الاشتقاق

تعريف المشتقّة

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

الأفضل أن نستخدم التعريف الأساسي في حالة لو المطلوب إيجاد $f'(x)$

تعريف (بديل): المشتقة عند نقطة

مشتقة دالّة f عند $x = a$ هي:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شرط وجود النهاية.

الأفضل أن نستخدم التعريف البديل في حالة لو المطلوب إيجاد $f'(a)$

المشتقة من جهة واحدة:

مشتقة الدالة f من اليمين يرمز لها بالرمز $f'_+(a)$ وهي:

(إن وجدت) $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

ومشتقة الدالة f من اليسار يرمز لها بالرمز $f'_-(a)$ وهي:

(إن وجدت) $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

إن الدالة لها مشتقة عند نقطة إذا وفقط إذا كانت المشتقتان لجهة اليمين ولجهة اليسار موجودتين ومتساويتين عند تلك النقطة.

ملاحظات:

- إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in (a, b)$، فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b).
- إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل x: $x \in (-\infty, \infty)$ فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ مثل كثيرة الحدود.
- إذا وضعنا x بدلاً من a في تعريف المشتقة عند النقطة نحصل على $f'(x)$ حيث $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
  ويمكن أن نرمز للمشتقة بأحد الرموز التالية: $y', f'(x), \frac{d}{dx}(f(x)), \frac{dy}{dx}$
- لأيّ دالة f تكون f' دالة أخرى مجالها مكوّن من جميع قيم x التي يكون للدالة مشتقة عندها أي $(D_{f'} \subseteq D_f)$ أي أن f' دالة مستخلصة من f.

الاشتقاق والاتصال:

إذا كانت الدالة f ليست متصلة عند نقطة $(a \, , \, f(a))$ فإنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

نظرية الاشتقاق والاتصال

إذا كانت الدّالة f لها مشتقّة عند نقطة، فإنّها تكون متصلة عند هذه النقطة.

قواعد الاشتقاق:

- ✓ **مشتقة دالة ثابتة تساوي صفر.**
- ✓ إذا كانت $f(x) = x$ فإن $f'(x) = 1$ لجميع قيم x الحقيقية
- ✓ إذا كان $f(x) = x^n$ حيث n عدد صحيح موجب $n \neq 1$ فإنّ: $f'(x) = nx^{n-1}$
- ✓ $(kf(x))' = kf'(x)$
- ✓ $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) \pm \frac{d}{dx}(g(x))$
- ✓ $(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$
- ✓ $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

معادلة الناظم (العمودي): $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$

Ahmed Shaban