-9)\left(\sqrt{\text{س}+1}+2\right)}$$

$$= \frac{(\text{س}-3)\left(\sqrt{\text{س}+6}+3\right)}{(\text{س}-3)\left(\sqrt{\text{س}+1}+2\right)} = \frac{\left(\sqrt{\text{س}+6}+3\right)}{\left(\sqrt{\text{س}+1}+2\right)}$$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to 3} \text{د(س)} = \frac{\left(\sqrt{3+6}+3\right)}{\left(\sqrt{3+1}+2\right)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

*** طريقة القانون :**

نظرية :

إذا كانت الدالة د على الصورة د(س) $= \lim_{\text{س}\to \text{ا}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{ا}} = \text{ن} \times \text{ا}^{\text{ن}-1}$

مثلا : $\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^{3} - 8}{\text{س} - 2} = \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{س}^{3} - 2^{3}}{\text{س} - 2} = 3 \times 2^{3-1} = 3 \times 2^{2} = 12$

نتائج هامة

١) $\lim_{\text{س}\to \text{ا}} \frac{(\text{س}+\text{ا})^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{س}} = \text{ن}\,\text{ا}^{\text{ن}-1}$

٢) $\lim_{\text{س}\to \text{ا}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{ا}^{\text{م}}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}\,\text{ا}^{\text{ن}-\text{م}}$

*** الشروط التى يجب توافرها فى الدالة لإيجاد نهايتها باستخدام القانون حيث س ← ا :**

١) كلا من البسط و المقام يتكون من حدين فقط (لا غير) هما طرفى علامة (تؤول إلى)
٢) أسس البسط متساوية
٣) أسس المقام متساوية
٤) إشارتى البسط و المقام متشابهان و كلاهما سالبة

٥)الاشارة الوسطى فى كل من البسط و المقام سالبة و هى سالبة بمعنى إذا وجدت + نحولها إلى ـ (ـ) و هى لا تأتى إلا مع الأسس الفردية

*** حالات خاصة :**

$$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - ١}{\text{س} - ١} = \text{ن}$$

مثلا : $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{٨} - ١}{\text{س} - ١} = ٨$

$$\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - ١}{\text{س}^{\text{م}} - ١} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}$$

مثلا : $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{٧} - ١}{\text{س}^{٤} - ١} = \frac{٧}{٤}$

مثال :أوجد قيمة النهايات الاتية : (١) $\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٥} - ٢٤٣}{\text{س} - ٣}$ (٢) $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س} - ٢}{\sqrt{\text{س}} - \sqrt{٢}}$

الحل :

(١) المقدار = $\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٥} - ٣^{٥}}{\text{س} - ٣} = ٥ \times ٣^{٥-١} = ٥ \times ٣^{٤} = ٤٠٥$

(٢) المقدار = $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٢^{\frac{١}{٢}}} = (١ \div \frac{١}{٢}) \times ٢^{١ - \frac{١}{٢}} = ٢ \times ٢^{\frac{١}{٢}} = ٢\sqrt{٢}$

مثال : أوجد (أ) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(\text{س} + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{\text{س}}$ (ب) $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{(\text{س} - ٤)^{٥} + ٣٢}{\text{س} - ٢}$

الحل :

(أ) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(\text{س} + ٥)^{٤} - ٥^{٤}}{\text{س}} = ٤ \times ٥^{٣} = ٥٠٠$ [باستخدام النتيجة]

حل آخر(أ) : $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(\text{س} + ٥)^{٤} - ٥^{٤}}{(\text{س} + ٥) - ٥} = ٤ \times ٥^{٣} = ٥٠٠$

(ب) $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{(\text{س} - ٤)^{٥} + ٣٢}{\text{س} - ٢} = \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{(\text{س} - ٤)^{٥} - (-٢)^{٥}}{(\text{س} - ٤) - (-٢)}$

$= ٥ (-٢)^{٤} = ٨٠$

مثال : أوجد قيمة $\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{(٢ + ٣\text{هـ})^{٥} - ٣٢}{٤\text{هـ}}$

الحل: $\frac{٣}{٤} \times \lim\limits_{٢+٣هـ \to ٢} \frac{(٢+٣هـ)^{٥} - ٢^{٥}}{(٢+٣هـ) - ٢} = \frac{٣}{٤} \times ٥ \times ٢^{٤} = ٦٠$

---

* **نهاية الدالة عند اللانهاية :**

الشــــرط : هذه الدالة لابد أن تكون دالة كسرية جبــرية .

طريقة الحل :

نقسم بسطاً و مقاماً على س مرفوعة لأعلى أس فى المقام ثم نستخدم القاعدة التالية :

$$\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\text{أى عدد}}{س^{ن}} = \text{صفر} \quad ، \quad \lim\limits_{س \to \infty} س^{ن} = \infty \quad \text{حيث } ن \in ح^{*} \text{ ، م ثابت}$$

مثال : أوجد $\lim\limits_{س \to \infty} \left(٣ + \frac{٥}{س}\right) = \lim ٣ + \lim\limits_{س \to \infty} \frac{٥}{س} = ٣ + ٠ = ٣$

مثال : أوجد $\lim\limits_{س \to \infty} (س^{٣} + ٥ س^{٢} - ٢)$ [بأخذ العامل المشترك $س^{٣}$]

الحل : $\lim\limits_{س \to \infty} س^{٣} \left(١ + \frac{٥}{س} - \frac{٢}{س^{٣}}\right) = \lim س^{٣} \times \lim\limits_{س \to \infty} \left(١ + \frac{٥}{س} - \frac{٢}{س^{٣}}\right) = \infty \times ١ = \infty$

* **ملاحظات هامة :** (القسمة على س بأكبر أس)

(١) إذا كان أعلى أس بالمقام = أعلى أس بالبسط فإن النهاية = $\frac{\text{معامل أعلى أس بالبسط}}{\text{معامل أعلى أس بالمقام}} \neq ٠$

(٢) إذا كان أعلى أس بالمقام > أعلى أس بالبسط فإن النهاية = صفر

(٣) إذا كان أعلى أس بالمقام < أعلى أس بالبسط فإن النهاية غير موجودة (∞)

(٤) للتخلص من الاسس السالبة (إذا أحتوت المسألة عليها) نضرب بسطا ومقاما × س مرفوعة لأكبر أس عدديا .

فمثلا : إذا كان $د(س) = \frac{٥ س^{-٣} + ٢ س^{-١} - ٧}{٣ س^{-٢} + س^{-٣} - ١}$ (بالضرب × $\frac{س^{٣}}{س^{٣}}$) نكمل الحل . . .

* نهاية الدوال المثلثية للزاوية س عندما س ← ٠ :

* نستخدم القواعد الآتية :

$$(١)\quad \lim_{س \to ٠} \frac{حا\, س}{س} = ١ \quad ، \quad \lim_{س \to ٠} \frac{حا\, \text{م}س}{س} = \text{م} \quad ، \quad \lim_{س \to ٠} \frac{حا\, \text{م}س}{ب\, س} = \frac{\text{م}}{ب}$$

$$(٢)\quad \lim_{س \to ٠} \frac{ظا\, س}{س} = ١ \quad ، \quad \lim_{س \to ٠} \frac{ظا\, \text{م}س}{س} = \text{م} \quad ، \quad \lim_{س \to ٠} \frac{ظا\, \text{م}س}{ب\, س} = \frac{\text{م}}{ب}$$

* نتائج هامة : (١) $\lim_{س \to ٠} حتا\, س = ١$ (٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{س - حتا\, س}{س} = صفر$

* ملاحظات هامة :

(١) $\lim_{س \to ٠} حتا\, \text{م}س = حتا\, ٠ = ١$ (أى نعوض عنها تعويض مباشر)

$\lim_{س \to ٠} \frac{حتا\, س}{س} \neq ١$ لان عند التعويض المباشر عن س = ٠

$\because$ د(٠) $= \frac{حتا\, ٠}{٠} = \frac{١}{٠} = \infty$ $\therefore$ $\frac{حتا\, س}{س}$ ليس لها نهاية عند س ← ٠

لذلك لا نقسم النسبة المثلثية (حتا) على س دائما نعوض عنها بالواحد الصحيح

$$(٢)\quad \lim_{س \to ٠} \frac{حا^{٢}\, \text{م}س}{س^{٢}} = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{حا\, \text{م}س}{س}\right)^{٢} = \text{م}^{٢} \quad ، \quad \text{بينما} \quad \lim_{س \to ٠} \frac{حا\, \text{م}س^{٢}}{س^{٢}} = \text{م}$$

$$(٣)\quad \lim_{س \to ٠} \frac{حا^{٢}\, \text{م}س}{ب\, س^{٢}} = \frac{١}{ب} \times \lim_{س \to ٠} \left(\frac{حا\, \text{م}س}{س}\right)^{٢} = \frac{١}{ب} \times \text{م}^{٢} = \frac{\text{م}^{٢}}{ب}$$

مثال : أوجد قيمة (١) $\lim_{س \to ٠} \frac{٣حتا^{٢}\, ٥\, س - ٣}{٥\, ظا\, ١٠س^{٢}}$ (٢) $\lim_{س \to \frac{ط}{٢}} \frac{٣حتا\, س}{ظا\, ٢س}$

الحل :

(١) $\text{د(س)} = \dfrac{٣(١ - \text{حا}^{٢}\,٥\,\text{س}) - ٣}{٥\ \text{ظا}\ ١٠\,\text{س}^{٢}} = \dfrac{-٣\,\text{حا}^{٢}\,٥\,\text{س}}{٥\ \text{ظا}\ ١٠\,\text{س}^{٢}}$

بالقسمة على $\text{س}^{٢}$ $\therefore \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\dfrac{-٣\,\text{حا}^{٢}\,٥\,\text{س}}{\text{س}^{٢}}}{\dfrac{٥\ \text{ظا}\ ١٠\,\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}} = \dfrac{-٣ \times ٢٥}{٥ \times ١٠} = \dfrac{-٣}{٢}$

(٢) الزاوية فى هذا السؤال $\left(\dfrac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)$

$\text{د(س)} = \dfrac{٣\,\text{حا}\left(\dfrac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)}{-\ \text{ظا}\ (\text{ط} - ٢\text{س})} = \dfrac{٣\,\text{حا}\left(\dfrac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)}{-\ \text{ظا}\,٢\left(\dfrac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)}$

بالقسمة على $\left(\dfrac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)$ $\therefore \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\text{ط}}{٢}} \dfrac{٣\,\text{حا}\left(\dfrac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)}{\left(\dfrac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)} \div \lim\limits_{\text{س} \to \frac{\text{ط}}{٢}} \dfrac{-\,\text{ظا}\,٢\left(\dfrac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)}{\left(\dfrac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)}$

$= ٣ \div (-٢) = \dfrac{-٣}{٢}$

مثال : أوجد قيمة (١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} ٣\,\text{س}\ \text{قتا}\ ٢\,\text{س}$ (٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{١}{\text{س}^{٢}\ \text{ظتا}^{٢}\,٥\,\text{س}}$

(٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{ظا}\,(٢\,\text{س} - ٦)}{\text{س}^{٢} - ٩}$ (٤) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{حا}^{٢}\,\dfrac{\text{س}}{٢}}{\text{س}\ \text{ظا}\,٢\,\text{س}}$

الحل :

(١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{٣\,\text{س}}{\text{حا}\ ٢\,\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{٣}{\dfrac{\text{حا}\ ٢\,\text{س}}{\text{س}}}$ (بالقسمة على س) $= \dfrac{٣}{٢}$

(٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{١}{\text{س}^{٢}\ \text{ظتا}^{٢}\,٥\,\text{س}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{\text{ظا}^{٢}\,٥\,\text{س}}{\text{س}^{٢}} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \left(\dfrac{\text{ظا}\ ٥\,\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢} = ٥^{٢} = ٢٥$

(٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \dfrac{\text{ظا}\,(٢\,\text{س} - ٦)}{\text{س}^{٢} - ٩} = \lim\limits_{\text{س} - ٣ \to ٠} \dfrac{\text{ظا}\ ٢\,(\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٣)\,(\text{س} + ٣)}$

$= \lim\limits_{\text{س} - ٣ \to ١٠} \dfrac{\text{ظا}\ ٢\,(\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٣)} \times \lim\limits_{\text{س} - ٣ \to ٠} \dfrac{١}{\text{س} + ٣}$

$= ٢ \times \dfrac{١}{٣ + ٣} = ٢ \times \dfrac{١}{٦} = \dfrac{١}{٣}$

(٤) $\lim_{س \to ٠} \dfrac{حا^2 \frac{س}{٢}}{س \, ظا ٢س}$ ÷ $س^2$ بالقسمة على $س^2$

$= \lim_{س \to ٠} \left[\dfrac{حا^2 \frac{س}{٢}}{س^2} \div \dfrac{س \, ظا ٢ \, س}{س^2} \right] \div$ نها ١

$= \lim_{س \to ٠} \left[\left(\dfrac{حا \frac{١}{٢} س}{س} \right)^2 \div \lim_{س \to ٠} \dfrac{ظا ٢ \, س}{س} \right] \div ١ = \left(\dfrac{١}{٢} \right)^2 \div ٢ \times ١ = \dfrac{١}{٤} \div ٢ = \dfrac{١}{٨}$

مثال : أوجد قيمة $\lim_{س \to ٤} \dfrac{حا (س - ٤)}{س^2 - ١٦}$

الحل : $\lim_{س \to ٤} \dfrac{حا (س - ٤)}{(س - ٤)(س + ٤)} = \lim_{س \to ٤} \dfrac{حا (س - ٤)}{(س - ٤)} \times \lim_{س \to ٤} \dfrac{١}{(س + ٤)}$

$= ١ \times \dfrac{١}{٨} = \dfrac{١}{٨}$

* نهاية دالة معرفة بأكثر من قاعدة :

اذا كانت الدالة معرفة على يمين (م) بقاعدة تختلف عن القاعدة التى على يسارها فلبحث نهاية الدالة عندما س ⟵ م لابد من حساب :

النهاية اليمنى عند م اى $د(م)^+$ ، النهاية اليسرى عند م اى $د(م)^-$ ثم مقارنتهما

فاذا كان $د(م)^+ = د(م)^- = ل$ فان $\lim_{س \to م} د(س) = ل$

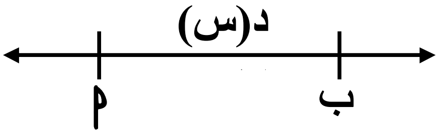
، إذا كان $د(م)^+ \neq د(م)^-$ فإن $\lim_{س \to م} د(س)$ ليست موجودة

ملاحظات:

(١) إذا كانت الدالة معرفة على يمين و يسار النقطة بقاعدة واحدة فإن نها د(س) تحسب بقواعد النهايات السابق شرحها .

(٢) اذا كانت الدالة معرفة فقط على يمينم (او على يسارم) فعند بحث النهاية يكتفى ببحث $د(م)^+$ أو $د(م)^-$ فقط وان وجدت تكون هى نهاية الدالة

(٣) إذا كانت الدالة معرفة على [أ ، ب] أو] أ ، ب [فلبحث نهاية الدالة عند أ نبحث النهاية اليمنى فقط و إن وجدت تكون هى نهاية الدالة عند أ ، و لبحث نهاية الدالة عند ب نبحث النهاية اليسرى فقط و إن وجدت تكون هى نهاية الدالة عند ب



مثال : إذا كانت د(س) = { حا ٣س / س لكل س < ٠ ؛ حتا ٣س لكل س > ٠ }

أوجد نهـا د(س) إن أمكن
س ← ٠

الحل : د(٠⁻) = نهـا د(س) = نهـا حا ٣س / س = ٣
س ← ٠⁻   س ← ٠⁻

د(٠⁺) = نهـا د(س) = نهـا حتا ٣ س = حتا ٠ = ١
س ← ٠⁺   س ← ٠⁺

∴ د(٠⁺) ≠ د(٠⁻) ∴ نهـا د(س) ليس لها وجود
س ← ٠

<u>* اتصال الدالة عند نقطة :</u>

تعريف

يقال أن الدالة د متصلة عند النقطة أ إذا تحققت الشروط الآتية معا :

١) د(أ) لها وجود أى د(س) معرفة عند س = أ

٢) نهـا د(س) لها وجود أى د(أ⁺) = د(أ⁻)
س ← أ

٣) نهـا د(س) = د (أ)
س ← أ

<u>* خطوات بحث اتصال الدالة د عند النقطة س = أ نتبع الخطوات الآتية :</u>

١) نوجد د(أ) [إذا لم يكن لها وجود كانت الدلة غير متصلة عند أ]

٢) نوجد $\lim_{س \to م}$ د(س) [إذا لم يكن لها وجود كانت الدالة غير متصلة عند م]

٣) نقارن $\lim_{س \to م}$ د(س) بالعدد د(م) [فإذا حدث التساوى كانت الدالة متصلة عند م ، إلافانها تكون غير متصلة عند م]

ملاحظة : يكفى عدم تحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة لعدم اتصال الدالة عند م

[١] ابحث اتصال الدالة د(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ عند س = ٢

الحل:

∵ د(٢) غير معرفة ∴ د(س) غير متصلة عند س = ٢

[٢] ابحث اتصال الدالة د(س) = | س – ١ | + ٣ عند س = ١

الحل : باعادة تعريف الدالة :

د(س) = $\begin{cases} س - ١ + ٣ & ، س \geqslant ١ \\ -س + ١ + ٣ & ، س < ١ \end{cases}$ = $\begin{cases} س + ٢ & ، س \geqslant ١ \\ -س + ٤ & ، س < ١ \end{cases}$

∵ الدالة د معرفة عند س = ١ ∴ د(١) = ١ + ٢ = ٣

د(١^{+}) = $\lim_{س \to ١^{+}}$ (س + ٢) = ١ + ٢ = ٣ ، د(١^{-}) = $\lim_{س \to ١^{-}}$ (-س + ٤) = -١ + ٤ = ٣

∴ د(١^{+}) = د(١^{-}) ∴ $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٣

∵ د(١) = $\lim_{س \to ١}$ د(س) ∴ د متصلة عند س = ١

تعريف

إذا كانت د(س) معرفة على الفترة [م ، ب] تكون متصلة على الفترة [م ، ب] إذا كانت :

١) د(س) متصلة على الفترة]م ، ب [

٢) $\lim_{س \to م^{+}}$ د(س) = د(م)

٣) $\lim_{س \to ب^{-}}$ د(س) = د(ب)

[٦] أساسيات التكامل :

بعض قواعد التكامل

(١) ∫ سن ء س = $\frac{١}{ن + ١}$ سن + ١ + ث ، ن ≠ - ١

(٢) ∫ م د(س) ء س = م ∫ د(س) ء س ، م ثابت

نتيجة : ∫ ء س = س + ث ، ∫ م ء س = م س + ث

(٣) ∫ [د(س) ± ر(س)] ء س = ∫ د(س) ء س ± ∫ ر(س) ء س

(٤) ∫ (م س + ب)ن ء س = $\frac{١}{م(ن + ١)}$ (م س + ب)ن + ١ + ث ، ن ≠ - ١

(٥) ∫ [د(س)]ن × د/(س) ء س = $\frac{[\text{ د(س) }]^{\text{ن + ١}}}{(\text{ن + ١})}$ + ث حيث ث ثابت ، ن≠-١

ملاحظات هامة: ١- يكفى إضافة ثابت واحد لمجموع المشتقات العكسية

٢- يتم إجراء عمليات الضرب و القسمة للدوال قبل اجراء التكامل لانه لا توجد قاعدة عامة لإيجاد تكامل حاصل ضرب أو خارج قسمتهما

تكاملات بعض الدوال المثلثية

(١) ∫ حا س ء س = ـ حتا س + ث (٢) ∫ حتا س ء س = حا س + ث

(٣) ∫ قا٢ س ء س = طا س + ث (٤) ∫ قتا٢ س ء س = ـ ظتا س + ث

(٥) ∫ قا س طا س ء س = قا س + ث (٦) ∫ قتا س ظتا س ء س = ـ قتا س + ث

(٧) ∫ حا (م س + ب) ء س = $\frac{\text{ـ حتا (م س + ب)}}{\text{م}}$ + ث

تكامل الدالة الأسية

١) $\int \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}\ \text{ءس} = \frac{\text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}}{\text{أ}} + \text{ث}$

٢) $\int \text{د}^{/}(\text{س}) \cdot \text{هـ}^{\text{د(س)}}\ \text{ءس} = \text{هـ}^{\text{د(س)}} + \text{ث}$

٣) $\int \text{أ}^{\text{س}}\ \text{ءس} = \frac{\text{أ}^{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{أ}} + \text{ث}$

٤) $\int \frac{1}{\text{س}}\ \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{ث}$

٥) $\int \frac{\text{د}^{/}(\text{س})}{\text{د(س)}}\ \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{د(س)}| + \text{ث}$

ملاحظات هامة

١) $\text{أ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{أ}^{\text{س}}} = \text{هـ}^{\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{أ}}$

٢) $\int \text{أ}^{\text{س}}\ \text{ءس} = \frac{\text{أ}^{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{أ}} + \text{ث}$

٣) $\text{لو}_{\text{ب}}\ \text{أ} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{أ}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ب}}$

٤) $\text{لو}_{\text{ب}}\ \text{أ} \times \text{لو}_{\text{أ}}\ \text{جـ} = \text{لو}_{\text{ب}}\ \text{جـ}$

٥) تفاضلى ص $= \text{ءص} = \text{د}^{/}(\text{س}) \cdot \text{ءس}$

٦) تفاضلى س $= \text{ءس}$

تذكرأن : إذا كانت معادلة المنحنى ص = د(س) $\underset{\text{تكامل}}{\overset{\text{تفاضل}}{\rightleftarrows}}$ ميل المماس $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{د}^{/}(\text{س})$

مثال : أوجد ∫ (١ ـ حتا س)^{٢} ء س

الحل : ∫ (١ ـ ٢ حتا س + حتا^{٢} س) ء س

= ∫ [١ ـ ٢ حتا س + $\frac{١}{٢}$ (١ + حتا ٢ س)] ء س

= س ـ ٢ حا س + $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١}{٤}$ حا ٢ س + ث

= $\frac{٣}{٢}$ س ـ ٢ حا س + $\frac{١}{٤}$ حا ٢ س + ث

مثال: أوجد ∫ س (س^{٢} + ٥)^{٤} ء س

الحل : د(س) = س^{٢} + ٥ ∴ د/(س) = ٢ س

∴ $\frac{١}{٢}$ ∫ ٢ س (س^{٢} + ٥)^{٤} ء س

= $\frac{١}{١٠}$ (س^{٢} + ٥)^{٥} + ث

مثال: أوجد التكاملات الآتية :

١) ∫ (حا س ـ حتا س)^{٢} ء س

٢) ∫ (١ ـ حتا س)^{٢} ء س

٣) ∫ حا^{٥} س حتا س ء س

٤) ∫ س (س^{٢} + ٥)^{٤} ء س

الحل :

١) ∫ (حا س ـ حتا س)^{٢} ء س

= ∫ (حا^{٢} س + حتا^{٢} س ـ ٢حاس حتا س) ء س

= ∫ (١ ـ حا٢س) ء س = س + $\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س + ث

٢) ∫ (١ ـ حتا س)^{٢} ء س

= ∫ (١ + حتا^{٢} س ـ ٢ حتا س) ء س

= ∫ (١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س ـ ٢ حتا س) ء س

= ∫ ($\frac{٣}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س ـ ٢ حتا س) ء س

= $\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ حا ٢ س ـ ٢ حا س + ث

= $\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{١}{٤}$ حا ٢ س ـ ٢ حا س + ث

٣) ∫ حا^{٥} س حتا س ء س

∵ د(س) = حا س ∴ د/(س) = حتا س

∴ ∫ حا^{٥} س (حتا س) ء س

= $\frac{١}{٦}$ حا^{٦} س + ث

٤) ∫ س (س^{٢} + ٥)^{٤} ء س

= $\frac{١}{٢}$ ∫ ٢ س (س^{٢} + ٥)^{٤} ء س

= $\frac{١}{١٠}$ (س^{٢} + ٥)^{٥} + ث

مثال : أوجد التكاملات الآتية :

١) ∫ (٢ س + ٣) ء س

٢) ∫ $\frac{\text{س}^{٣} + ١}{\text{س} + ١}$ ء س

٣) ∫ ((س ـ ١)^{٥} + ٣) ء س

٤) ∫ ـ ٢ ع ء ع

٥) ∫ (س ـ ٥)(س ـ ١) ء س

٦) ∫ ٦ (٢س ـ ٣)^{٥} ء س

٧) ∫ ٢ س (س^{٢} + ٣) ء س

٨) ∫ $\frac{\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢}$ ء س

٩) ∫ س^{٢} (٣ + $\frac{١}{\text{س}}$)^{٢} ء س

١٠) ∫ $\frac{٣}{(٢\,\text{س} + ١)^{٤}}$ ء س

١١) ∫ ($\frac{\text{س}}{٣}$ + ٢)^{٨} ء س

١٢) ∫ س^{٥} (٧ + $\frac{١}{\text{س}}$)^{٥} ء س

١٣) $\int \frac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س} - ١}\, \text{ءس}$

١٤) $\int (\text{س} + ٢)(\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٤)\, \text{ءس}$

١٥) $\int \sqrt[٣]{(٩\text{س} - ٤)^٢}\, \text{ءس}$

الحل :

[١] $\int (٢\text{س} + ٣)\, \text{ءس} = \text{س}^٢ + ٣\text{س} + \text{ث}$

[٢] $\int \frac{\text{س}^٣ + ١}{\text{س} + ١}\, \text{ءس}$

$= \int \frac{(\text{س} + ١)(\text{س}^٢ - \text{س} + ١)}{(\text{س} + ١)}\, \text{ءس}$

$= \int (\text{س}^٢ - \text{س} + ١)\, \text{ءس}$

$= \frac{١}{٣}\text{س}^٣ - \frac{١}{٢}\text{س}^٢ + \text{س} + \text{ث}$

[٣] $\int ((\text{س} - ١)^٥ + ٣)\, \text{ءس}$

$= \int (\text{س} - ١)^٥\, \text{ءس} + \int ٣\, \text{ءس}$

$= \frac{١}{٦}(\text{س} - ١)^٦ + ٣\text{س} + \text{ث}$

[٤] $\int -٢\text{ع}\, \text{ءع} = -٢ \times \frac{١}{٢}\text{ع}^٢ + \text{ث}$

$= -\text{ع}^٢ + \text{ث}$

[٥] $\int (\text{س} - ٥)(\text{س} - ١)\, \text{ءس}$

$= \int (\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٥)\, \text{ءس}$

$= \text{س}^٣ - ٣\text{س}^٢ + ٥\text{س} + \text{ث}$

[٦] $\int ٦(٢\text{س} - ٣)^٥\, \text{ءس} = ٦ \times \frac{(٢\text{س} - ٣)^٦}{٢ \times ٦} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢}(٢\text{س} - ٣)^٦ + \text{ث}$

[٧] $\int ٢\text{س}(\text{س}^٢ + ٣)\, \text{ءس}$

$= \int (٢\text{س}^٣ + ٦\text{س})\, \text{ءس}$

$= ٢ \times \frac{\text{س}^٤}{٤} + ٦ \times \frac{\text{س}^٢}{٢} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢}\text{س}^٤ + ٣\text{س}^٢ + \text{ث}$

[٨] $\int \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢}\, \text{ءس}$

$= \int \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٢)}\, \text{ءس}$

تابع ٨ :

$= \int (\text{س} - ٣)\, \text{ءس} = \frac{١}{٢}\text{س}^٢ - ٣\text{س} + \text{ث}$

[٩] $\int \text{س}^٢ (٣ + \frac{١}{\text{س}})^٢\, \text{ءس}$

$= \int (٣\text{س} + ١)^٢\, \text{ءس}$

$= \frac{(٣\text{س} + ١)^٣}{٣ \times ٣} + \text{ث} = \frac{١}{٩}(٣\text{س} + ١)^٣ + \text{ث}$

[١٠] $\int \frac{٣}{(٢\text{س} + ١)^٤}\, \text{ءس}$

$= \int ٣(٢\text{س} + ١)^{-٤}\, \text{ءس}$

$= ٣ \times \frac{(٢\text{س} + ١)^{-٣}}{٢ \times -٣} + \text{ث}$

$= -\frac{١}{٢}(٢\text{س} + ١)^{-٣} + \text{ث}$

[١١] $\int (\frac{\text{س}}{٣} + ٢)^٨\, \text{ءس}$

$= \frac{(\frac{\text{س}}{٣} + ٢)^٩}{٩ \times \frac{١}{٣}} + \text{ث} = \frac{١}{٣}(\frac{\text{س}}{٣} + ٢)^٩ + \text{ث}$

[١٢] $\int \text{س}^٥ (٧ + \frac{١}{\text{س}})^٥\, \text{ءس}$

$= \int (٧\text{س} + ١)^٥\, \text{ءس}$

$= \frac{(٧\text{س} + ١)^٦}{٧ \times ٦} + \text{ث} = \frac{١}{٤٢}(٧\text{س} + ١)^٦ + \text{ث}$

[١٣] $\int \frac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س} - ١}\, \text{ءس} = \int \frac{\text{س}(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)}\, \text{ءس}$

$= \int \text{س}\, \text{ءس} = \frac{١}{٢}\text{س}^٢ + \text{ث}$

[١٤] $\int (\text{س} + ٢)(\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٤)\, \text{ءس}$

$= \int (\text{س}^٣ + ٨)\, \text{ءس} = \frac{١}{٤}\text{س}^٤ + ٨\text{س} + \text{ث}$

[١٥] $\int \sqrt[٣]{(٩\text{س} - ٤)^٢}\, \text{ءس}$

$= \int (٩\text{س} - ٤)^{\frac{٢}{٣}}\, \text{ءس}$

$= \frac{(٩\text{س} - ٤)^{\frac{٥}{٣}}}{٩ \times \frac{٥}{٣}} + \text{ث} = \frac{١}{١٥}(٩\text{س} - ٤)^{\frac{٥}{٣}} + \text{ث}$

مثال : أوجد كل مما يأتى :

١) $\int \text{هـ}^{\text{٧س}} \, \text{ءس} = \frac{\text{هـ}^{\text{٧س}}}{\text{٧}} + \text{ث}$

٢) $\int \text{٣}\sqrt{\text{٢}} \, \text{هـ}^{-\sqrt{\text{٢}}\,\text{ن}} \, \text{ءن} =$

$= \text{٣}\sqrt{\text{٢}} \times \frac{\text{هـ}^{-\sqrt{\text{٢}}\,\text{ن}}}{-\sqrt{\text{٢}}} + \text{ث}$

$= -\text{٣} \times \text{هـ}^{-\sqrt{\text{٢}}\,\text{ن}} + \text{ث}$

٣) $\int -\text{هـ}^{-\text{٥ع}} \, \text{ءع} = \frac{-\text{هـ}^{-\text{٥ع}}}{-\text{٥}} + \text{ث}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٥}} \text{هـ}^{-\text{٥ع}} + \text{ث}$

٤) $\int \pi \, \text{هـ}^{\text{س}} \, \text{ءس} = \pi \, \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

٥) $\int \text{هـ}^{\text{١}-\text{٣س}} \, \text{ءس} = \frac{\text{هـ}^{\text{١}-\text{٣س}}}{-\text{٣}} + \text{ث}$

٦) $\int (\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٤هـ}^{\text{٢س}}) \, \text{ءس}$

$= \frac{\text{٣}}{\text{٣}} \text{س}^{\text{٣}} - \text{٤} \times \frac{\text{هـ}^{\text{٢س}}}{\text{٢}} + \text{ث}$

$= \text{س}^{\text{٣}} - \text{٢هـ}^{\text{٢س}} + \text{ث}$

٧) $\int \left(\frac{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}}{\text{٢}} \right) \text{ءس}$

$= \int \left(\frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{هـ}^{\text{س}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{هـ}^{-\text{س}} \right) \text{ءس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{هـ}^{\text{س}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{هـ}^{-\text{س}} + \text{ث}$

اهداء الى:

روح والدتى ... والدى يشفيه رب العالمين

أولادى : محمد ـ أحمد ـ فاطمة الزهراء ـ مريم

الاستاذ / محمد ابراهيم ... بارك الله فيه و جعله فى ميزان حسناته

الذى أوحى لى بالفكرة