الملف نموذج الإجابة المعتمد من التوجيه الفني

دولة الكويت
وزارة التربية
التوجيه الفني العام للرياضيات

المجال الدراسي : الرياضيات
الزمن : ساعتان و45 دقيقة
عدد الصفحات : 11

نموذج اجابة امتحان الفترة الدراسية الأولى للصف الثاني عشر علمي
للعام الدراسي : 2022/2021 م

القسم الأول – أسئلة المقال
تراعى الحلول الأخرى في جميع أسئلة المقال

السؤال الأول : (15 درجة)

(a) أوجد $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$ **(8 درجات)**

الحل :

عند التعويض المباشر عن x بـ 2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

1 $$\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}=\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}\times\frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1}$$

1 $$=\frac{2x-3-1}{(x-2)\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}$$

$\frac{1}{2}$ $$=\frac{2(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}$$

$\frac{1}{2}$ $$=\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}\quad,\qquad x\neq2$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $$\lim_{x\to2}(2x-3)=1\ ,\qquad 1>0$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $$\lim_{x\to2}\left(\sqrt{2x-3}+1\right)=\lim_{x\to2}\sqrt{2x-3}+\lim_{x\to2}1$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $$=\sqrt{\lim_{x\to2}(2x-3)}+1=1+1=2\ ,\qquad 2\neq0$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $$=\frac{\lim\limits_{x\to2}2}{\lim\limits_{x\to2}\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}=\frac{2}{2}=1$$

تابع السؤال الأول:

(b) أوجد معادلة المماس عند النقطة $\left(1,\frac{2}{3}\right)$ لمنحنى الدالة f

حيث $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+2}$ **(7 درجات)**

الحل :

نوجد f' عند $x=1$

$$f'(x)=\frac{(x^2+2)(x^3+1)'-(x^3+1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x^2+2)(3x^2)-(x^3+1)(2x)}{(x^2+2)^2}$$ 3

ومنه الميل : $$f'(1)=\frac{(1^2+2)(3(1)^2)-(1^3+1)\big(2(1)\big)}{(1^2+2)^2}=\frac{5}{9}$$ $1+1$

معادلة المماس :

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$ 1

$$y-\frac{2}{3}=\frac{5}{9}(x-1)$$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$$y=\frac{5}{9}x-\frac{5}{9}+\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{5}{9}x+\frac{1}{9}$$

وزارة التربية
كنترول الثانوية العامة
التواجيه الفنية للمواد الدراسية

السؤال الثاني : (15 درجة)

(a) ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث :

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : x\le -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : x>-1 \end{cases}$$

(8 درجات)

الحل :

مجال الدالة f: $D_f=(-\infty,-1]\cup(-1,\infty)=\mathbb{R}$ $\frac{1}{2}$

ندرس اتصال الدالة f على مجالها :

نفرض : $g(x)=x+3$ $\frac{1}{2}$

g دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ $\frac{1}{2}$

$\because f(x)=g(x) \quad \forall\, x\in(-\infty\,,-1]$

$\therefore$ f متصلة على $(-\infty\,,-1]$ .... (1) 1

نفرض $h(x)=\dfrac{4}{x+3}$

h دالة حدودية نسبية متصلة لكل $x\in\mathbb{R}-\{-3\}$ $\frac{1}{2}$

$\because f(x)=h(x) \quad \forall\, x\in(-1\,,\infty)$ $\frac{1}{2}$

$\therefore$ f متصلة على $(-1\,,\infty)$ .... (2) 1

ندرس اتصال الدالة f عند $x=-1$ من جهة اليمين

$f(-1)=2$ $\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{4}{x+3}=2$ حيث نهاية المقام $\neq 0$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$\because f(-1)=\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ 1

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=-1$ من جهة اليمين .... (3) $\frac{1}{2}$

من $(1),(2),(3)$

$\therefore$ الدالة f متصلة على الفترة $(-\infty\,,\infty)$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ $\frac{1}{2}$

تابع السؤال الثاني :

(b) لتكن : $g(x) = x^2 + 1$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x} \quad (x \neq 0)$

أوجد **1)** باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$

2) $(f \circ g)'(1)$ **(7 درجات)**

الحل:

$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$	$\frac{1}{2}$
$f'(x) = \dfrac{2x - (2x+1)}{x^2} = \dfrac{-1}{x^2} \quad , \quad g'(x) = 2x$	$1 + 1$
$f'\big(g(x)\big) = f'(x^2+1) = \dfrac{-1}{(x^2+1)^2}$	1
$\therefore (f \circ g)'(x) = \dfrac{-1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x$	1
$= \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$	1
$(f \circ g)'(1) = = \dfrac{-2(1)}{((1)^2+1)^2} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$	$1 + \frac{1}{2}$

السؤال الثالث : (15 درجة)

(a) أوجد $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos x}$

(7 درجات)

الحل :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)$$ 1

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}\right)$$ 1

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x}\right)$$ $\frac{1}{2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)\cdot(1+\cos x)\right)$$ $\frac{1}{2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)\right)$$ $\frac{1}{2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$ $\frac{1}{2}$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\left(\lim_{x\to 0}(1)+\lim_{x\to 0}\cos x\right)$$ $1\frac{1}{2}$

$$=(1)^2\times(1+1)$$ 1

$$=1\times 2=2$$ $\frac{1}{2}$

تابع السؤال الثالث :

(b) للمنحنى الذي معادلته $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$

أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1\,,1)$

(8 درجات)

الحل :

$$2x - 2\,y\,y' + y + x\,y' - 0 = 0$$ 3

$$-2\,y\,y' + x\,y' = -2x - y$$ 1

$$y'(-2\,y + x) = -2x - y$$ 1

$$y' = \frac{-2x - y}{x - 2\,y}$$ 1

بالتعويض بـ $(1,1)$

$$y' = \frac{-2(1) - (1)}{(1) - 2\,(1)} = \frac{-3}{-1} = 3$$ $1 + 1$

$\therefore$ميل المماس = 3

وزارة التربية كنترول الثانوية العامة
التواجيه الفنية للمواد الدراسية

وزارة التربية التوجيه الفني العام للرياضيات

السؤال الرابع : (15 درجة)

(a) لتكن f :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & : x > 3 \\ 7 & : x \leq 3 \end{cases}$$

(6 درجات)

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 3$

الحل :

$f(3) = 7$ $\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^-} 7 = 7$ 1

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ $\frac{1}{2}$

$= \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x - 3}$ $\frac{1}{2}$

$= \lim\limits_{x\to3^+} (x+3) = 3 + 3 = 6$ $\frac{1}{2}$

$\because \lim\limits_{x\to3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to3^+} f(x)$ 1

$\therefore \lim\limits_{x\to3} f(x)$ ليست موجودة 1

$\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x = 3$ 1

تابع السؤال الرابع:

(b) لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 12x - 5$

أوجد كلا مما يلي :

(9 درجات)

(1) النقاط الحرجة للدالة

(2) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها

(3) القيم القصوى المحلية

الحل :

(1) $\because$ f دالة كثيرة حدود

$\therefore$ f متصلة و قابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{2}$

نوجد النقاط الحرجة : $f'(x) = 3x^2 - 12$ $\frac{1}{2}$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow 3(x-2)(x+2) = 0$ $\frac{1}{2}$

$x = 2 \quad , x = -2$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$\therefore$ النقاط الحرجة هي :

$(-2, f(-2)) = (-2, 11)$ $\frac{1}{2}$

$(2, f(2)) = (2, -21)$ $\frac{1}{2}$

(2) نكون الجدول لدراسة إشارة f'

$-\infty \qquad -2 \qquad 2 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2,2)$	$(2, \infty)$	$\frac{1}{2}$
إشارة f'	$+++$	$---$	$+++$	1
سلوك الدالة f	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗	$\frac{1}{2}$

الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty, -2)$ ، الفترة $(2, \infty)$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

و متناقصة على الفترة $(-2,2)$ $\frac{1}{2}$

(3) توجد قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ و هي $f(-2) = 11$ 1

توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ و هي $f(2) = -21$ 1

القسم الثاني: البنود الموضوعية

أولا: في البنود من (1) إلى (3) عبارات ظلل في ورقة الاجابة ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة
ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-7}{\sqrt{4x^2-8x+5}} = \dfrac{3}{2}$

(2) **الدالة** f **:** $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{3x-1}}{x^2}$ **متصلة عند** $x = 3$

(3) **أصغر محيط ممكن لمستطيل مساحته** $16\ cm^2$ **هو** $16\ cm$

وزارة التربية
كنترول الثانوية العامة
التواجيه الفنية للمواد الدراسية

ثانيا : في البنود من (4) إلى (10) لكل بند أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ظلل في ورقة الإجابة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة .

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+3}$ **يساوي :**

ⓐ ∞ ⓑ $-\infty$ ⓒ $\mathbf{1}$ ⓓ $\mathbf{0}$

(5) **لتكن الدالة** f **:** $f(x) = \sqrt{x^2+7}$ **،** g **:** $g(x) = x^2 - 3$ **فإن** $(f \circ g)(0)$ **يساوي**

ⓐ -1 ⓑ -4

ⓒ 1 ⓓ 4

(6) **الدالة** f **:** $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ **متصلة على :**

ⓐ $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ ⓑ $(5, \infty)$ ⓒ R ⓓ $(-5, 5)$

(7) إذا كانت الدالة $y = \frac{1}{x} + 5\,sinx$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي :

ⓐ $-\frac{1}{x^2} - 5\,cosx$

ⓑ $\frac{1}{x^2} + 5\,cosx$

ⓒ $-\frac{1}{x^2} + 5\,cosx$

ⓓ $\frac{1}{x^2} - 5\,cosx$

(8) إذا كانت f' : $f'(x) = -x^2$ ، فإن الدالة f :

ⓐ متزايدة على مجال تعريفها

ⓑ متناقصة على مجال تعريفها

ⓒ متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$ فقط

ⓓ متناقصة على الفترة $(0, \infty)$ فقط

(9) عدد النقاط الحرجة للدالة : $y = 3x^3 - 9x - 4$ على الفترة $(0, 2)$ هو

ⓐ 3

ⓑ 0

ⓒ 1

ⓓ 2

(10) إذا كانت f دالة كثيرة حدود ، : $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لها فإن:

ⓐ $f''(c) = 0$

ⓑ $f'(c) = 0$

ⓒ $f(c) = 0$

ⓓ $f''(c)$ غير موجودة

انتهت الأسئلة

إجابة البنود الموضوعية

السؤال	الاجابـــــــة			
(1)			[✓ ⓑ]	ⓐ
(2)			ⓑ	[✓ ⓐ]
(3)			ⓑ	[✓ ⓐ]
(4)	ⓓ	[✓ ⓒ]	ⓑ	ⓐ
(5)	[✓ ⓓ]	ⓒ	ⓑ	ⓐ
(6)	ⓓ	ⓒ	[✓ ⓑ]	ⓐ
(7)	ⓓ	[✓ ⓒ]	ⓑ	ⓐ
(8)	ⓓ	ⓒ	[✓ ⓑ]	ⓐ
(9)	ⓓ	[✓ ⓒ]	ⓑ	ⓐ
(10)	ⓓ	ⓒ	ⓑ	[✓ ⓐ]

لكل بند درجة واحدة فقط

10