الوحدة الأولى

النهايات والإتصال

① P. 16

ⓐ $\lim_{x \to -1} f(x) = 1$

ⓑ $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

ⓒ $\lim_{x \to 2} f(x) =$ غير موجودة

ⓓ $\lim_{x \to 3} f(x) = 1$

② P. 17 بفرض أن $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$ ، $\lim_{x \to 2} g(x) = -3$

ⓐ $\lim_{x \to 2} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x)$

$= 7 + (-3) = 4 \neq 0$

ⓑ $\lim_{x \to 2} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to 2} f(x) \cdot \lim_{x \to 2} g(x)$

$= 7 \cdot (-3) = -21$

ⓒ $\lim_{x \to 2} \frac{8 f(x) \cdot g(x)}{f(x) + g(x)} = \frac{8 \lim_{x \to 2} (f(x) \cdot g(x))}{\lim_{x \to 2} (f(x) + g(x))}$

$= \frac{8(-21)}{4} = -42$

③ P. 18 اوجد

① $\lim_{x \to 1} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17) :$

$= (1)^3 + 3(1)^2 - 2(1) - 17 = -15$

② $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} = \frac{(2^2 + 5(2) + 6)}{4}$

$\because \lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4 \neq 0$

$= 5$

P. 19 ④ إذا كانت الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & : x < 2 \\ x - 1 & : x > 2 \end{cases}$$

أوجد $\lim_{x \to 2} f(x)$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 3) = 2^2 - 3 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x - 1) = 2 - 1 = 1$$

$$\because \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) = 1$$

P. 19 ⑤ إذا كانت الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x > 1 \\ \dfrac{x}{x^2 + 1} & : x \leq 1 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن: $\lim_{x \to 1} f(x)$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) : \quad \lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2 \neq 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^3 + x = 1^3 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$\lim_{x \to 1} f(x)$ غير موجودة

$f(x) = x^2 - |x+2|$: f لتكن ⑥ P. 20

ⓐ اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - (x+2) & : x > -2 \\ x^2 + (x+2) & : x \leqslant -2 \end{cases}$$

$-$	-2	$+$
$-(x+2)$		$x+2$

$$= \begin{cases} x^2 - x - 2 & : x > -2 \\ x^2 + x + 2 & : x \leqslant -2 \end{cases}$$

ⓑ $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} (x^2 + x + 2)$

$= (-2)^2 + (-2) + 2 = 4$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} (x^2 - x - 2) = (-2)^2 - (-2) - 2 = 4$

ⓒ $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 4$

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 4$

ⓐ $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x^2 - 5} =$ أوجد ⑦ P. 22

$\lim\limits_{x \to 5} x^2 - 5 = 25 - 5 = 20 > 0$

$\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 5} (x^2 - 5)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

ⓑ $\lim\limits_{x \to 4} (x + \sqrt{x})^4 =$; $4 > 0$

$= \left(\lim\limits_{x \to 4} (x + \sqrt{x})\right)^4$

$= (4 + \sqrt{4})^4 = 6^4 = 1296$

(c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{x - 2}$ $\qquad \lim\limits_{x \to -1} (x-2) = -2-1 = -3 \neq 0$

$$= \frac{\sqrt[3]{\lim\limits_{x \to -1}(x^3 - 4x + 5)}}{\lim\limits_{x \to -1} (x-2)} = \frac{\sqrt[3]{(-1)^3 - 4(-1) + 5}}{-3}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{8}}{-3} = \frac{2}{-3}$$

اوجد إن امكن ⑧ P.23

(a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} =$ $\qquad \frac{0}{0}$ من الشكل

$$= \lim_{x \to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x+1)}{\cancel{(x+2)}(x-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x+1}{x-2} = \frac{-2+1}{-2-2} = \frac{1}{4}$$

(b) $\lim\limits_{x \to -7} \dfrac{(x+4)^2 - 9}{x^2 + 7x} =$ $\qquad \frac{0}{0}$ من الشكل

$$= \lim_{x \to -7} \frac{\cancel{(x+4+3)}(x+4-3)}{x\cancel{(x+7)}} = \lim_{x \to -7} \frac{x+1}{x}$$

$$= \frac{-7+1}{-7} = \frac{6}{7}$$

(c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{|x+2| - 7}{x^2 - 25} =$ $\qquad \frac{0}{0}$ من الشكل

$$\lim_{x \to 5} \frac{\cancel{x+2-7}}{(x+5)\cancel{(x-5)}} = \lim_{x \to 5} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{5+5} = \frac{1}{10}$$

P.25 (9) اوجد إن امكن

من الشكل $\frac{0}{0}$

(a) $$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x} \times \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2+5-9}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{x\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2+5}+3)} \quad ; x \neq 2$$

$$\lim_{x\to 2} x^2+5 = 2^2+5 = 9 > 0$$

$$\lim_{x\to 2} x(\sqrt{x^2+5}+3) = \lim_{x\to 2} x\left(\sqrt{\lim_{x\to 2} x^2+5} + \lim_{x\to 2} 3\right)$$

$$= 2(\sqrt{9}+3) = 12 \neq 0$$

$$= \frac{\lim_{x\to 2} x+2}{\lim_{x\to 2} x(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

⑨ P. 25

(b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{(x+1)(x^2-x+1)}}{\sqrt[3]{(x+1)}}$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^3} \; \sqrt[3]{(x^2-x+1)}}{\sqrt[3]{(x+1)}}$

$= \lim\limits_{x \to -1} \sqrt[3]{(x^2-x+1)} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x \to -1} x^2-x+1}$

$= \sqrt[3]{(-1)^2-(-1)+1} = \sqrt[3]{3}$

(c) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x-9}{3-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 9} \dfrac{(\sqrt{x})^2-(3)^2}{-(\sqrt{x}-3)} =$

$= \lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\cancel{(\sqrt{x}-3)}(\sqrt{x}+3)}{-\cancel{(\sqrt{x}-3)}}$

$= \lim\limits_{x \to 9} \left[-(\sqrt{x}+3)\right]$

$= -\left(\sqrt{\lim\limits_{x \to 9} x} + \lim\limits_{x \to 9} 3\right)$

$= -(\sqrt{9}+3) = -6$

طريقة ثانية

(b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{(x+1)(x^2-x+1)}}{\sqrt[3]{x+1}}$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\cancel{\sqrt[3]{(x+1)}} \; \sqrt[3]{x^2-x+1}}{\cancel{\sqrt[3]{x+1}}} = \lim\limits_{x \to -1} \sqrt[3]{x^2-x+1}$

6 $= \sqrt[3]{\lim\limits_{x \to -1} x^2-x+1} = \sqrt[3]{3}$

⑩ اوجد إن امكن P. 26

ⓐ $$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$$

لا يمكن التعويض عن x بـ 3 لأن نهاية المقام تساوي صفر وكذلك نهاية البسط تساوي صفر « صيغة غير معينة ».

3	1	-2	-4	3
		3	3	-3
	1	1	-1	0

$$= \lim_{x \to 3} (x^2 + x - 1) = (3)^2 + 3 - 1 = 11$$

ⓑ $$\lim_{x \to 2} \frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2}$$

لا يمكن التعويض عن x بـ 2 لأن نهاية المقام تساوي الصفر

وكذلك نهاية البسط تساوي صفر « صيغة غير معينة »

2	-1	0	1	0	1	22
		-2	-4	-6	-12	-22
	-1	-2	-3	-6	-11	0

$$= \lim_{x \to 2} (-x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 6x - 11)$$

$$= -(2)^4 - 2(2)^3 - 3(2)^2 - 6(2) - 11$$

$$= -67$$

نهايات تشمل على ∞ ، $-\infty$

① P. 30 اوجد النهايات التالية إن أمكن

ⓐ $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x(1-\frac{2}{x})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} (1-\frac{2}{x}) = \lim 1 - \lim \frac{2}{x} = 1-0 = 1 \neq 0$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{2}{x}} = 0 \times \frac{1}{1} = 0$$

ⓑ $$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x^2+9} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})}{\cancel{x^2}(1+\frac{9}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{9}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} 1+\frac{9}{x^2} = 1+0 = 1 \neq 0$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 1+\frac{9}{x^2}} = \frac{0+0}{1} = 0$$

ⓒ $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x+1}{x^3+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{\cancel{x^3}(1+\frac{5}{x^3})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{5}{x^3}}$$

$$\lim 1+\frac{5}{x^3} = 1+0 = 1 \neq 0$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\lim 1+\frac{5}{x^3}} = \frac{1-0+0}{1} = 1$$

$P.33$ ② اوجد :

$$\lim_{x \to -1} \frac{3}{|x+1|}$$

$$\frac{3}{|x+1|} = \begin{cases} \frac{3}{x+1} & : x > -1 \\ \frac{-3}{x+1} & : x < -1 \end{cases}$$

$$* \lim_{x \to -1^+} \frac{3}{|x+1|} = \lim_{x \to -1^+} \frac{3}{x+1} = \infty \quad ....(1)$$

$$* \lim_{x \to -1^-} \frac{3}{|x+1|} = \lim_{x \to -1^-} \frac{-3}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} \left(-1 \cdot \frac{3}{x+1}\right)$$

$$= \lim_{x \to -1^-} (-1) \cdot \lim_{x \to -1^-} \frac{3}{x+1} = -1 \times -\infty = \infty \quad ...(2)$$

من (1) و (2)

$$\lim_{x \to -1} \frac{3}{|x+1|} = \infty$$

③ أوجد إن أمكن معادلات الخطوط المقاربة الرأسية والأفقية لمنحنيات الدوال التالية: P.35

ⓐ $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$; $x \neq 3$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim \frac{3}{x}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

∴ المستقيم $y=0$ خط مقارب أفقي

∵ -3 صفر المقام وليس من أصفار البسط

∴ المستقيم $x=-3$ خط مقارب رأسي

ⓑ $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

∴ المستقيم $y=0$ خط مقارب افقي

∵ $x=0$ صفر المقام وليس من أصفار البسط

∴ المستقيم $x=0$ خط مقارب رأسي

ⓒ $f(x) = \frac{2x}{x-3}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{3}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 2}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x}} = \frac{2}{1-0} = 2$$

∴ المستقيم $y=2$ خط مقارب افقي

∵ 3 صفر المقام وليس من أصفار البسط

∴ المستقيم $x=3$ خط مقارب رأسي

* P.35 اوجد إن أمكن معادلات الخطوط المقاربة للمنحنيات :

ⓐ $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$

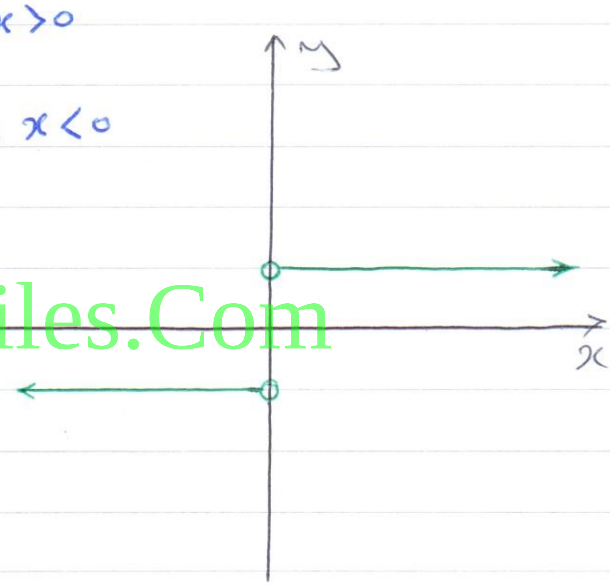
$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+1}{x-2} =$ غير موجوده

∴ لا يوجد محاذي افقي

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

$x=2$ محاذي رأسي

ⓑ $f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1 & : x>0 \\ \dfrac{-x}{x} = -1 & : x<0 \end{cases}$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-1) = -1$

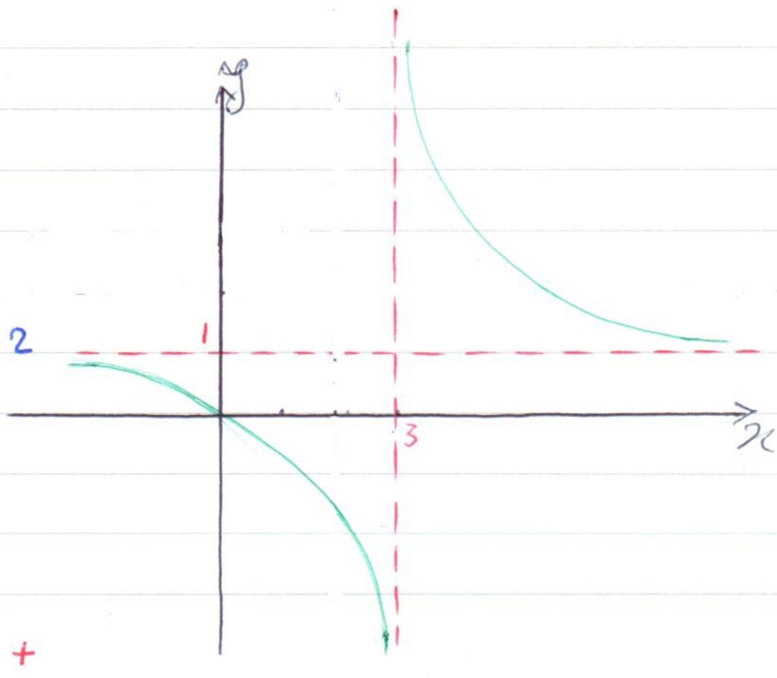
$y=1$ ، $y=-1$ محاذيان افقيان

ولا يوجد محاذي رأسي

ⓒ $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{x-3} = \dfrac{2}{1} = 2$

$y=2$ محاذي أفقي



$x-3=0 \Rightarrow x=3$

$x=3$ محاذي رأسي

10 +

الصيغ غير المعينة

P.37 أوجد

$$\lim_{x\to\infty}(-3x^2+2x-4):$$

$$=\lim_{x\to\infty} 3x^2\left(-1+\frac{2x}{3x^2}-\frac{4}{3x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty} 3x^2 \cdot \lim\left(-1+\frac{2x}{3x^2}-\frac{4}{3x^2}\right)$$

$$=\infty\cdot(-1)=-\infty$$

P.39 ② استخدم النظرية في حساب

ⓐ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+5x+1}{6x^2-x+1}=\frac{-3}{6}=\frac{-1}{2}$$

«درجة البسط = درجة المقام»

ⓑ $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{4x^3-2x+3}=\text{صفر}$$

«درجة البسط أصغر من درجة المقام»

P. ③ أوجد قيمة a, b إذا كانت

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{ax^2+bx-3}=-1$$

∵ النهاية تساوي -1 ∴ درجة الحدودية في البسط يجب أن تكون

مساوية لدرجة الحدودية في المقام أي:

$$ax^2=0 \Rightarrow a=0$$

وكذلك

$$\frac{1}{b}=-1 \Rightarrow b=-1$$

ادجد P. 41

ⓐ $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2(2-\frac{1}{x})}}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{x(1+\frac{1}{x})}$$

$|x| = x \;:\; x > 0$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to\infty} 2-\frac{1}{x} = 2-0=2>0$$

$$\lim_{x\to 0} 1+\frac{1}{x} = 1+0=1 \neq 0$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty}(2-\frac{1}{x})}}{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

ⓑ $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x(3-\frac{5}{x})}{\sqrt{x^2(1-\frac{9}{x^2})}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(3-\frac{5}{x})}{|x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

$|x| = -x \;:\; x<0$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}(3-\frac{5}{x})}{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} 3-\frac{5}{x} = 3-0=3$$

$$\lim_{x\to-\infty} 1-\frac{}{x^2} = 1-0 = 1>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lim \sqrt{1-\frac{9}{x^2}} = -\sqrt{\lim 1-\frac{9}{x^2}} = -\sqrt{1} = -1 \neq 0$$

$$= \frac{\lim_{x\to-\infty}(3-\frac{5}{x})}{\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}\right)} = \frac{3}{-1} = -3$$

نهايات بعض الدوال المثلثية

اوجد النهايات P. 43

① $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x^2 - x} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x(2x-1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{2x-1}$$

$$= 1 \times \frac{1}{2(0)-1} = 1 \times -1 = -1$$

② $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\lim_{x \to 0} 1}{\lim_{x \to 0} \cos x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

③ $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1} \times \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x (\cos x + 1)}{\cos^2 x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x (\cos x + 1)}{-\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \cancel{\sin} x}{-\sin^{\cancel{2}} x} \cdot \lim_{x \to 0} (\cos x + 1)$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \left(\lim_{x \to 0} \cos x + \lim_{x \to 0} 1\right)$$

$$= -1(1+1) = -2$$

اوجد : ② P. 44

ⓐ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2\tan x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{\sin x}}{2} \cdot \dfrac{\cos x}{\cancel{\sin x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{2} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0} \cos x}{\lim\limits_{x\to 0} 2} = \dfrac{1}{2}$

ⓑ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\tan x + x^2 \cos x}{5x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\tan x}{5x} + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^2}\cos x}{5\cancel{x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin x}{5x\cos x} + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x}{5}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{5} \cos x$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{5} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{5} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \cos x$

$= \dfrac{3}{5} \times 1 \times 1 + \dfrac{0}{5} \times 1$

$= \dfrac{3}{5}$

أوجد ③ P.45

ⓐ $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x - x^2}{3x^2}$

$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x \sin x}{3x^2} - \frac{x^2}{3x^2} \right.$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} \frac{\sin x}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3} \times 1 - \frac{1}{3} = 0$

ⓑ $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x + 3x \cos 4x}{5x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{5x} + \lim_{x \to 0} \frac{3}{5} \cos 4x$

$= \frac{2}{5} + \lim_{x \to 0} \frac{3}{5} \cos 4x$

$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \lim_{x \to 0} \cos 4x$

$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times 1$

$= 1$

نظرية الإحاطة

أوجد ④ P. 46

ⓐ $\lim_{x \to 0} x^2 \cos \frac{1}{x^2}$

$$-1 \leq \cos \frac{1}{x^2} \leq 1$$

بالضرب بـ x^2:

$$-x^2 \leq x^2 \cos \frac{1}{x^2} \leq x^2$$

$\because \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$ ، $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

ومن نظرية الإحاطة:

$\therefore \lim_{x \to 0} x^2 \cos \frac{1}{x^2} = 0$

ⓑ $\lim_{x \to 0} \left(2 + x^2 \sin \frac{1}{2x}\right)$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{2x} \leq 1$$

بالضرب بـ x^2:

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{2x} \leq x^2$$

بإضافة 2:

$$2 - x^2 \leq 2 + x^2 \sin \frac{1}{2x} \leq 2 + x^2$$

$\because \lim_{x \to 0} (2 - x^2) = 2 - 0 = 2$ ، $\lim_{x \to 0} (2 + x^2) = 2$

ومن نظرية الإحاطة:

$\therefore \lim_{x \to 0} \left(2 + x^2 \sin \frac{1}{2x}\right) = 2$

أوجد ⑤ P. 47

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x+1}$$

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

$$\forall x > 0 \Rightarrow x+1 > 0$$

$$\frac{-1}{x+1} \leqslant \frac{\cos x}{x+1} \leqslant \frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x+1} = 0 \ ، \ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

ومن نظرية الإحاطة

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0$$