دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي

The Unit Circle in the Coordinate Plane

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أكمل الجدول أدناه.

القياس بالدرجات	القياس بالراديان
٤٥°	$\frac{\pi}{٤}$
١٣٥°	$\frac{\pi ٣}{٤}$
−١٨٠°	$-\pi$
−١٥٠°	$-\frac{\pi ٥}{٦}$
−٢٢٥°	$-\frac{\pi ٥}{٤}$
١٥٠°	$\frac{\pi ٥}{٦}$

(٢) اذكر النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها ٣٠°، ثمّ أوجد كلًا من: $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

(أ) جا ٣٠° $= \frac{١}{٢}$

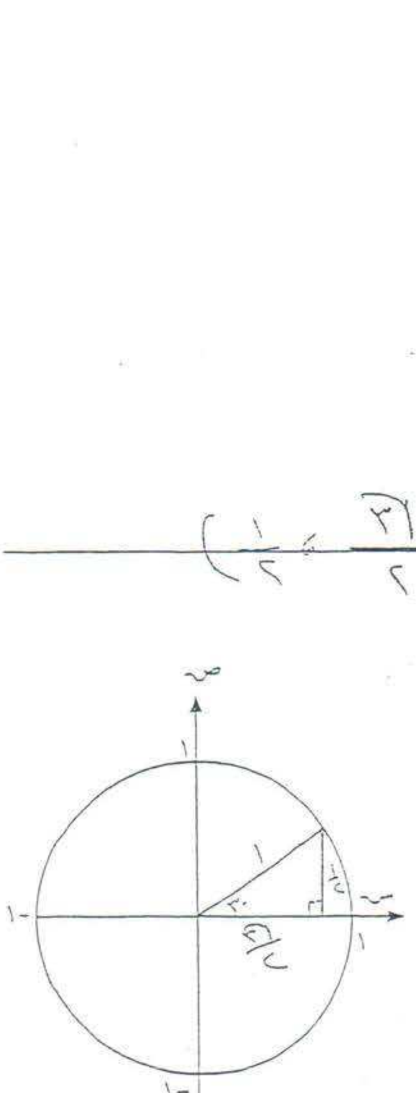
(ب) جتا ٣٠° $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(جـ) ظا ٣٠° $= \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(د) ظتا ٣٠° $= \sqrt{٣}$

(هـ) قا ٣٠° $= \frac{٢}{\sqrt{٣}}$

(و) قتا ٣٠° $= ٢$



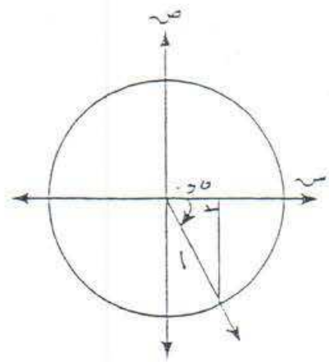
في التمرينين (٣-٤)، باستخدام دائرة الوحدة أوجد جيب تمام الزاوية وجيب الزاوية لكل من:

(٣) −٦٠°

إحداثيا النقطة المثلثية $\left(\frac{1}{2} ، -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

حتا(−٦٠°) = $\frac{1}{2}$

حا(−٦٠°) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

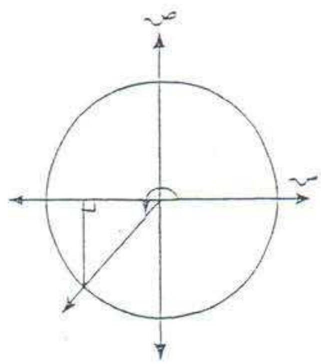


(٤) ٢٢٥°

إحداثيا النقطة المثلثية $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ، -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

حتا ٢٢٥° = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ظا ٢٢٥° = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$



في التمارين (٥-٨)، استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد جيب تمام، جيب، ظل الزاوية على الترتيب لكلّ من الزوايا التالية. ثمّ قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

(٥) ٣٢° حتا ٣٢° = ٠٫٨٥ ، حا ٣٢ = ٠٫٥٣ ، ظا ٣٢ = ٠٫٦٢

(٦) −٤٥° حتا(−٤٥) = ٠٫٧١ ، حا(−٤٥°) = −٠٫٧١ ، ظا(−٤٥°) = −١

(٧) −٩٧° حتا(−٩٧°) = ، حا(−٩٧°) = ، ظا(−٩٧°) =

(٨) ١٥٤° حتا(١٥٤°) = ، حا(١٥٤°) = ، ظا(١٥٤) =

في التمارين (٩-١١)، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جيب تمام، جيب، ظل الزاوية على الترتيب لكلّ من الزوايا التالية:

(٩) $\frac{\pi}{4}$ حتا $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، حا $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، ظا $\frac{\pi}{4} = 1$

(١٠) ٦٠° حتا ٦٠° = $\frac{1}{2}$ ، حا ٦٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، ظا ٦٠° = $\sqrt{3}$

(١١) ٠° حتا ٠° = ١ ، حا ٠° = ٠ ، ظا ٠ = ٠

في التمارين (١٢-١٥)، في أيّ ربع أو على أيّ محور يقع الضلع النهائي لكلّ من الزوايا التالية:

(١٢) ١٥٠° في الربع الثاني

(١٣) $-\pi$ على محور السينات السالب

(١٤) −٦٠° في الربع الرابع

(١٥) $\frac{7\pi}{6}$ في الربع الثالث

(١٦) (أ) أكمل الفراغ في الرسم أدناه.

الربع الثاني

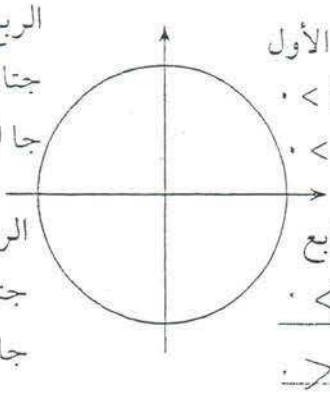
جتا θ < ٠

جا θ > ٠

الربع الأول

جتا θ > ٠

جا θ > ٠



الربع الثالث

جتا θ < ٠

جا θ < ٠

الربع الرابع

جتا θ > ٠

جا θ < ٠

(ب) افترض أن جتاθ سالبة جاθ موجبة. يقع الضلع النهائي للزاوية θ في : ________

(أ) الربع الأول (ب) الربع الثاني (جـ) الربع الثالث (د) الربع الرابع

(١٧) الكتابة في الرياضيات: فسّر كيفية إيجاد جيب، جيب تمام الزوايا التالية: ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠° بدون استخدام الآلة الحاسبة.

باستخدام النقط الإحداثية ٠° ← (١ ، ٠)

٩٠° ← (٠ ، ١) ، ١٨٠° ← (-١ ، ٠)

٢٧٠° ← (٠ ، -١) ، ٣٦٠° ← (١ ، ٠)

في التمارين (١٨ -٢٥)، استخدم المنقلة وارسم كلًا من الزوايا التالية على دائرة الوحدة، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها.

(١٨) ٢١٠° α = ٣٠° (١٩) $\frac{٢\pi}{٣}$ α = $\frac{\pi}{٣}$

(٢٠) ١٧٠° α = ١٠° (٢١) $\frac{٧\pi}{٣}$ α = $\frac{\pi}{٣}$

(٢٢) -١٣٥° α = ٤٥° (٢٣) -$\frac{٧\pi}{٦}$ α = $\frac{\pi}{٦}$

(٢٤) -٢٤٠° α = ٦٠° (٢٥) -$\frac{١١\pi}{٦}$ α = $\frac{\pi}{٦}$

(٢٦) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا الأخرى هي: ________

(أ) ١٩٠° (ب) ١٧٠°

(جـ) ٣٥٠° (د) ١١٠°

(٢٧) الزاوية التي في الوضع القياسي وضلعها النهائي يمر بالنقطة م($\frac{\sqrt{٢}}{٢}$، -$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$) التي تقع على دائرة الوحدة هي: ________

(أ) ٤٥° (ب) ٢٢٥°

(جـ) ٣١٥° (د) ٣٣٠°

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١ – ٤)، إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

(١) جتا (-٣٠٠°) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٢) جا (١٢٠°) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٣) ظا (-١٥٠°) = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (أ) (ب)

(٤) قا (٣١٥°) = $\sqrt{٢}$ (أ) (ب)

(٥) الزاوية التي يقع ضلعها النهائي في الربع الرابع في ما يلي هي:

(أ) -٣٢٠° (ب) -٢٧٠°

(ج) $\frac{٥\pi}{٣}$ (د) $\frac{١٣\pi}{٩}$

(٦) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) $\frac{٧\pi}{٤}$ (ب) ١٣٥°

(جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ (د) ٢١٥°

(٧) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{٣}$ هي:

(أ) $\frac{١١\pi}{٦}$ (ب) ٢٥٥°

(جـ) $\frac{٧\pi}{٨}$ (د) $\frac{٥\pi}{٣}$

(٨) زاوية في الوضع القياسي قياسها يساوي -٢٢٥°. فإن النقطة التي يمكن أن تقع على الضلع النهائي لهذه الزاوية هي:

(أ) $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ (ب) $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$

(جـ) $\left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ (د) (-١، ١)

(٩) [جا(-١٣٥°)]^{٢} + [جتا(-١٣٥°)]^{٢} =

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) صفر

تمرين
٨-٢

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

Relations Between Trigonometric Functions (1)

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) اكتب النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

(أ) جا$(\pi + \theta)$ = - جا θ

(ب) جتا$(\pi - \theta)$ = - جتا θ

(جـ) جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = جتا θ

(د) جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جا θ

(٢) اكتب النسب المثلثية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية س.

(أ) ظا(١٨٠° - س) = - ظا س

(ب) جتا(١٨٠° + س) = - جتا س

(جـ) جا(- س) = - جا

(٣) استخدم ما تعلمته لكتابة النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

(أ) ظتا$(\pi + \theta)$

= ظتا θ

(ب) قتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$

= قا θ

(جـ) ظتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$

= - ظا θ

(د) قا$(-\theta)$

= قا θ

(٤) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جا ١٥٠° = جا (١٨٠° - ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

(ب) ظا(-٢٢٥°) = - ظا ٢٢٥° = - ظا (١٨٠° + ٤٥°) = - ظا ٤٥ = - ١

(ج) جتا(-١٣٥°) = جتا ١٣٥° = جتا (١٨٠ - ٤٥) = - جتا ٤٥ = - $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(٥) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ = جتا $(\pi + \frac{\pi}{٦})$ = - جتا $\frac{\pi}{٦}$ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(ب) جا$(-\frac{٢\pi}{٣})$ = - جا $\frac{٢\pi}{٣}$ = - جا $(\pi - \frac{\pi}{٣})$ = - جا $\frac{\pi}{٣}$ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(ج) ظا $\frac{١١\pi}{٦}$ = ظا $(٢\pi - \frac{\pi}{٦})$ = - ظا $\frac{\pi}{٦}$ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(٦) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) ظتا ٣٩٠° = ظتا (٣٦٠ + ٣٠) = ظتا ٣٠ = $\sqrt{٣}$

(ب) جا ٣٩٠° = جا (٣٦٠ + ٣٠) = جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$

(ج) قتا ٤٥٠° = قتا (٣٦٠ + ٩٠) = قتا ٩٠ = ١

(د) قا $\frac{١٧\pi}{٤}$ = قا $(\frac{\pi}{٤} + ٤\pi)$ = قا $\frac{\pi}{٤}$ = $\sqrt{٢}$

في التمارين (٧-١٠)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

(٧) إذا كانت جاθ = ٠,٢ فإن جا$(\pi + \theta)$ = ٠,٢ (أ) (ب)

(٨) إذا كانت جتاθ = $\frac{٢}{٣}$ فإن قاθ = $\frac{٣}{٢}$ (أ) (ب)

(٩) إذا كانت ظاθ = ٣ فإن ظتا$(\pi + \theta)$ = ٣ (أ) (ب)

(١٠) إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$ فإن قتا$(\pi + \theta)$ = -٥ (أ) (ب)

(١١) بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

(أ) جتا$(\pi - \theta)$ - جتا$(- \theta)$ + جا$(\pi + \theta)$ + جتا$(\frac{\pi}{٢} - \theta)$.

= - جتا θ - جتا θ - جا θ + جا θ = - ٢ جتا θ

(ب) جا$(\pi + \theta)$ - جتا$(\theta + \frac{\pi}{٢})$ + جتا$(\pi - \theta)$ + جا$(\theta + \frac{\pi}{٢})$.

= - جا θ + جا θ - جتا θ + جتا θ = صفر

✓ (١٢) حلّ المعادلات التالية:

(أ) جتا س = + $\frac{١}{٢}$

(ب) ظتا س = $\sqrt{٣}$

(جـ) ٢ جا س = + $\sqrt{٢}$

(د) جا(٤س) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(هـ) جتا$\left(٢\text{س} + \frac{\pi}{٤}\right)$ = جتا$\left(\text{س} - \frac{٣\pi}{٤}\right)$

(و) جا$\left(\frac{\pi}{٦} - \text{س}\right)$ = جا$\left(٢\text{س} - \frac{٢\pi}{٣}\right)$

(ز) جتا$\left(\frac{\pi}{٨} + \text{س}\right)$ = ١

(ح) ظا(٣π + ٢س) = ظتا(٢س)

ملاحظة حل رقم (١٢) ص٨١ في الصفحة القادمة

رقم (١٢) ص ٧٧

(هـ) $جتا\, س = \frac{١}{٢}$

$جتا\, س > ٠$

∴ س تقع في الربع الأول أو الربع الرابع

∴ $س = \frac{\pi}{٣} + ٢ ل \pi$

أو $س = -\frac{\pi}{٣} + ٢ ل \pi$ (ل ∈ ص)

(ج) $جا\, س = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

$جا\, س > ٠$

∴ س تقع في الربع الأول أو الثاني

∴ $س = \frac{\pi}{٤} + ٢ ل \pi$ (ل ∈ ص)

أو $س = (\pi - \frac{\pi}{٤}) + ٢ ل \pi$

$= \frac{٣\pi}{٤} + ٢ ل \pi$

(ب) $ظتا\, س = \sqrt{٣}$

$ظا\, س = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

$ظا\, س = ظا \frac{\pi}{٦}$

∴ $س = \frac{\pi}{٦} + ل \pi$ (ل ∈ ص)

(د) $جا(٤س) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$جا(٤س) > ٠$

∴ ٤س تقع في الربع الأول أو الثاني

$٤س = \frac{\pi}{٣} + ٢ ل \pi$

∴ $س = \frac{\pi}{١٢} + \frac{١}{٢} ل \pi$

أو $٤س = (\pi - \frac{\pi}{٣}) + ٢ ل \pi$

∴ $٤س = \frac{٢\pi}{٣} + ٢ ل \pi$

$س = \frac{\pi}{٦} + \frac{١}{٢} ل \pi$ (ل ∈ ص)

(هـ) $جتا(٢س + \frac{\pi}{٤}) = جتا(س - \frac{٣\pi}{٤})$

إما $٢س + \frac{\pi}{٤} = س - \frac{٣\pi}{٤} + ٢ ل \pi$ أو $٢س + \frac{\pi}{٤} = -س + \frac{٣\pi}{٤} + ٢ ل \pi$

$س = -\pi + ٢ ل \pi$ أو $٣س = \frac{\pi}{٢} + ٢ ل \pi$

$س = \frac{\pi}{٦} + \frac{٢}{٣} ل \pi$

(و) $جا(\frac{\pi}{٦} - س) = جا(٢س - \frac{٢\pi}{٣})$

إما $\frac{\pi}{٦} - س = ٢س - \frac{٢\pi}{٣} + ٢ ل \pi$ أو $\frac{\pi}{٦} - س = \pi - ٢س + \frac{٢\pi}{٣} + ٢ ل \pi$

$-٣س = -\frac{٥\pi}{٦} + ٢ ل \pi$ $س = \frac{٣\pi}{٢} + ٢ ل \pi$

$س = \frac{٥\pi}{١٨} - \frac{٢}{٣} ل \pi$

(ز) $جتا(\frac{\pi}{٨} + س) = ١$

∴ $\frac{\pi}{٨} + س = ٠ + ٢ ل \pi$

$س = -\frac{\pi}{٨} + ٢ ل \pi$

(ل ∈ ص)

(ح) $٣\pi + ٢س + ٢س = \frac{\pi}{٢}$

$٤س = \frac{-٥\pi}{٢}$

$س = \frac{-٥\pi}{٨}$

(١) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $\frac{١}{٢}$ هي:

(أ) جا(−٣٣٠°) (ب) جتا(−٢٤٠°)

(جـ) ظتا(−١٥٠٠°) (د) ظا٧٦٥°

(٢) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$:

(أ) جتا $\frac{٣١\pi}{٦}$ (ب) جا$\left(-\frac{٣٥\pi}{٣}\right)$

(جـ) ظا $\frac{١٧\pi}{٦}$ (د) قا $\frac{١٣\pi}{٣}$

(٣) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة

ظا٢٢٥° − ٣جا١٢٣٠° + ٢جتا(−٩٦٠°) = $-\frac{٣}{٢}$ (أ) (ب)

قتا $\frac{١٩\pi}{٦}$ − ٢قا $\frac{١٣\pi}{٦}$ + جا$\left(-\frac{٨\pi}{٣}\right)$ − جتا$\left(\frac{١٧\pi}{٦}\right)$ = ٢ (أ) (ب)

ظتا $\frac{١٩\pi}{٤}$ − ٣ظا$\left(-\frac{١١\pi}{٤}\right)$ + جتا$\left(\frac{٢٤\pi}{٣}\right)$ − ٢جا$\left(\frac{٤٥\pi}{٦}\right)$ = ١ (أ) (ب)

قا(−٣١٥°) + ٢قتا٥٨٥° − ٢جتا٨٥٥° = $\sqrt{٢}$ (أ) (ب)

(٤) إن قيمة المقدار قا$(٢\pi - \theta)$ − قتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جاθ هي:

(أ) −١   (ب) صفر

(ج) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

(٥) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

إذا كان جا س = $\sqrt{٣}$ فإن مجموعة الحل = $\varnothing$	(أ)	(ب)
إذا كان جتا س = $\frac{١}{٢}$ فإن س = $\frac{\pi}{٣}$	(أ)	(ب)
ذا كانت س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن جا س = $\frac{١}{٢}$	(أ)	(ب)
مجموعة حل قا س = ٣,٠ هي $\varnothing$	(أ)	(ب)
ظا (١٥ π) = صفر	(أ)	(ب)

التاريخ الهجريّ: .... التاريخ الميلاديّ: ....

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

Relations Between Trigonometric Functions (2)

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$. فأوجد قيمة النسب المثلثية الأخرى للزاوية θ.   حا² θ + جتا² θ = ١

ومنه جتا θ = ٠٫٩٧ ، ظا θ = ٠٫٢٠٦

(٢) إذا كانت ظاθ = $\sqrt{٨}$ ، جتاθ < ٠ . أوجد جاθ، جتاθ.   قا² θ = ١ + ظا² θ

ومنه قا θ = -٣ ، جتا θ = $-\frac{١}{٣}$ ، جا θ = $-\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$

(٣) إذا كانت جتاθ = $\frac{١}{٣}$ ، جاθ < ٠ . أوجد جاθ، ظتاθ..   حا² θ + جتا² θ = ١

ومنه حا θ = $-\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ ، ظتا θ = $-\frac{\sqrt{٢}}{٤}$

في التمارين (٤ – ٧)، أوجد قيمة كلًّا مما يلي:

(٤) (جاθ + جتاθ)² – ٢جاθ جتا θ. = حا² θ + جتا² θ + ٢جا θ جتا θ – ٢جا θ جتا θ = ١

(٥) (ظا² θ + ١)جتا² θ. = قا² θ جتا² θ = (قا θ جتا θ)² = ١² = ١

(٦) ١ + ظا² (–θ) – قا² θ. = قا² θ – قا² θ = ١

(٧) ٩قا² θ – ٥ظا² θ – $\frac{٤}{\text{جتا}^2 θ}$. = ٩قا² θ – ٩ظا² θ = ٩(قا² θ – ظا² θ) = ٩

في التمارين (٨ – ١١)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٨) ١ + ظتا² (–θ) = قتا² θ.

١ + ظتا² (– θ) = ١ + (ظتا – θ)² = ١ + (– ظتا θ)² = ١ + ظتا² θ = قتا² θ

(٩) قا⁴ θ – قا² θ = ظا⁴ θ + ظا² θ.   قا⁴ θ – ظا⁴ θ = (قا² θ + ظا² θ) (قا² θ – ظا² θ)

∴ قا⁴ θ – ظا⁴ θ = قا² θ + ظا² θ ∴ قا⁴ θ – قا² θ = ظا² θ + ظا⁴ θ

(١٠) (١ – جتا² θ)(١ + ظتا² θ) = ١.

الأيمن = جا² θ × قتا² θ = ١ = الأيسر

(١١) ٣ جا$^2\theta$ + ٤ جتا$^2\theta$ = ٣ + جتا$^2\theta$.

الأيسر = ٣ جا$^2\theta$ + ٣ جتا$^2\theta$ + جتا$^2\theta$ = ٣ + جتا$^2\theta$

في التمارين (١٢ – ١٦)، حل المعادلات التالية حيث $\theta \in$ [٠، ٢π) حيث المقام ≠ ٠:

* (١٢) $\dfrac{\text{جا}^3\theta}{\text{جتا}\theta}$ = ظاθ

جا$^3\theta$ − جاθ = ٠ ∴ جاθ (جا$^2\theta$ − ١) = ٠ | إما جاθ = ٠ أو جتا$^2\theta$ = ٠ مرفوض ، $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $\theta = \frac{3\pi}{2}$

* (١٣) $\dfrac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}\theta}$ × قاθ = ظاθ

جاθ (ظاθ − ١) = ٠ | إما جاθ = ٠ ، أو ظاθ = ١ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ، $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، $\theta = \frac{5\pi}{4}$

* (١٤) $\dfrac{\text{قا}\theta}{\text{ظتا}\theta}$ = − قتاθ

ظاθ = − ظتاθ م ح = $\varnothing$

(١٥) ٢ جتا$^2\theta$ + جتاθ − ١ = ٠ حيث جتاθ > ٠

(٢ جتاθ − ١) (جتاθ + ١) = ٠

∴ جتا$\theta = \frac{1}{2}$ ، جتاθ = −١ مرفوض | $\theta = \frac{\pi}{3}$ ، $\theta = -\frac{\pi}{3}$

(١٦) ظتا$^2\theta$ = ١ ظتاθ = ±١ ظاθ = ±١ | $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، $\theta = \frac{5\pi}{4}$ ، $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ، $\theta = -\frac{\pi}{4}$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) إذا كانت جتا$\theta = -\frac{5}{7}$ ، θ تقع في الربع الثالث. فإن جا θ =

(أ) $\dfrac{-7}{2\sqrt{6}}$ (ب) $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$

(ج) $\dfrac{-2\sqrt{6}}{7}$ (د) $\dfrac{7}{2\sqrt{6}}$

(٢) إذا كانت قا$\theta = \frac{3}{2}$ ، تقع في الربع الرابع. فإن ظا θ =

(أ) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (ب) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(جـ) $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$ (د) $\dfrac{-\sqrt{5}}{2}$

في التمارين (٣ – ٨)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

(٣) قتاθ × جتاθ − ظتاθ = ٠ (أ) (ب)

(٤) ظتا² (−θ) − قتا² θ = −١ (أ) (ب)

(٥) (قاθ + ظاθ)(قاθ − ظاθ) = ١ (أ) (ب)

(٦) جاθ قتاθ − جتا² θ − جا² θ = ٠ (أ) (ب)

(٧) $\dfrac{\text{جا}^2\,\theta}{1-\text{جتا}\,\theta}$ − جتاθ = −١ (أ) (ب)

(٨) ظاθ + ظتاθ − قاθ قتاθ = ٠ (أ) (ب)

في التمرينين (٩ – ١٠)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٩) جاθ (ظتاθ + ظاθ) = قاθ

$$\text{جا}\,\theta\left(\frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}+\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}\right)$$

$$=\text{جا}\,\theta\left(\frac{\text{جتا}^2\theta+\text{جا}^2\theta}{\text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta}\right)=\text{جا}\,\theta\times\frac{1}{\text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta}$$

$$=\text{قا}\,\theta$$

(١٠) $\dfrac{\text{جا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta-\text{جتا}\,\theta}=\dfrac{1}{1-\text{ظتا}\,\theta}$

$$\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta-\text{جتا}\,\theta}=\frac{\dfrac{\text{جا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}}{\dfrac{\text{جا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}-\dfrac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}}=\frac{1}{1-\text{ظتا}\,\theta}$$

اختبار الوحدة الثامنة

(١) في أيّ ربع أو على أيّ محور يقع الضلع النهائي لـ θ في الحالات التالية:

(أ) جاθ = $\frac{١}{٣}$. الربع الأول أو الربع الثاني

(ب) قاθ = -١. محور السينات السالب

(جـ) ظاθ = -٣. الثاني أو الرابع

(د) جتاθ = -$\frac{٧}{٨}$. الربع الثاني أو الربع الثالث

(٢) إذا كان ظاθ = ٤ فأوجد:

(أ) قا$^٢\theta$. = ١ + ظا$^٢\theta$ = ١ + ٤^٢ = ١٧

(ب) ظتاθ. = $\frac{١}{٤}$

(جـ) ظتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$. = ظا$\theta$ = ٤

(د) قتا$^٢\theta$. = ١ + ظتا$^٢\theta$ = ١ + $\left(\frac{١}{٤}\right)^٢$ = $\frac{١٧}{١٦}$

(٣) إذا كان جا ٣٨° ≃ ٦٢ ,٠ بدون استخدام الآلة الحاسبة بطريقة مباشرة أوجد قيمة كل من:

(أ) جتا٣٨°. جتا٣٨ = $\sqrt{١ - \text{جا}^٢ ٣٨}$ = $\sqrt{١ - (٠,٦٢)^٢}$ = ٠,٧٨

(ب) جا(-٥٢°). = -جا٥٢ = -جتا٣٨ = -٠,٧٨

(جـ) ظا(١٤٢°) - جتا(٢١٨°) + ظتا(-٣٨°). = -ظا٣٨ + جتا٣٨ - ظتا٣٨

= -$\frac{٠,٦٢}{٠,٧٨}$ + ٠,٧٨ - $\frac{٠,٧٨}{٠,٦٢}$ = -١,٢٧

(٤) أوجد قيمة كل مما يلي:

(أ) قا(-٦٠°) + ظا(٦٠°) - ظتا(٢١٠°) + قتا(٣٠°) = -قا٦٠° + ظا٦٠° - ظتا٣٠° + قتا٣٠°

= -٢ + $\sqrt{٣}$ - $\sqrt{٣}$ + ٢ = صفر

(ب) جتا$\left(\frac{٣\pi}{٢}\right)$ + ٢جا(-π) + جتا(-٨π) + جا$\left(-\frac{٧\pi}{٢}\right)$.

= ٠ + ٢×٠ + ١ + ١ = ٢

(٥) أثبت صحة ما يلي:

(أ) $قا^{2}\theta - 2ظا^{2}\theta + \frac{1}{جتا^{2}(-\theta)} = 2$

$قا^{2}\theta - 2ظا^{2}\theta + \frac{1}{جتا^{2}(-\theta)} = قا^{2}\theta - 2ظا^{2}\theta + قا^{2}\theta$

$= 2قا^{2}\theta - 2ظا^{2}\theta$

$= 2(قا^{2}\theta - ظا^{2}\theta) = 2 \times 1 = 2$

(ب) $جتا\theta + \frac{جا^{2}\theta}{1 + جتا\theta} = 1$

$جتا\theta + \frac{1 - جتا^{2}\theta}{1 + جتا\theta} = جتا\theta + \frac{\cancel{(1 + جتا\theta)}(1 - جتا\theta)}{\cancel{(1 + جتا\theta)}}$

$= جتا\theta + 1 - جتا\theta = 1$

(٦) أثبت صحة المتطابقات التالية:

(أ) $جتا^{4}\theta - جا^{4}\theta = جتا^{2}\theta - جا^{2}\theta$

$جتا^{4}\theta - جا^{4}\theta = (جا^{2}\theta + جتا^{2}\theta)(جتا^{2}\theta - جا^{2}\theta) = 1 \times (جتا^{2}\theta - جا^{2}\theta) =$

$= جتا^{2}\theta - جا^{2}\theta$

(ب) $جتا\theta\,(ظا\theta + ظتا\theta) = قتا\theta$

$جتا\theta \left(\frac{جا^{2}\theta + جتا^{2}\theta}{جا\theta\,جتا\theta}\right) = جتا\theta \times \frac{1}{جا\theta\,جتا\theta} = قتا\theta$

(٧) أوجد مجموعة حل المعادلات المثلثية التالية: جتا س > ٠

(أ) $جتاس = \frac{\sqrt{2}}{2}$

س تقع في الربع الأول أو الربع الرابع

$س = \frac{\pi}{4} + 2ن\pi$ أو $س = -\frac{\pi}{4} + 2ن\pi$ (ن ∈ ص)

(ب) $2جاس - \sqrt{3} = 0$

$جاس = \frac{\sqrt{3}}{2}$ جا س > ٠ س تقع في الربع الأول أو الثاني

$س = \frac{\pi}{3} + 2ن\pi$ أو $س = \pi - \frac{\pi}{3} + 2ن\pi$

$= \frac{2\pi}{3} + 2ن\pi$ (ن ∈ ص)

(ج) $ظاس = 1$

$ظاس = ظا\frac{\pi}{4}$

$س = \frac{\pi}{4} + ن\pi$

تمارين إثرائية

(١) تفكير ناقد: افترض أن θ زاوية في الوضع القياسي، حيث $\text{جتا}\theta = \frac{-١}{٢}$ ، $\text{جا}\theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.
هل من الممكن أن تكون θ = ٦٠° أو θ = −١٢٠°؟

جتا $\theta = -\frac{١}{٢}$ ، θ تقع في الربع الثاني والثالث ∴ θ = −١٢٠°

جا $\theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، θ تقع في الربع الثالث او الرابع

(٢) أوجد قيمة كل مما يلي:

(أ) جا١٣٥° + جتا ٢٢٥° − ٢ ظا(− ٢٢٥°) + ٣جا٣٣٠°.

(ب) ظتا٣٠° + ٢ظا ١٢٠° − ٣ظا٢١٠° + ٣ظتا(− ٣٣٠°).

(جـ) $\text{جتا}\,\frac{١٧\pi}{٣} + \text{جا}\left(-\frac{١٥\pi}{٦}\right) + ٣\,\text{جتا}\left(-\frac{٢٥\pi}{٣}\right)$.

(د) $\text{ظا}\,\frac{٩\pi}{٤} + \text{ظتا}\,\frac{١٧\pi}{٤} + \text{قا}\left(-\frac{٥\pi}{٤}\right) + \text{قتا}\,\frac{١٩\pi}{٤}$.

(٣) أوجد قيمة:

(أ) جا١° + جا٢° + جا٣° + ... + جا٣٥٨° + جا٣٥٩°.

(ب) جتا١° + جتا٢° + جتا٣° + ... + جتا٣٥٨° + جتا٣٥٩°.

(٤) أثبت صحة المتطابقة التالية:

$$\frac{١ - \text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} + \frac{\text{جتا}\theta}{١ - \text{جا}\theta} = ٢\,\text{قا}\theta$$

$$\text{الأيمن} = \frac{(١-\text{جا}\theta)^٢ + \text{جتا}^٢\theta}{\text{جتا}\theta\,(١-\text{جا}\theta)} = \frac{١-٢\text{جا}\theta + \text{جا}^٢\theta + \text{جتا}^٢\theta}{\text{جتا}\theta\,(١-\text{جا}\theta)}$$

$$= \frac{٢\,\cancel{(١-\text{جا}\theta)}}{\text{جتا}\theta\,\cancel{(١-\text{جا}\theta)}} = ٢\,\text{قا}\theta = \text{الأيسر}$$

رقم ② ص ٨٤

(أ) المقدار = جا٤٥ − جتا٤٥ + ٢ ظا٤٥ − ٣ جا٣٠°

= جا٤٥ − جتا٤٥ + ٢ ظا٤٥ − ٣ جا٣٠°

$= \frac{\sqrt{٢}}{٢} - \frac{\sqrt{٢}}{٢} + ٢ \times ١ - ٣ \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

(ب) المقدار = ظتا٣٠ − ٢ ظا٦٠° − ٣ ظا٣٠ + ٣ ظتا٣٠

$= \sqrt{٣} - ٢ \times \sqrt{٣} - ٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٣} + ٣ \times \sqrt{٣} = \sqrt{٣}$

(جـ) جتا$(\frac{-\pi}{٣} + \frac{١٨\pi}{٣})$ + جا$(\frac{-٣\pi}{٦} - \frac{١٢\pi}{٦})$ + ٣ جتا$(\frac{-\pi}{٣} - \frac{٢٤\pi}{٣})$

= جتا$(\frac{-\pi}{٣})$ + جا$(\frac{-٣\pi}{٦})$ + ٣ جتا$(\frac{-\pi}{٣})$

= جتا $\frac{\pi}{٣}$ − جا $\frac{\pi}{٢}$ + ٣ جتا $\frac{\pi}{٣}$

$= \frac{١}{٢} - ١ + ٣ \times \frac{١}{٢} = ١$

(د) ظا$(\frac{\pi}{٤} + ٢\pi)$ + ظتا$(\frac{\pi}{٤} + ٤\pi)$ + قا $\frac{٥\pi}{٤}$ + قتا$(\frac{٣\pi}{٤} + ٤\pi)$

= ظا $\frac{\pi}{٤}$ + ظتا $\frac{\pi}{٤}$ − قا $\frac{\pi}{٤}$ + قتا $\frac{\pi}{٤}$

$= ١ + ١ - \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٢}}{٢} = ٢$

رقم ③ ص ٨٤

(أ) المقدار = جا١° + جا٢° + جا٣° + ... + جا(−٢)° + جا(−١)°

= جا١° + جا٢° + جا٣° + ... − جا٢° − جا١°

= جا١٨٠° = ٠

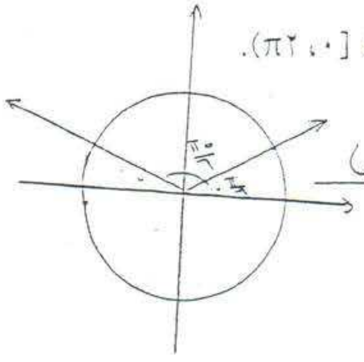
(ب) المقدار = جتا١° + جتا٢° + جتا٣° + ... + جتا٢° + جتا١

= ٢ جتا١° + ٢ جتا٢° + ٢ جتا٣° + ... + ٢ جتا١٧٩° + جتا١٨٠°

= ٢ جتا١° + ٢ جتا٢° + ٢ جتا٣° + ... − ٢ جتا١° + جتا١٨٠°

= جتا١٨٠° = −١

(٥) أوجد مجموعة حل المعادلة المثلثية التالية، ثم مثّلها على دائرة الوحدة، حيث $\theta \in [\,٠ ، ٢\pi[$.



٢جا$^2 \theta$ = ٤ − ٧جا θ.

٢حا$^2\theta$ + ٧حاθ − ٤ = ٠

(٢حاθ − ١)(حاθ + ٤) = ٠

حا θ = $\frac{١}{٢}$ ، حا θ = −٤ مرفوض

$\theta = \frac{\pi}{٦}$ أو $\theta = \frac{٥\pi}{٦}$

في التمرينين (٦−٧)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٦) $\frac{\text{جا}\theta + \text{جتا}\theta}{\text{جتا}\theta} - \frac{\text{جا}\theta - \text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$ = قاθ قتاθ

الأيمن = $\frac{\text{حا}^2\theta + \text{حا}\theta\,\text{حتا}\theta - \text{حا}\theta\,\text{حتا}\theta + \text{حتا}^2\theta}{\text{حتا}\theta\,\text{حا}\theta} = \frac{١}{\text{حتا}\theta\,\text{حا}\theta}$ = قاθ قتاθ

(٧) $\frac{\text{جتا}^2\theta - \text{جا}^2\theta}{١ - \text{ظا}^2\theta}$ = جتا$^2\theta$

الأيمن = $\frac{\text{حتا}^2\theta - \text{حا}^2\theta}{١ - \frac{\text{حا}^2\theta}{\text{حتا}^2\theta}} = \frac{\text{حتا}^2\theta(\text{حتا}^2\theta - \text{حا}^2\theta)}{(\text{حتا}^2\theta - \text{حا}^2\theta)}$ = حتا$^2\theta$

في التمرينين (٨−٩)، حل المعادلات المثلثية التالية:

(٨) ظتا^2 س + ظتا س = ٠

(٩) قا^2 س = ٣ قا س − ٢

حل (٨) ظتا س (ظتا س + ١) = ٠

ظتا س = ٠ أو ظتا س = −١

ظا س = −١

س = $\frac{\pi}{٢}$ + πك

أو س = $\frac{٣\pi}{٢}$

∴ س = $\frac{٣\pi}{٤}$ + ٢πك

أو س = $\frac{-\pi}{٤}$ + πك

حل (٩) قا^2 س − ٣ قا س + ٢ = ٠

(قا س − ١)(قا س − ٢) = ٠

إما قا س = ١ ، حا س = ١ ، س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢πك

أو قا س = ٢ ، حا س = $\frac{١}{٢}$ ، س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢πك

س = $\frac{٥\pi}{٦}$ + ٢πك

٨٥