علي جابر

الملف مراجعة توقعات العبقري مرفقة بالحل
موقع المناهج ⇦ المناهج الكويتية ⇦ الصف الحادي عشر العلمي ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني

وزارة التربية
MINISTRY OF EDUCATION

الرياضيات والاحصاء

الصف الحادي عشر علمي الثانوي

الفصل الدراسي الثاني

العام الدراسي 2023 - 2024

إعداد الاستاذ / علي جابر

توقعات العبقري في الرياضيات 11 علمي الاجابة

https://t.me/geniusmathmatic

السؤال الثاني : (15 درجة)

(a) حوّل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية (r, θ): (7 درجات)

$$L\left(1, -\sqrt{3}\right), 0 \le \theta < 2\pi$$

1 + 1	$r = \sqrt{(1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$
	نفرض أن α زاوية الاسناد
1 + 1	$\therefore \tan\alpha = \left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert = \left\lvert\frac{-\sqrt{3}}{1}\right\rvert = \sqrt{3}$
$\frac{1}{2}$	$\alpha = \tan^{-1}\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}$	$\alpha = \frac{\pi}{3}$
	$\because x > 0, y < 0$
$\frac{1}{2}$	$\therefore L$ تنتمي إلى الربع الرابع
1	$\therefore \theta = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\therefore$ الاحداثيات القطبية هي $L\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$

نموذج اجابة امتحان الفترة الدراسية الثانية للصف الحادي عشر علمي للعام الدراسي : 2023/2022 م

القسم الأول – أسئلة المقال
تراعى الحلول الأخرى في جميع أسئلة المقال

السؤال الأول : (15 درجة)

(a) (10 درجات)

(1) اكتب العدد المركب $\frac{-5+i}{2-3i}$ في الصورة الجبرية

الحل:

1 $$\frac{-5+i}{2-3i}=\frac{-5+i}{2-3i}\times\frac{2+3i}{2+3i}$$

2 $$=\frac{-10-15i+2i+3i^2}{2^2+3^2}$$

1 $$=\frac{-13-13i}{4+9}=-1-i$$

2022-2021 دور ثان
2022-2023

(2) ضع العدد : $z=-1-i$ في الصورة المثلثية

1 $$\because\ x=-1\ ,y=-1$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $$\therefore r=|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

بفرض α زاوية الاسناد : $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $$\therefore \tan\alpha=\left|\frac{-1}{-1}\right|=1\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{\pi}{4}$$

θ تقع في الربع الثالث $\frac{1}{2}$ $$\because\ x<0\ ,y<0$$

1 $$\theta=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$$

الصورة المثلثية هي : 1 $$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

(a) (10 درجات)

2022-2023

1) أكتب العدد $\frac{2}{3-i}$ في الصورة الجبرية

الحل:

$\frac{2}{3-i}=\frac{2}{3-i}\times\frac{3+i}{3+i}$	1
$=\frac{6+2i}{9+1}$	2
$=\frac{6}{10}+\frac{2}{10}i$	1
$=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$	1

الكنترول العلمي
وزارة التربية
CONTROL

العبقري -٨-

سلسلة

(a) أوجد ناتج : $\overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)}$ في الصورة الجبرية (6 درجات)

الحل:

$\overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)}=\frac{\overline{5+i}}{\overline{2-3i}}=\frac{5-i}{2+3i}$	1
$=\frac{5-i}{2+3i}\times\frac{2-3i}{2-3i}$	1
$=\frac{10-15i-2i+3i^2}{2^2+3^2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$=\frac{10-15i-2i-3}{13}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$=\frac{(10-3)-(15+2)i}{13}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$=\frac{7-17i}{13}$	$\frac{1}{2}$
$=\frac{7}{13}-\frac{17}{13}i$	$\frac{1}{2}$

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i\overline{z} = 5 - 2i$ في C.

لتكن $z = x + yi$ حيث x, y عددان حقيقيان.

$2z + i\overline{z} = 5 - 2i$

$2(x+yi) + i(\overline{x+yi}) = 5 - 2i$ عوّض عن z بـ $x + yi$

$2(x+yi) + i(x-yi) = 5 - 2i$ مرافق $x + yi$ هو $x - yi$

$2x + 2yi + xi - y(i)^2 = 5 - 2i$

$2x + 2yi + xi + y = 5 - 2i$ $i^2 = -1$

$2x + y + (x + 2y)i = 5 - 2i$ تجميع الأعداد الحقيقية معًا والأعداد التخيلية معًا

$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$ خاصية تساوي عددين مركبين

بحل المعادلتين نحصل على:

$\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$

مجموعة الحل: $= \{4 - 3i\}$.

اوجد مجموعة حل المعادلة : $z + i = 2\overline{z} + 1$ في C

$z = x + yi$ و $\overline{z} = x - yi$

$x + yi + i = 2(x - yi) + 1$

$x + yi + i = 2x - 2yi + 1$

$x + yi - 2x + 2yi = 1 - i$

$-x + 3yi = 1 - i$

$-x = 1 \implies x = -1$

$3y = -1 \implies y = -\frac{1}{3}$

الحل مجموعة $= \left\{-1 - \frac{1}{3}i\right\}$

(a) (1) أوجد مجموعة حل المعادلة : $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في C (5 درجات)

الحل : نحسب المميز Δ :

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\frac{1}{2}$
$\Delta = (16)^2 - 4(4)(25)$	
$= -144$	$\frac{1}{2}$
$= (-1) \times (12)^2$	
$= i^2 \times (12)^2$	$\frac{1}{2}$
$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 - 12i}{2 \times 4} = -2 - \frac{3}{2}i$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 + 12i}{2 \times 4} = -2 + \frac{3}{2}i$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
مجموعة الحل = $\{-2 - \frac{3}{2}i, -2 + \frac{3}{2}i\}$	$\frac{1}{2}$

2022-2023

2) أوجد مجموعة حل المعادلة : $z^2 - 2z + 4 = 0$ في C

<u>الحل :</u>

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\frac{1}{2}$
$\Delta = 4 - 4(1)(4) = -12$	$\frac{1}{2}$
$= 12 \times i^2$	$\frac{1}{2}$
$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{2 \times 1} = 1 + \sqrt{3}\,i$	$1\frac{1}{2}$
$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{2 \times 1} = 1 - \sqrt{3}\,i$	$1\frac{1}{2}$
مجموعة الحل = $\{1 + \sqrt{3}\,i\ ,\ 1 - \sqrt{3}\,i\}$	$\frac{1}{2}$

(b) إذا كان : $z_1 = -2+2i$ ، $z_2 = 1-i$ (9 درجات)

(1) ضع z_1 في الصورة المثلثية

(2) حل المعادلة : $2z + \overline{z_1} = 3i\,(z_2)^2$

الحل :

(1) $z_1 = -2+2i$

$x = -2$ ، $y = 2$

1 $r = |z_1| = \sqrt{(-2)^2+(2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

نفرض أن α زاوية الإسناد

1 $\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = |-1| = 1$

$\frac{1}{2}$ $\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$

$x<0$ ، $y>0$

$\frac{1}{2}$ $\therefore$ θ تقع في الربع الثاني

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

1 الصورة المثلثية هي : $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

(2) $2z + \overline{z_1} = 3i\,(z_2)^2$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $2z + (\overline{-2+2i}) = 3i\,(1-i)^2$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $2z + -2-2i = 3i\,(1-2i-1)$

$2z + -2-2i = 3i\,(-2i)$

$\frac{1}{2}$ $2z + -2-2i = -6i^2$

$\frac{1}{2}$ $2z + -2-2i = 6$

$\frac{1}{2}$ $2z = 6+2+2i = 8+2i$

$\frac{1}{2}$ $z = 4+i$

(a) إذا كان : $z_1 = 5-4i$ ، $z_2 = 3+i$ فاوجد : (3 درجات)

$z_2 . z_1$ (1) $(\overline{z_2+z_1})$ (2) $(z_2)^{-1}$ (3)

$\frac{1}{2}$ (1) $z_2 . z_1 = (3+i)(5-4i)$
$= 15 - 12i + 5i + 4$
$\frac{1}{2}$ $= 19 - 7i$
$\frac{1}{2}$ (2) $z_2 + z_1 = 8 - 3i$
$\frac{1}{2}$ $(\overline{z_2+z_1}) = 8 + 3i$
$\frac{1}{2}$ (3) $z_2^{-1} = \frac{1}{3+i} \times \frac{3-i}{3-i}$
$\frac{1}{2}$ $= \frac{3-i}{9+1} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$

(a) إذا كان : $z_2 = 3-4i$, $z_1 = 1+i$

(1) أوجد $2z_1 - \bar{z}_2$

الحل

(1) $2z_1 - \bar{z}_2 = 2(1+i) - \overline{(3-4i)}$ $\boxed{\frac{1}{2}}$
$= 2 + 2i - (3+4i)$ $\boxed{1}$ $\boxed{\frac{1}{2}}$
$= 2 + 2i - 3 - 4i$
$= -1 - 2i$ $\boxed{1}$

(a) إذا كان : $z_1 = 3 + 4i \ , \quad z_2 = 5 - 2i$ (9 درجات)

فأوجد كلا مما يلي في الصورة الجبرية:

1) $\overline{3z_1 - 2\,z_2}$

الدرجة	الحل
1	$\overline{3z_1 - 2z_2} = \overline{3(3+4i) - 2(5-2i)}$
1	$= \overline{9 + 12i - 10 + 4i}$
1	$= \overline{-1 + 16i}$
1	$= -1 - 16i$

2) $\dfrac{z_2}{z_1}$

الدرجة	الحل
1	$\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{5-2i}{3+4i} \times \dfrac{3-4i}{3-4i}$
1 + 1	$= \dfrac{15 - 20i - 6i - 8}{3^2 + 4^2}$
1	$= \dfrac{7 - 26i}{25}$
1	$= \dfrac{7}{25} - \dfrac{26}{25}i$

القسم الأول – أسئلة المقال

تراعى الحلول الأخرى في جميع أسئلة المقال

السؤال الأول : (15 درجة)

(a) إذا كان $z_1 = 3 + 4i \;,\; z_2 = 5 - 2i$ فأوجد :

(1) $2z_1$

(2) $\overline{z_1 + z_2}$

(3) $\dfrac{z_1}{z_2}$

(9 درجات)

(1) $2z_1 = 2(3 + 4i)$

1+1 $\quad = 6 + 8i$

(2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(3 + 4i) + (5 - 2i)}$

1+1 $\quad = \overline{8 + 2i}$

1 $\quad = 8 - 2i$

1 (3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3 + 4i}{5 - 2i} \times \dfrac{5 + 2i}{5 + 2i}$

1 $\quad = \dfrac{(3 + 4i)(5 + 2i)}{(5 - 2i)(5 + 2i)}$

1 $\quad = \dfrac{(15 + 6i) + (20i - 8)}{25 + 4}$

1 $\quad = \dfrac{7 + 26i}{29} = \dfrac{7}{29} + \dfrac{26}{29}i$

(a) اكتب العدد $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ في الصورة الجبرية (9 درجات)

ثم حوله للصورة المثلثية مستخدما السعة الأساسية

الحل :

1	$\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\times\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$=\dfrac{2-2\sqrt{3}i}{3+1}$
$\frac{1}{2}$	$=\dfrac{2-2\sqrt{3}i}{4}$
1	$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
$\frac{1}{2}$	$x=\dfrac{1}{2}\quad ,y=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$
1	$r=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{1}=1$
1	نفرض أن α زاوية الاسناد $\tan\alpha=\left\lvert\dfrac{y}{x}\right\rvert=\left\lvert\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right\rvert=\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}$	$\therefore\ \alpha=\dfrac{\pi}{3}$
$\frac{1}{2}$	θ تقع في الربع الرابع $x>0\quad ,y<0$
1	$\theta=2\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{3}$

(a) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z = -3 - 4i$ (9 درجات)

ليكن $w = m + ni$ جذرا تربيعيا للعدد z ، فيكون $w^2 = z$

بالتعويض $(m+ni)^2 = -3-4i$ $\frac{1}{2}$

خاصية ضرب كثيرات الحدود $m^2 - n^2 + 2mni = -3 - 4i$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

خاصية المساواة لعددين مركبين

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 & ----\to (1) \\ 2mn = -4 & ----\to (2) \end{cases}$$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

نضيف المعادلة: $|w|^2 = |z|$ $\frac{1}{2}$

$$\left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}\right)$$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$$m^2 + n^2 = 5 \quad ----\to (3)$$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

بجمع المعادلتين (3) , (1) نحصل على:

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 \\ m^2 + n^2 = 5 \end{cases}$$

$$2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

بالتعويض في (1) نحصل على: $\therefore\ n^2 = 4 \Rightarrow n = \pm 2$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} m = 1 \ , \ m = -1 \\ n = 2 \ , \ n = -2 \end{cases}$$

من المعادلة $2mn = -4$ نستنتج أن m , n لهما إشارتان مختلفتان $\frac{1}{2}$

$\therefore\ m = 1 \ , \ n = -2$ أو $m = -1 \ , \ n = 2$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $Z = -3 - 4i$

هما: $w_1 = 1 - 2i \ , \ w_2 = -1 + 2i$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

(b) أوجد السعة و الدورة للدالة : $y = -3\cos(2x) \quad , -\pi \leq x \leq \pi$

ثم ارسم بيانها

(5 درجات)

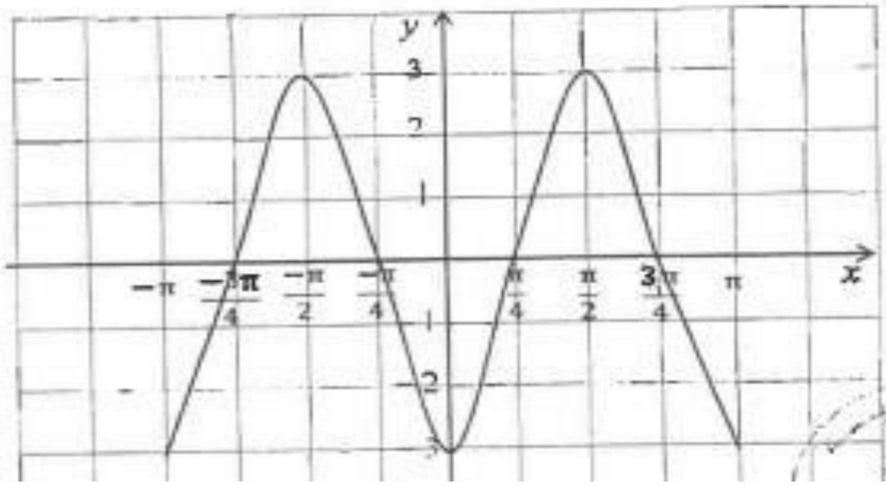
1 السعة : $|a| = |-3| = 3$

1 الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

ربع الدورة $= \frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(2x)$	1	0	-1	0	1
$y = -3\cos(2x)$	-3	0	3	0	-3

الرسم
كل دورة
$1\frac{1}{2}$



تابع السؤال الأول :

(b) أوجد السعة و الدورة للدالة التالية ثم ارسم بيانها:

$$y = -4\sin x \quad , x \in [-\pi, 2\pi]$$

(6 درجات)

الحل :

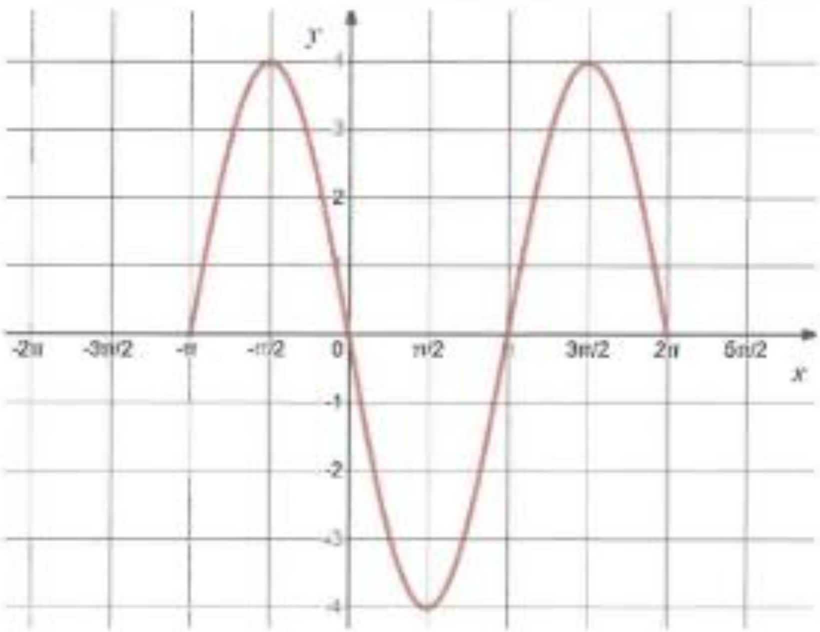
$y = -4\sin x$ هي دالة دورية .

السعة : $|a| = |-4| = 4$ 1

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$ 1

ربع الدورة $= \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$-4\sin x$	0	-4	0	4	0



المحاور 1

التوصيل 1

النقاط 2

تابع السؤال الأول :

(b) أوجد السعة و الدورة للدالة التالية ثم ارسم بيانها

$$y = 2sin\left(\frac{1}{2}x\right) \quad , -4\pi \le x \le 4\pi$$

(5 درجات)

$y = 2sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ هي دالة دورية

$\frac{1}{2}$ السعة : $|a| = |2| = 2$

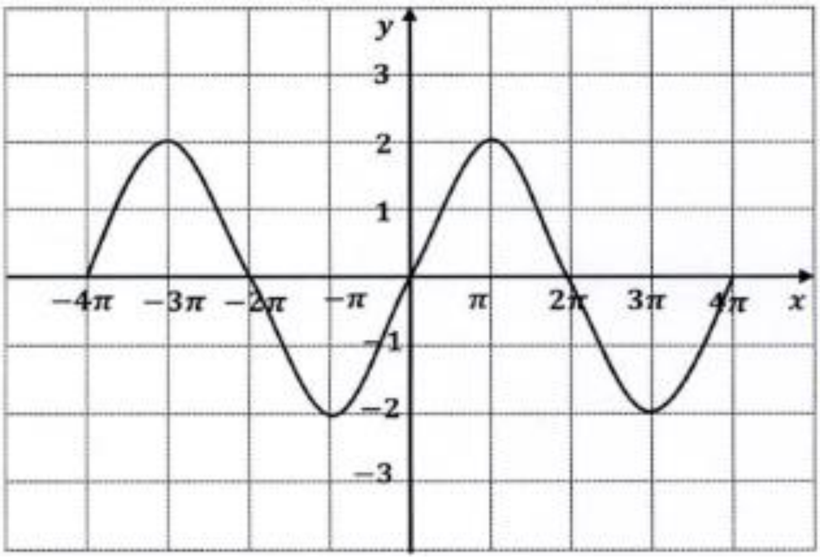
$\frac{1}{2}$ الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$

$\frac{1}{2}$ ربع الدورة : π

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{1}{2}x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$sin\left(\frac{1}{2}x\right)$	0	1	0	-1	0
$y = 2sin\left(\frac{1}{2}x\right)$	0	2	0	-2	0

$\frac{1}{2}$

3



تابع السؤال الأول :

(b) أوجد السعة و الدورة للدالة : $y = -3sinx \quad ,x \in [-\pi, 2\pi]$ ثم ارسم بيانها

(5 درجات)

الحل :

$y = -3sinx$ هي دالة دورية

$\frac{1}{2}$ السعة : $|a| = |-3| = 3$

$\frac{1}{2}$ الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

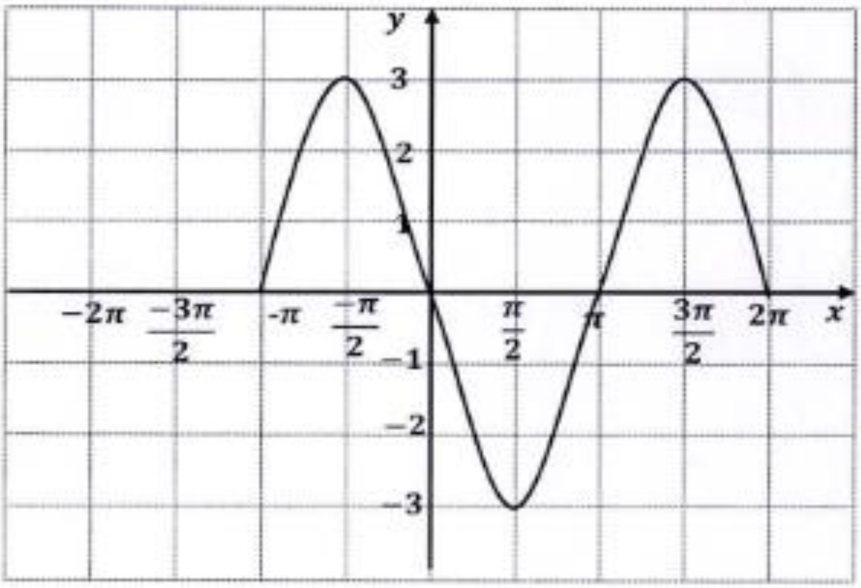
ربع الدورة : $\frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$sin\ x$	0	1	0	-1	0
$y = -3sinx$	0	-3	0	3	0

$\frac{1}{2}$

3



السؤال الثانى : (15 درجة)

(a) حل المثلث ABC حيث : $a = 12\ ,\ b = 21\ ,\ m(\hat{c}) = 95^\circ$

(7 درجات)

الحل:

$\frac{1}{2}$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\hat{c})$

1 $= 12^2 + 21^2 - 2 \times 12 \times 21 \times \cos(95^\circ)$

$\frac{1}{2}$ $= 144 + 441 - 504\cos(95^\circ) \approx 628.926$

$\frac{1}{2}$ $c \approx 25.08\ cm$

$\frac{1}{2}$ $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$

1 $= \dfrac{(21)^2 + (25.08)^2 - (12)^2}{2 \times 21 \times 25.08}$

$\frac{1}{2}$ $\cos\alpha \approx 0.879$

$\frac{1}{2}$ $\alpha \approx 28.47^\circ$

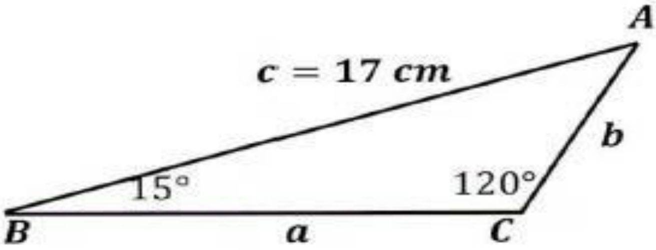
$\frac{1}{2}$ $\beta = 180^\circ - \gamma - \alpha$

1 $\approx 180^\circ - 95^\circ - 28.47^\circ$

$\frac{1}{2}$ $\approx 56.53^\circ$

الكنترول العلمي وزارة التربية CONTROL

(a) حل المثلث ABC (6 درجات)



الحل: لحل المثلث نوجد α , b , a

1 $\alpha = 180° - (15° + 120°) = 45°$

1 $$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

1 $$\frac{\sin 45°}{a} = \frac{\sin 15°}{b} = \frac{\sin 120°}{17}$$

1 $$b = \frac{17 \times \sin 15°}{\sin 120°}$$

$\frac{1}{2}$ $$b \approx 5.08\ cm$$

1 $$a = \frac{17 \times \sin 45°}{\sin 120°}$$

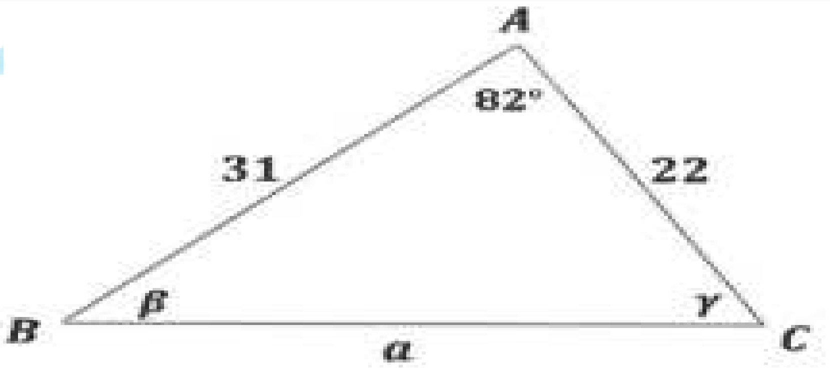
$\frac{1}{2}$ $$a \approx 13.88\ cm$$

تابع السؤال الثالث :

(b) حل المثلث ABC:

$$\alpha = 82^\circ , b = 22\ cm , c = 31\ cm$$

الحل : (7 درجات)



الرسم 1	
1	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
1	$= (22)^2 + (31)^2 - 2 \times 22 \times 31 \times \cos 82^\circ$
	$= 1255.168$
$\frac{1}{2}$	$a \simeq 35.4\ cm$
$\frac{1}{2}$	$\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
1	$= \dfrac{(35.4)^2 + (31)^2 - (22)^2}{2 \times 35.4 \times 31}$
	$\cos\beta \approx 0.789$
$\frac{1}{2}$	$\beta \approx 38^\circ$
$1 + \frac{1}{2}$	$\therefore \gamma = 180^\circ - (38^\circ + 82^\circ) \approx 60^\circ$

السؤال الرابع : (15 درجة)

(a) في المثلث ABC :

إذا كان $\alpha = 32^\circ$ ، $b = 11$ cm ، $a = 17$ cm ، أوجد γ (6 درجات)

$\frac{1}{2}$	$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sin 32^\circ}{17} = \frac{\sin\beta}{11} = \frac{\sin\gamma}{c}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$\sin\beta = \frac{11\sin 32^\circ}{17} \approx 0.34 > 0$
$\frac{1}{2}$	$\therefore \beta \approx 20.1^\circ$
	توجد زاويتان β تحققان $\sin\beta \approx 0.34$ و $0^\circ < \beta < 180$
$\frac{1}{2}$	$\beta_1 + \alpha \approx 20.1^\circ + 32^\circ = 52.1^\circ < 180^\circ$
$\frac{1}{2}$	أو $\beta_2 \approx 180^\circ - 20.1^\circ$
$\frac{1}{2}$	$= 159.9^\circ$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$\beta_2 + \alpha \approx 159.9^\circ + 32^\circ = 191.9^\circ > 180^\circ$ مرفوضة
$\frac{1}{2}$	$\therefore \gamma \approx 180^\circ - (32^\circ + 20.1^\circ)$
$\frac{1}{2}$	$\approx 127.9^\circ$

(a) حل ΔABC حيث $b = 9\,cm , c = 6\,cm , \alpha = 60^\circ$ (6 درجات)

الحل:

$\frac{1}{2}$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
$\frac{1}{2}$	$a^2 = 9^2 + 6^2 - 2(9)(6)\cos 60^\circ$
$\frac{1}{2}$	$a^2 = 81 + 36 - 108 \times \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$a^2 = 63$
$\frac{1}{2}$	$a = 3\sqrt{7}\ cm$
$\frac{1}{2}$	$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$\cos\beta = \frac{(3\sqrt{7})^2+(6)^2-(9)^2}{2(3\sqrt{7})(6)} = \frac{\sqrt{7}}{14}$
$\frac{1}{2}$	$\beta \approx 79.1^\circ$
$\frac{1}{2}$	$\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$
$\frac{1}{2}$	$\gamma \approx 180 - (60^\circ + 79.1^\circ)$
$\frac{1}{2}$	$\gamma = 40.9^\circ$

(a) ABC مثلث فيه $a = 3cm$, $b = 8\ cm$, $c = 7\ cm$ (5 درجات)

أوجد : ❶ قياس أكبر زاوية

❷ مساحة سطح المثلث ABC مستخدماً قاعدة هيرون

الحل:

½ (1) قياس أكبر زاوية هو β لأنها تقابل أطول ضلع

1 $\cos \beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

½ $= \dfrac{3^2 + 7^2 - 8^2}{2\,(3)\,(7)} = \dfrac{-1}{7}$

½ $\therefore\ \beta \approx 98.21^\circ$

(2)

½ $s = \dfrac{1}{2}\,(a + b + c)$

½ $= \dfrac{1}{2}\,(3 + 8 + 7) = 9$

1 $\text{Area} = \sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9(9-3)(9-8)(9-7)}$

½ $= \sqrt{108} = 6\sqrt{3}\ cm^2$

السؤال الثاني : (15 درجة)

(a) حل المثلث ABC حيث : $a = 2\ cm\ ,\ b = 4\ cm\ ,\ c = 5\ cm$

(7 درجات)

2021-2022
2022-2023

الحل :

1 $$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$1\frac{1}{2}$ $$= \frac{(4)^2 + (5)^2 - (2)^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{37}{40}$$

$\frac{1}{2}$ $$\alpha \approx 22.3^\circ$$

1 $$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$1\frac{1}{2}$ $$= \frac{(2)^2 + (5)^2 - (4)^2}{2 \times 2 \times 5} = \frac{13}{20}$$

$\frac{1}{2}$ $$\beta \approx 49.5^\circ$$

1 $$\gamma = 180^\circ - (22.3^\circ + 49.5^\circ) \approx 108.2^\circ$$

(6 درجات)　　　　　(a) أوجد مساحة سطح مثلث أطوال أضلاعه :

$$a = 9\ cm\ ,\ \ b = 7\ cm\ \ ,c = 6\ cm$$

الحل:

1 $$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

1 $$s = \frac{1}{2}(9+7+6) = \frac{1}{2}(22) = 11$$

1 $$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

1 $$A = \sqrt{11(11-9)(11-7)(11-6)}$$

1 $$A = \sqrt{11 \times 2 \times 4 \times 5}$$

1 $$A = 2\sqrt{110}\ cm^2$$

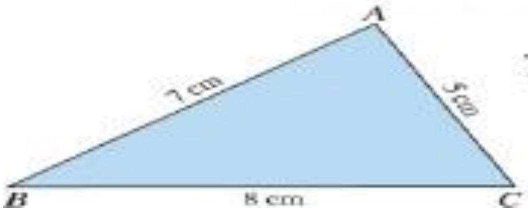
بدون أستخدام قاعدة هيرون :

أوجد مساحة المثلث ABC حيث $a = 8\,\text{cm}$ ، $b = 5\,\text{cm}$ ، $c = 7\,\text{cm}$

الحل:

ليكن α قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين $\overline{AC}$ ، $\overline{AB}$

باستخدام قانون جيب التمام يمكننا إيجاد $\cos\alpha$:



$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos\alpha = \frac{25+49-64}{2\times5\times7} = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$$

$$\because\ \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\therefore\ \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

في كل مثلث، جيب الزاوية هو موجب

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{49}} = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

نوجد مساحة المثلث ABC باستخدام:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}\times5\times7\times\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\text{Area} = 10\sqrt{3} \approx 17.32$$

السؤال الثالث : (15 درجة)

(a) حل المعادلة : $2\,sin\theta + 1 = 0$ (8 درجات)

الحل :

$2\,sin\theta + 1 = 0$	
$2\,sin\theta = -1$	$\frac{1}{2}$
$sin\theta = -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية	
$\therefore sin\alpha = \lvert sin\theta \rvert = \left\lvert -\frac{1}{2} \right\rvert = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$	1
$\because sin\theta < 0$	$\frac{1}{2}$
$\therefore$ θ تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع	1
عندما θ تقع في الربع الثالث:	
$\theta = (\pi + \alpha) + 2k\pi \;, k \in Z$	$\frac{1}{2}$
$= \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$	$\frac{1}{2} + 1$
عندما θ تقع في الربع الرابع:	
$\theta = (2\pi - \alpha) + 2k\pi \;, k \in Z$	$\frac{1}{2}$
$= \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$	$\frac{1}{2} + 1$

$\therefore$ حل المعادلة : $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ أو $\frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ حيث $k \in Z$

حل المعادلة: $\tan x = \sqrt{3}$

الحل:

$$\tan x = \sqrt{3}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x.

$$\therefore \tan\alpha = |\tan x|$$
$$= |\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$\because \tan x > 0 \quad \therefore x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث

ولكن الدالة $\tan x$ هي دالة دورية ودورتها π

فيكون: $\tan(\pi + x) = \tan x$

ومنه يكون حل المعادلة: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ حيث $k \in Z$

تابع السؤال الثاني :

(b) حل المعادلة : $\cos x = -\frac{1}{2}$ حيث $0 \leqslant x < 2\pi$ (8 درجات)

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$\cos\alpha = \lvert\cos x\rvert = \left\lvert\frac{-1}{2}\right\rvert = \frac{1}{2}$
1	$\therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$
1	$\because \cos x < 0$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث
	عندما x تقع في الربع الثاني :
1	$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in [0, 2\pi)$
	عندما x تقع في الربع الثالث :
1	$x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi)$
1+1	ومنه يكون حل المعادلة هو $x = \frac{4\pi}{3}$ أو $x = \frac{2\pi}{3}$

تابع السؤال الرابع:

(b) حل المعادلة :

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (7 درجات)

الحل:

	$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
	نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x
1	$\therefore \sin\alpha = \lvert\sin x\rvert = \left\lvert\frac{\sqrt{3}}{2}\right\rvert = \frac{\sqrt{3}}{2}$
1	$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\because \sin x > 0$
1	$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو الربع الثاني
	عندما x تقع في الربع الأول:
$1\frac{1}{2}$	$x = \left(\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
	وعندما x تقع في الربع الثاني:
1	$x = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
1	$\therefore x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
	حل المعادلة :
	$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

السؤال الثالث : (15 درجة)

(a) حل المعادلة : $3\sin\theta + 1 = \sin\theta$ حيث $0 \le \theta < 2\pi$

(8 درجات)

الحل :

$$3\sin\theta + 1 = \sin\theta$$

$$3\sin\theta - \sin\theta = -1 \qquad \frac{1}{2}$$

$$2\sin\theta = -1 \qquad \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{-1}{2} \qquad \frac{1}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية θ

$$\therefore \sin\alpha = |\sin\theta| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6} \qquad \frac{1}{2}$$

$$\because \sin\theta < 0 \qquad \frac{1}{2}$$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع $\qquad 1$

عندما θ تقع في الربع الثالث:

$$\theta = (\pi + \alpha) \qquad \frac{1}{2}$$

$$= \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \in [0, 2\pi) \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

عندما θ تقع في الربع الرابع :

$$\theta = (2\pi - \alpha) \qquad \frac{1}{2}$$

$$= \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{11\pi}{6} \in [0, 2\pi) \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

حل المعادلة : $\theta = \frac{7\pi}{6}$ أو $\theta = \frac{11\pi}{6}$ $\qquad \frac{1}{2}$

(b) حل المعادلة : $5\sin\theta - 3 = \sin\theta$ حيث $0 \le \theta < 2\pi$ (8 درجات)

الحل :

$$5\sin\theta - \sin\theta = 3$$

$\frac{1}{2}$ $$4\sin\theta = 3$$

$\frac{1}{2}$ $$\sin\theta = \frac{3}{4}$$

بفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية θ

$\frac{1}{2}$ $$\sin\alpha = |\sin\theta| = \left|\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$$

1 $$\therefore \alpha \approx 0.848 \text{ radians}$$

$\frac{1}{2}$ $$\because \sin\theta > 0$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ ∴ θ تقع في الربع الأول أو الربع الثاني

$\frac{1}{2}$ عندما θ تقع في الربع الأول $\therefore \theta = \alpha$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $\therefore \theta \approx 0.848$ $\quad 0.848 \in [0, 2\pi)$

عندما θ تقع في الربع الثاني $\therefore \theta = \pi - \alpha$

$\frac{1}{2}$ $$\therefore \theta \approx \pi - 0.848$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $\therefore \theta \approx 2.2935$ $\quad 2.2935 \in [0, 2\pi)$

1 حل المعادلة : $\theta \approx 2.2935$ أو $\theta \approx 0.848$

سلسلة م ا

(b) حل المعادلة : $2\cos x\ \sin x - \cos x = 0 \quad , x \in [\,0 , 2\pi\,)$ (5 درجات)

الحل :

$\cos x\,(\,2\sin x - 1\,) = 0$ ½

$\therefore\ \cos x = 0 \quad \text{or} \quad 2\sin x - 1 = 0$ ½+½

$\therefore\ x = \frac{\pi}{2}\ ,\ x = \frac{3\pi}{2}$ | $\sin x = \frac{1}{2}$ 1+½

نفرض α هي زاوية الإسناد حيث $\sin\alpha = |\sin x|$

$= \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{6}$ ½

$\because\ \sin x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو الثاني

في الربع الأول: $x = \alpha = \frac{\pi}{6}$ ½

في الربع الثاني: $x = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ½+½

$\therefore$ حل المعادلة هو: $x = \frac{5\pi}{6}\ ,\ x = \frac{\pi}{6}\ ,\ x = \frac{3\pi}{2}\ ,\ x = \frac{\pi}{2}$

(b) حل المعادلة : $2sin^2x - 3sinx - 2 = 0$ (8 درجات)

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$(2sinx + 1)(sinx - 2) = 0$
	$(2sinx + 1) = 0$ أو $(sinx - 2) = 0$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$sin\,x = \frac{-1}{2}$ أو $sinx = 2$
	$sinx = 2$ عندما
	$[-1,1]$ مداها $y = sin\,x$
$\frac{1}{2}$	$2 \notin [-1,1]$
$\frac{1}{2}$	$\therefore sin\,x = 2$ ليس لها حل
	$sinx = \frac{-1}{2}$ نأخذ
	بفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$\therefore sin\alpha = \lvert sinx \rvert = \left\lvert\frac{-1}{2}\right\rvert = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$

تابع السؤال الثاني :

(b) حل المعادلة : $\cos x = -\frac{1}{2}$ حيث $0 \leqslant x < 2\pi$ (8 درجات)

الحل :

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

الدرجة	
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$\cos\alpha = \lvert\cos x\rvert = \left\lvert\frac{-1}{2}\right\rvert = \frac{1}{2}$
1	$\therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$
1	$\because \cos x < 0$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث
	عندما x تقع في الربع الثاني :
1	$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in [0, 2\pi)$
	عندما x تقع في الربع الثالث :
1	$x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi)$
1+1	ومنه يكون حل المعادلة هو $x = \frac{4\pi}{3}$ أو $x = \frac{2\pi}{3}$

حل المعادلة: $2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta$

$2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta$

$2\cos\theta\sin\theta + \sin\theta = 0$

$\sin\theta(2\cos\theta + 1) = 0$ تحليل إلى عوامل

$\sin\theta = 0$ أو $2\cos\theta + 1 = 0$ خاصية الضرب في الصفر

$\sin\theta = 0$ أو $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ أو $\sin\theta = 0$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$\therefore \cos\alpha = |\cos\theta|$

$= \left|-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\because \cos\theta < 0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث.

عندما تقع θ في الربع الثاني:

$\theta = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad , \quad k \in Z$

$= \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

$= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

عندما θ تقع في الربع الثالث

$\therefore \theta = \pi + \alpha + 2k\pi \quad , \quad k \in Z$

$= \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

$= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$\therefore$ θ زاوية ربعية

$\therefore \theta = 0$ أو $\theta = \pi$

$\therefore \theta = 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi \quad , \quad k \in Z$

حل المعادلة: $\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi$ أو $\theta = 2k\pi$ حيث $k \in Z$

تابع السؤال الثاني :

(b) إذا كان: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ ، $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos\beta = \frac{-8}{17}$ ، $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

أوجد كلاً مما يلي :

(2) $\cos(2\alpha)$ (1) $\sin(\alpha+\beta)$ (6 درجات)

الحل :

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\sin^2\beta + \left(\frac{-8}{17}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\beta = 1 - \frac{64}{289}$$

$$\sin^2\beta = \frac{225}{289}$$

$\sin\beta = \frac{15}{17}$ أو $\sin\beta = -\frac{15}{17}$

$\because \frac{\pi}{2} < \beta < \pi \rightarrow \sin\beta > 0$

$\therefore \sin\beta = \frac{15}{17}$

1 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$

$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$ أو $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\alpha > 0$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $\therefore \cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\frac{1}{2}$ (1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\frac{1}{2}$ $= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-8}{17}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{15}{17}\right)$

$\frac{1}{2}$ $= \frac{13}{85}$

$\frac{1}{2}$ (2) $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $= 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = \frac{-7}{25}$

(b) إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\sin\theta = \frac{-3}{5}$ ، فأوجد: (8 درجات)

(1) $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

(2) $\tan(2\theta)$

الحل:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \frac{1}{2}$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{-3}{5}\right)^2 \qquad \frac{1}{2}$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\pm 4}{5} \qquad \frac{1}{2}$$

$$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad \therefore \cos\theta < 0 \qquad \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{-4}{5} \qquad \frac{1}{2}$$

$$(1)\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \frac{1}{2}$$

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني $\qquad \frac{1}{2}$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{-4}{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \qquad 1+\frac{1}{2}$$

$$(2)\ \tan(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\left(\frac{-3}{5}\right)}{\left(\frac{-4}{5}\right)} = \frac{3}{4} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \qquad \frac{1}{2}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\times\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{24}{7} \qquad 1+\frac{1}{2}$$

(b) إذا كان $\sin\alpha = \frac{4}{5}\ ,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (8 درجات)

$\cos\beta = \frac{-12}{13}\ ,\ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ أوجد كلاً مما يلي :

(1) $\sin(\alpha+\beta)$ (2) $\tan 2\beta$

	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$\frac{1}{2}$	$\cos^2\alpha = 1 - (\frac{4}{5})^2$
$\frac{1}{2}$	$\cos^2\alpha = \frac{9}{25} \rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{3}{5}$
$\frac{1}{2}$	$\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \therefore \cos\alpha = \frac{3}{5}$
	$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$
$\frac{1}{2}$	$\sin^2\beta = 1 - (\frac{-12}{13})^2$
$\frac{1}{2}$	$\sin^2\beta = \frac{25}{169} \rightarrow \sin\beta = \pm\frac{5}{13}$
$\frac{1}{2}$	$\because \pi < \beta < \frac{3\pi}{2} \quad \therefore \sin\beta = \frac{-5}{13}$
$\frac{1}{2}$	$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$
$\frac{1}{2}$	$= \frac{\frac{-5}{13}}{\frac{-12}{13}} = \frac{5}{12}$
$\frac{1}{2}$	(1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$1 + \frac{1}{2}$	$= (\frac{4}{5})(\frac{-12}{13}) + (\frac{3}{5})(\frac{-5}{13}) = \frac{-63}{65}$
$1 + \frac{1}{2}$	(2) $\tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{2\times\frac{5}{12}}{1-(\frac{5}{12})^2}$
$\frac{1}{2}$	$= \frac{120}{119}$

(a) إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ ، $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ فاوجد : (5 درجات)

$\sin(\theta - \frac{\pi}{2})$ (1)

$\frac{1}{2}$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\frac{1}{2}$ $\sin^2\theta + (-\frac{3}{5})^2 = 1$

$\frac{1}{2}$ $\sin^2\theta = \frac{16}{25} \longrightarrow \sin\theta = \pm\frac{4}{5}$

$\because$ θ تقع في الربع الثاني

$\frac{1}{2}$ $\therefore \sin\theta = \frac{4}{5}$

$\frac{1}{2}$ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{4}{3}$

2014-2015

$\frac{1}{2}$ $\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin(-(\frac{\pi}{2} - \theta))$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $= -\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = -\cos\theta = \frac{3}{5}$

نموذج اجابة امتحان الفترة الدراسية الثانية- رياضيات- للصف الحادي عشر علمي - العام الدراسي: 2022 / 2023م

السؤال الرابع : (15 درجة)

(a) إذا كان $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

فاوجد $\sin 2\theta$

(5 درجات)

الحل :

$\frac{1}{2}$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ أو $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{2}$ $\because \pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta < 0$

$\frac{1}{2}$ $\therefore \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{2}$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $\sin 2\theta = 2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = 1$

السؤال الرابع : (15 درجة)

(a) إذا كان $180° < \theta < 270°$ ، $\sin\theta = \frac{-24}{25}$

أوجد $\sin\frac{\theta}{2}$

(5 درجات)

الحل :

نوجد أولاً $\cos\theta$

$\frac{1}{2}$ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\frac{1}{2}$ $\cos^2\theta + \left(\frac{-24}{25}\right)^2 = 1$

$\frac{1}{2}$ $\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{-24}{25}\right)^2$

$\frac{1}{2}$ $\cos^2\theta = \frac{49}{625}$

$\frac{1}{2}$ $\cos\theta = \pm\frac{7}{25}$

$\frac{1}{2}$ $\because \theta$ تقع في الربع الثالث

$\frac{1}{2}$ $\therefore \cos\theta = \frac{-7}{25}$

$\because 180° < \theta < 270°$

$\frac{1}{2}$ $\therefore 90° < \frac{\theta}{2} < 135°$ ∴ $\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني

$\frac{1}{2}$ $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

$\frac{1}{2}$ $\therefore \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{-7}{25}\right)}{2}} = \frac{4}{5}$ لأن $\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني

(a) أثبت صحة المتطابقة : $\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}=2\csc^2 x$ (6 درجات)

$$L.H.S:\ \frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}$$

1 + 1
$$=\frac{1+\cos x+1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

1
$$=\frac{2}{(1+\cos x)(1+\cos x)}$$

1
$$=\frac{2}{1-\cos^2 x}$$

1
$$=\frac{2}{\sin^2 x}$$

1
$$=2\csc^2 x$$

$$=R.H.S$$

أثبت صحة المتطابقة: $2\cot x\csc x=\frac{1}{\sec x-1}+\frac{1}{\sec x+1}$

الحل:

تبسط الطرف الأيمن إلى صورة الطرف الأيسر

أوجد مقامًا مشتركًا
$$\frac{1}{\sec x-1}+\frac{1}{\sec x+1}=\frac{(\sec x+1)+(\sec x-1)}{(\sec x-1)(\sec x+1)}$$

بسّط
$$=\frac{2\sec x}{\sec^2 x-1}$$

$$\boxed{1+\tan^2\theta=\sec^2\theta}$$

متطابقة فيثاغورث
$$=\frac{2\sec x}{\tan^2 x}$$

استخدم متطابقة المقلوب
$$=2\sec x\cot^2 x$$

بسّط
$$=\frac{2}{\cos x}\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{2\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}$$

$$=2\cot x\csc x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(a) أثبت صحة المتطابقة: (4 درجات)

$$\tan x + \cot x = \sec x . \csc x$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$= \frac{\sin^2 x}{\cos x \sin x} + \frac{\cos^2 x}{\cos x \sin x}$
$\frac{1}{2}$	$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}$
$\frac{1}{2}$	$= \frac{1}{\cos x \sin x}$
$\frac{1}{2}$	$= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x}$
$\frac{1}{2}$	$= \sec x . \csc x$

الطبعة المصرية ديوان عام الوزارة وزارة التربية 2017-2018 الفترة الدراسية الثانية نموذج الإجابة

(b) أثبت صحة المتطابقة : $\tan^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x \ \tan^2 x$ (3 درجات)

$\frac{1}{2}$	الطرف الأيسر $= \tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x$
$+\frac{1}{2}$	$= \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \sin^2 x = \tan^2 x \ \sin^2 x$
	= الطرف الأيمن

(a) اثبت صحة المتطابقة : (4 درجات)

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

1 $\quad \dfrac{\cos x}{1-\sin x} = \dfrac{\cos x}{1-\sin x} \times \dfrac{1+\sin x}{1+\sin x}$

1 $\quad = \dfrac{\cos x\,(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$

1 $\quad = \dfrac{\cos x\,(1+\sin x)}{\cos^2 x}$

1 $\quad = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

(a) أثبت صحة المتطابقة : $\quad \dfrac{\sec^2 x - 1}{\sin x} = \tan x \,.\, \sec x \quad$ (4 درجات)

الحل✍:

الحل✍:

1 $\quad$ الطرف الأيسر $= \dfrac{\sec^2 x - 1}{\sin x} = \dfrac{\tan^2 x}{\sin x}$

1 $\quad = \dfrac{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\sin x}$

½ $\quad = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \dfrac{1}{\sin x}$

½ $\quad = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

½ + ½ $\quad = \dfrac{\sin x}{\cos x} \times \dfrac{1}{\cos x} = \tan x \,.\, \sec x =$ الطرف الأيمن

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = (\csc x - \cot x)^2$

$$(\csc x - \cot x)^2 = \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)^2$$

$$= \frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x} = \frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cancel{(1-\cos x)}(1-\cos x)}{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x . \tan^2 x$

توحيد مقامات

$$\frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \cos x}$$

القسمه = الضرب في المقلوب

$$= \frac{(1+\sin x)}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$\boxed{\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}}$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$\boxed{1+\tan^2\theta = \sec^2\theta}$

$$= \sin x(1+\tan^2 x)$$

$$= \sin x + \sin x \tan^2 x$$

نستنتج أن: $\frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x \tan^2 x$

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$

$$\frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = \frac{\csc^2\theta - 1}{1+\csc\theta}$$

$$= \frac{(\csc\theta - 1)(\csc\theta + 1)}{1+\csc\theta}$$

$$= \csc\theta - 1$$

$$(\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} - 1$$

$$= \csc\theta - 1$$

$$\therefore \frac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$$

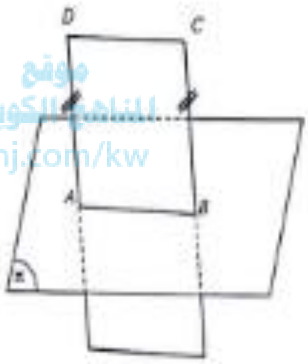
تابع السؤال الثاني :

(b) (8 درجات)

1) أكمل ما يلي :

2 إذا وازى مستقيم خارج مستو مستقيماً في المستوي فإنه ......يوازي المستوى......

2) في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ ، $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$ ، $AD = BC$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{CD} // \pi$

الحل :

$\frac{1}{2}$ $\because \overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$

1 $\therefore$ $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AD}$ يعينان مستويا وحيدا و ليكن $(ABCD)$ فيه

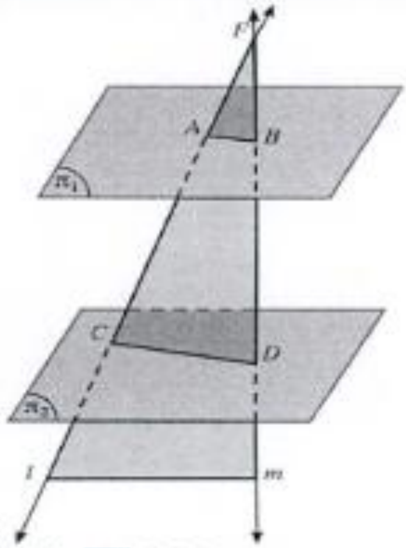
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$, $AD = BC$

$\frac{1}{2}$ $\therefore$ $ABCD$ متوازي أضلاع

1 و منه $\overleftrightarrow{DC} // \overleftrightarrow{AB}$

1 $\because \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

1 $\therefore \overleftrightarrow{CD} // \pi$



تابع السؤال الرابع:

(b) في الشكل المقابل π_1 , π_2 مستويين متوازيين ،

$\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان في F و يقطعان كلا من

π_1 في A, B ، π_2 في C, D ، إذا كان $FB = 5cm$

$CD = 9cm , AC = 6cm , BD = 4cm$

فأوجد محيط المثلث FAB

الحل : (10 درجات)

$\frac{1}{2}$ ∵ $\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان في F

$\frac{1}{2}$ ∴ $\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ يعينان مستو واحد π

$\frac{1}{2}$ ∵ π_1 , π_2 متوازيان

1 $\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB} \ , \pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$

1 (نظرية) $\therefore \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

في المستوى π ، $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

$\frac{1}{2}$ المثلثان FAB , FCD متشابهان

1 $$\frac{FB}{FD} = \frac{FA}{FC} = \frac{AB}{CD}$$

1 $$\frac{5}{5+4} = \frac{FA}{FA+6} = \frac{AB}{9}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{FA}{FA+6}$$

$\frac{1}{2}$ $$9\,FA = 5(FA+6)$$

1 $$4\,FA = 30 \ \Rightarrow FA = 7.5 \ cm$$

$$\frac{5}{9} = \frac{AB}{9}$$

$1\frac{1}{2}$ $$9\,AB = 45 \ \Rightarrow AB = 5 \ cm$$

محيط المثلث FAB يساوي

1 $$FA + FB + AB = 7.5 + 5 + 5 = 17.5 \ cm$$

تابع السؤال الثالث :

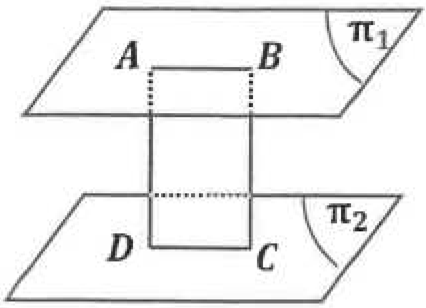
(b) في الشكل المقابل : $\pi_1 // \pi_2$ ، (9 درجات)

A, B نقطتان في π_1 ،

C, D نقطتان في π_2 حيث A, B, C, D في مستوى واحد

$\overline{BC} \perp \pi_2$, $\overline{AD} \perp \pi_2$ ،

اثبت ان $ABCD$ مستطيل



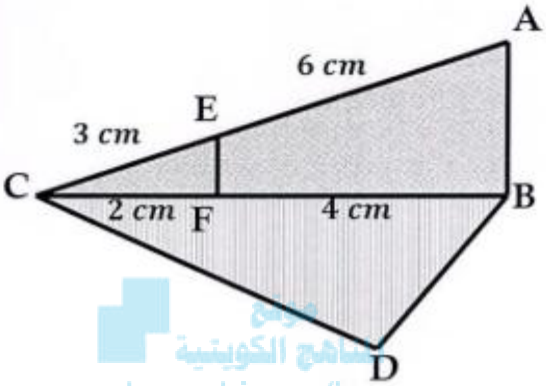
الحل		الدرجة
$\because \overline{AD} \perp \pi_2 \quad , \overline{BC} \perp \pi_2$		$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$\therefore \overleftrightarrow{AD} \; // \; \overleftrightarrow{BC}$ ....(1)	(نظرية)	1
$\because$ $\pi_1 // \pi_2$ و A, B, C, D في مستوى واحد هو $(ABCD)$		$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$\pi_1 \cap (ABCD) = \overleftrightarrow{AB} \; , \pi_2 \cap (ABCD) = \overleftrightarrow{DC}$		$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$\therefore \overleftrightarrow{AB} \; // \; \overleftrightarrow{DC}$ ....(2)		1
من (1) و (2)		
$\therefore$ الشكل $ABCD$ متوازي اضلاع		1
لكن $\overline{AD} \perp \pi_2$ ، $\overline{DC} \subset \pi_2$		$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DC}$ (نظرية)		1
$\therefore$ الشكل $ABCD$ متوازي اضلاع احدى زواياه قائمة		$\frac{1}{2}$
$\therefore$ الشكل $ABCD$ مستطيل		$\frac{1}{2}$

تابع السؤال الرابع:

(b) من الشكل المقابل إذا كان: $\overline{AB} \perp (BCD)$ **(9 درجات)**

وكان $FB = 4\ cm\ , CF = 2\ cm\ , EA = 6\ cm\ , CE = 3\ cm$

اثبت أن : $\overline{EF} \perp \overline{BD}$



الحل :

$\because \overline{AB}, \overline{CA}$ متقاطعين	$\frac{1}{2}$
$\therefore \overline{CA}, \overline{AB}$ يعينان مستوى وحيد (ABC)	$\frac{1}{2}$
في المثلث CAB :	
$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
$\frac{CF}{FB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
$\therefore \overline{EF} \ // \ \overline{AB}$ (نظرية طاليس)	1
$\because \overline{AB} \perp (CBD)$	1
$\therefore \overline{EF} \perp (CBD) \ \cdots\cdots\cdots (1)$ (نظرية)	1
$\overline{DB} \subset (CBD) \ \cdots\cdots\cdots (2)$	1
من (1) ، (2) :	
$\therefore \overline{EF} \perp \overline{DB}$	1

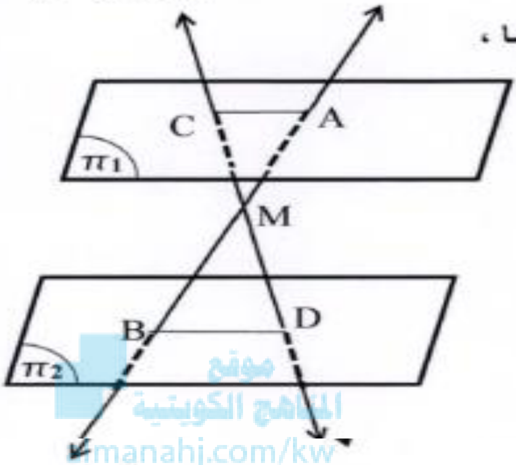
تابع السؤال الثالث :

(b) في الشكل المقابل : (9 درجات)

π_1 , π_2 مستويان متوازيان ، M نقطة واقعة بينهما ،

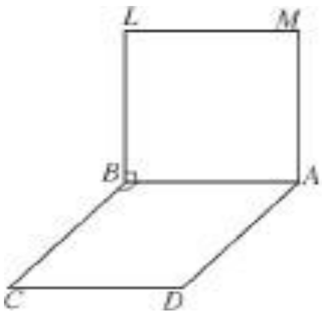
حيث $\overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{ M \}$

اثبت أن $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$



الحل :

$\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{CD}$ مستقيمان متقاطعان في M	1
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{CD}$ يعينان مستو واحد وليكن π	1
π_1 , π_2 متوازيان	1
$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{CA}$ ، $\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{BD}$	1 + 1
$\therefore \overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{CA}$	1
في المستوى π : $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{CA}$	
$\therefore$ المثلثان MCA ، MDB متشابهان	1
$\therefore \frac{AC}{BD} = \frac{AM}{MB}$	1 + 1



$ABCD$ ، $ABLM$ مربعان ليسا في مستو واحد، لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$،

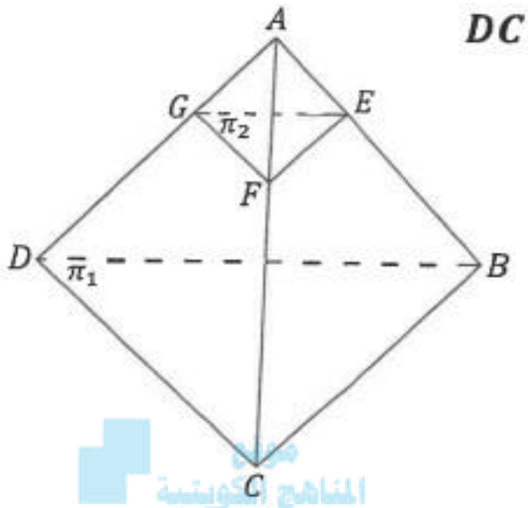
أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$

$\because \overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{BA} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{LM} \perp \overleftrightarrow{BL}$ و $\overleftrightarrow{LM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ومنه $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$.

(من خواص المربع... الاضلاع المتقابله متوازيه والمتجاوره متعامده)

(a) في الشكل المقابل ، $ABCD$ هرم ثلاثي ، المستويان π_1, π_2 متوازيان **(7 درجات)**

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ، $FG = 6\ cm$ فأوجد DC



$\because (ABC) \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{BC}$

$\because (ABC) \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{EF}\ ,\ \pi_1 // \pi_2$

$\therefore \overleftrightarrow{EF} // \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \overline{EF} // \overline{BC}$

ΔBAC

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{FE}{CB} = \frac{1}{4}$$

$\because (ACD) \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{DC}$

$\because (ACD) \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GF}\ ,\ \pi_1 // \pi_2$

$\therefore \overleftrightarrow{GF} // \overleftrightarrow{DC} \Rightarrow \overline{GF} // \overline{DC}$

$\therefore \Delta DAC$

$$\frac{AG}{AD} = \frac{AF}{AC} = \frac{GF}{DC} = \frac{1}{4}$$

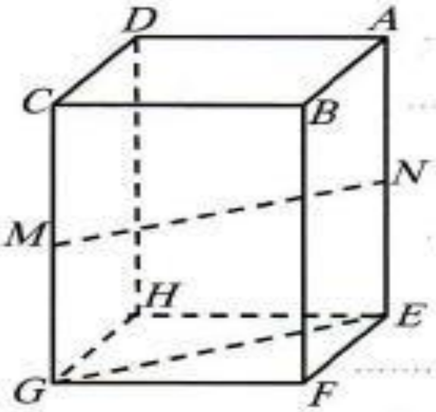
$$\frac{GF}{DC} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{6}{DC} = \frac{1}{4}$$

$\therefore CD = 4 \times 6 = 24\ cm$

(c) في الشكل المقابل : $ABCDEFGH$ شبه مكعب ، M منتصف $\overline{CG}$, **(4 درجات)**

N منتصف $\overline{AE}$. أثبت أن ($EFGH$) يوازي $\overline{MN}$



$\because \overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{CG}$ ، $AE = CG$ — $\frac{1}{2}$

M منتصف $\overline{CG}$ ، N منتصف $\overline{AE}$ — $\frac{1}{2}$

$\therefore \overleftrightarrow{NE} \parallel \overleftrightarrow{MG}$ ، $NE = MG$ — $\frac{1}{2}$

$\therefore NEGM$ متوازي أضلاع — $\frac{1}{2}$

$\therefore \overleftrightarrow{NM} \parallel \overleftrightarrow{EG}$, $\overleftrightarrow{GE} \subset (EFGH)$ — $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$\therefore \overleftrightarrow{MN}$ يوازي $(EFGH)$ — 1

السؤال الثاني : (15 درجة)

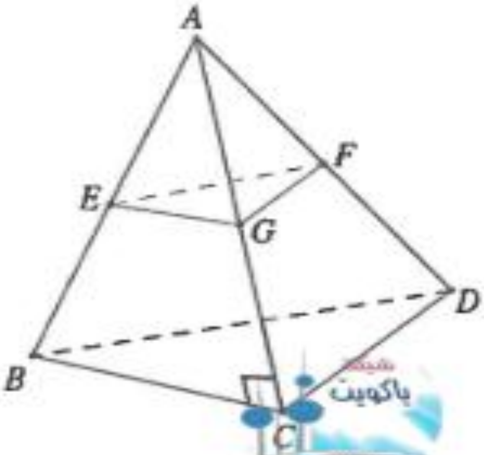
(a) في الشكل المقابل : A نقطة خارج المستوى BCD ،

و النقاط E , G , F منتصفات $\overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD}$ على الترتيب.

إذا كان $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CB}$

وكان $CD = 5 \text{ cm}, AC = 12 \text{ cm}, AD = 13 \text{ cm}$

فاثبت أن : $(EGF) \mathbin{//} (BCD)$



(9 درجات)

الحل :

في $\triangle ACD$:

$(AC)^2 + (CD)^2 = (12)^2 + (5)^2 = 169$ (1) — $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$(AD)^2 = (13)^2 = 169$ (2) — $\frac{1}{2}$

من (2) , (1) تجد أن $\triangle ACD$ قائم الزاوية في C .

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CD}$ — $\frac{1}{2}$

ولكن $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CB}$ (معطى) — $\frac{1}{2}$

وحيث أن $\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{CB}$ متقاطعان

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \perp (BCD)$ (3) — 1

في $\triangle ABC$:

$\because E$ منتصف $\overline{AB}$ ، G منتصف $\overline{AC}$ — $\frac{1}{2}$

$\therefore \overleftrightarrow{EG} \mathbin{//} \overleftrightarrow{CB}$ — 1

ولكن $m(B\hat{C}A) = 90°$

$\therefore m(E\hat{G}A) = 90° \implies \overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{EG}$ — 1

و بالمثل $\overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{GF}$ — 1

$\therefore \overleftrightarrow{AG} \perp (EGF)$

أي أن: $\overleftrightarrow{AC} \perp (EGF)$ (4) — 1

من (3) و(4) ينتج أن :

$(EGF) \mathbin{//} (BCD)$ — 1

2022-2021
2024-2023

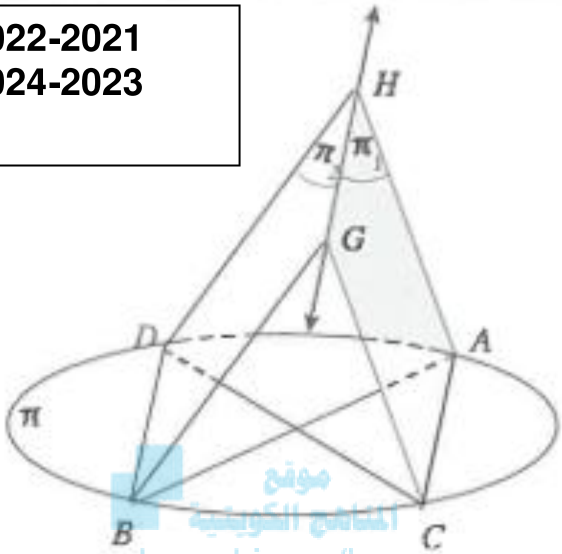
السؤال الثالث : (15 درجة)

(a) في الشكل المقابل:

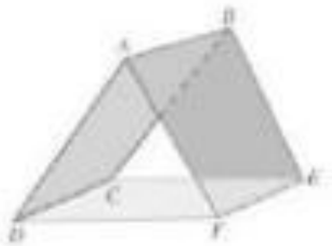
$\overline{AB}, \overline{CD}$ قطران في مستوى الدائرة π

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

أثبت أن مستوى الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$.



$\because$ $\overline{AB}, \overline{CD}$ قطران في مستوى الدائرة π	1
$\therefore$ ينصف كل منهما الآخر و متطابقان	1
$\therefore$ الشكل ACBD مستطيل	1
(1) .... $\overline{AC} \parallel \overline{DB}$ $\therefore$	1
$\overline{DB} \subset \pi_2$, $\overline{AC} \subset \pi_1$	1
(2) .... $\pi_2 \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{GH}$	1
من (1) ، (2) $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DB}$ $\therefore$	1
$\because$ $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AC} \subset \pi$	1
$\therefore$ $\overleftrightarrow{GH} \parallel \pi$	1
أي أن مستوى الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$	



في الشكل المقابل:

$ABEF, ABCD$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD) \parallel (BEC)$

الحل: ABEFمستطيل

$\overline{AB} \perp \overline{AF}$

ABCDمستطيل

$\overline{AB} \perp \overline{AD}$

$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AF}$ مستقيمان متقاطعان في A فهما يعينان مستو وحيد هو (AFD)

$\overleftrightarrow{AB} \perp (AFD) \rightarrow 1$

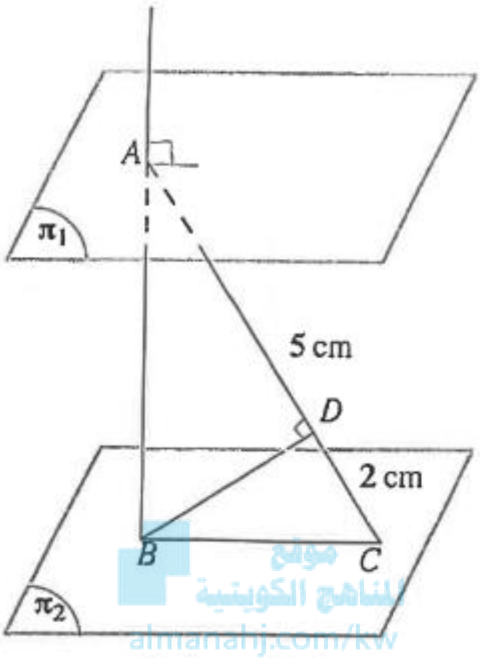
$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$ بالمثل $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BE}$ مستقيمان متقاطعان في B فهما يعينان مستو وحيد هو(BEC)

$\overleftrightarrow{AB} \perp (BEC) \rightarrow 2$

$(AFD) // (BEC)$

تابع السؤال الثاني :



(8 درجات)

(b) في الشكل المقابل : $\pi_1 // \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1 , A \in \pi_1$

$\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$ ، رسم $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوي ABC

إذا كان $AD = 5\ cm , DC = 2cm$

أوجد : BD

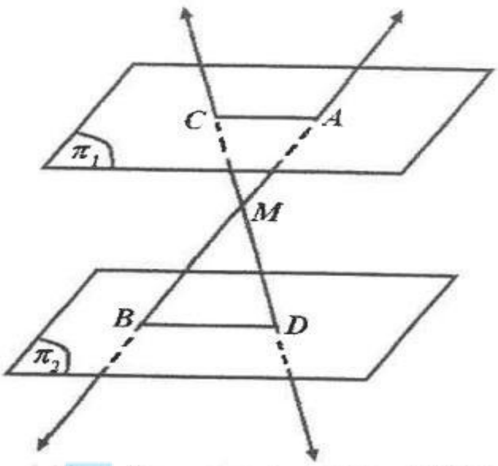
الحل :

$\because \pi_1 // \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$	1
$\therefore \overleftrightarrow{AB}$ عمودي على كل مستقيم في π_2	1
$\because \overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$	$\frac{1}{2}$
$\therefore \overline{AB} \perp \overline{BC}$	$\frac{1}{2}$
في المثلث ABC القائم الزاوية في B	$\frac{1}{2}$
$\because \overline{BD} \perp \overline{AC}$	$\frac{1}{2}$
$\therefore (BD)^2 = AD \times DC$	1
$= 5 \times 2 = 10$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
$BD = \sqrt{10}\ cm$	1

(b) في الشكل المقابل : π_2 , π_1 مستويان متوازيان ، M نقطة واقعة بينهما ، حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{ M \}$

أثبت أن : $\frac{AC}{BD} = \frac{AM}{MB}$

(6 درجات)



$\because$ $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ مستقيمان متقاطعان

$\therefore$ يعينان مستويًا وحيدًا و ليكن π

$\because$ $\pi_1 // \pi_2$

، $\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{CA}$

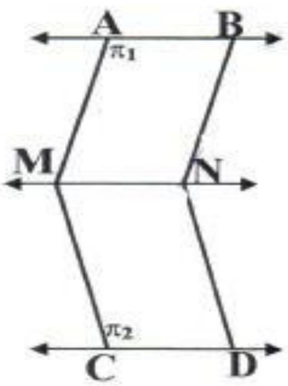
، $\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{BD}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{BD}$

$\therefore$ المثلثان MCA , MDB متشابهان

(b) في الشكل المقابل ليكن π_1 , π_2 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث $\overleftrightarrow{AB} // \pi_2$ (5 درجات)

$\overleftrightarrow{CD} // \pi_1$, $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$ اثبت $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$



$\because$ $\overleftrightarrow{AB} // \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$

$\because$ $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{MN}$

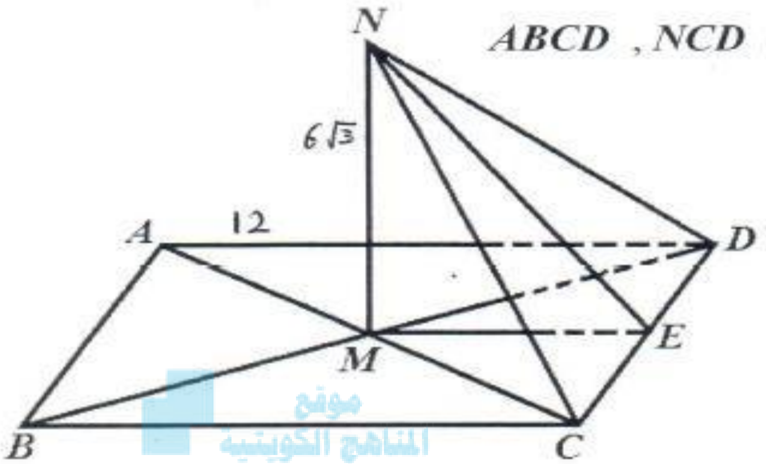
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{MN}$ -- (1) (نظرية)

$\because$ $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{MN}$, $\overleftrightarrow{CD} // \pi_1$, $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{MN}$ -- (2)

من (1) و (2) (بنظرية) $\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

(b) في الشكل المرسوم $ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M ، (6 درجات)
وفيه $AD = 12$ أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه
بحيث $MN = 6\sqrt{3}$ ، E منتصف $\overline{CD}$
أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD , $ABCD$



$\overleftrightarrow{CD}$ هي الحافة المشتركة بين المستويين NCD , $ABCD$

$\because \overleftrightarrow{MN} \perp (ABCD)$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (ABCD)$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (1)

في المثلث CDM المتطابق الضلعين (خواص المستطيل)

$\because$ E منتصف $\overline{CD}$

$\therefore \overleftrightarrow{ME} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (2)

من (2) ، (1) نجد أن :

$\overleftrightarrow{CD} \perp (MNE)$, $\overleftrightarrow{NE} \subset (MNE)$

$\therefore \overleftrightarrow{NE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore$ $M\hat{E}N$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$

في المثلث ACD :

$\overline{EM}$ واصلة بين منتصفي الضلعين : $\overline{CA}$, $\overline{CD}$

$\therefore EM = \frac{1}{2} AD = 6\ cm$

في المثلث MEN القائم الزاوية في M :

$\therefore \tan(M\hat{E}N) = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$

$\therefore m(M\hat{E}N) = 60°$

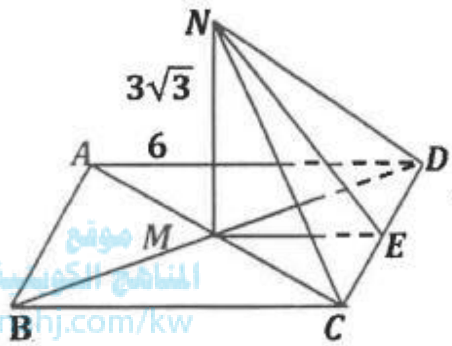
قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD , $ABCD$ هو $60°$

(b) $ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M ، و فيه $AD = 6cm$

أقيم $\overline{NM}$ عمودا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه

بحيث $MN = 3\sqrt{3}\ cm$ ، E منتصف $\overline{CD}$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD , NCD$



الحل :

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $\because \overline{MN}\perp(ABCD)$, $\overline{CD}\subset(ABCD)$

$\frac{1}{2}$ $\therefore \overline{MN}\perp\overline{CD}$ (1)

في المثلث CDM المتطابق الضلعين

$\frac{1}{2}$ $\because E$ منتصف $\overline{CD}$ معطى

$\frac{1}{2}$ $\therefore \overline{ME}\perp\overline{CD}$ خواص المثلث المتطابق الضلعين (2)

$\frac{1}{2}$ $\therefore \overline{CD}\perp(MNE)$, $\overline{NE}\subset(MNE)$

$\frac{1}{2}$ $\therefore \overline{NE}\perp\overline{CD}$

$\frac{1}{2}$ $\overline{CD}$ هي الحافة المشتركة بين المستويين $ABCD , NCD$

$\frac{1}{2}$ $\therefore M\hat{E}N$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$

في المثلث BCD E منتصف $\overline{CD}$ معطى

$\frac{1}{2}$ M منتصف $\overline{BD}$ (من خواص المستطيل)

$\frac{1}{2}$ $\therefore ME = \frac{1}{2}\ BC$, $AD = BC = 6cm$

$\frac{1}{2}$ $\therefore ME = \frac{1}{2}\times 6 = 3\ cm$

في المثلث MEN القائم الزاوية في $\hat{M}$ (من خواص المستقيم العمودي مع مستو)

1 $$\tan(M\hat{E}N) = \frac{MN}{ME} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

1 $$\therefore m(M\hat{E}N) = 60°$$

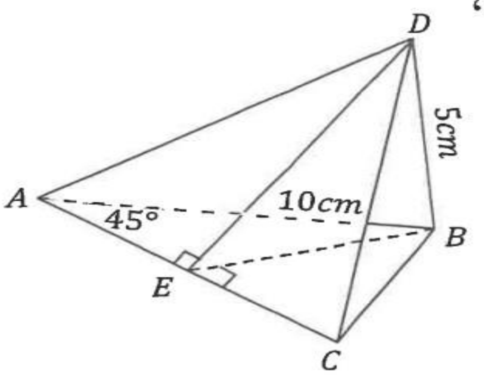
قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD , NCD$ هو $60°$

(b) في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوي المثلث ABC ،

$DB = 5\ cm\ , AB = 10\ cm\ , m(B\hat{A}C) = 45^\circ$ ،

$\overline{DB} \perp (ABC)\ ,\ \overline{BE} \perp \overline{AC}\ ,\ \overline{DE} \perp \overline{AC}$

(10 درجات)



أوجد:

(1) BE

(2) قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $BAC\ , DAC$

$\frac{1}{2}$ (1) في المثلث ABC $\because \overline{BE} \perp \overline{AC}$

1 $\therefore sin(45^\circ) = \frac{BE}{AB}$

1 $BE = 10 \cdot sin(45^\circ)$

$\frac{1}{2}$ $BE = 5\sqrt{2}\ cm$

$\frac{1}{2}$ (2) $\overleftrightarrow{AC}$ هي خط تقاطع المستويين $(BAC), (DAC)$ (هي حافة الزاوية الزوجية)

$\frac{1}{2}$ $\overline{BE} \subset (BAC)\ , \overline{BE} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$\frac{1}{2}$ $\overline{DE} \subset (DAC)\ , \overline{DE} \perp \overleftrightarrow{AC}$

1 $\therefore$ $B\hat{E}D$ هي الزاوية المستويه للزاوية الزوجية بين المستويين $(BAC), (DAC)$

لإيجاد قياس الزاوية الزوجية

$\frac{1}{2}$ $\because \overline{DB} \perp (ABC)$

1 $\therefore \overline{DB} \perp \overline{BE}$

$\frac{1}{2}$ المثلث DBE قائم في B

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $\tan(B\hat{E}D) = \frac{DB}{BE} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore m(B\hat{E}D) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 35.2644^\circ$

$\frac{1}{2}$ $\therefore$ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $(BAC), (DAC)$ حوالي $35^\circ\ 15'52''$

(2) حل المعادلة: $_nP_4 = 5 \times {}_nP_3 \quad , \quad n \geq 4$ **(3 درجات)**

الحل:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$\frac{n!}{(n-4)!} = 5 \times \frac{n!}{(n-3)!}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{(n-4)!} = \frac{5}{(n-3)(n-4)!}$
$\frac{1}{2}$	$n - 3 = 5$
$\frac{1}{2}$	$n = 8$

(b) حل المعادلة : $_6p_r = 4 \times {}_6p_{r-1}$ **(7 درجات)**

	$_6p_r = 4 \times {}_6p_{r-1}$
$1+1$	$\frac{6!}{(6-r)!} = 4 \times \frac{6!}{(6-(r-1))!}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{6!}{(6-r)!} = \frac{4 \times 6!}{(6-r+1)!}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{6!}{(6-r)!} = \frac{4 \times 6!}{(7-r) \times (6-r)!}$
1	$\frac{6!}{(6-r)!} \times \frac{(6-r)!}{6!} = \frac{4 \times 6!}{(7-r) \times (6-r)!} \times \frac{(6-r)!}{6!}$
1	$1 = \frac{4}{(7-r)}$
1	$7 - r = 4$
$\frac{1}{2}$	$r = 7 - 4$
$\frac{1}{2}$	$r = 3$

(b) حل المعادلة : $_nC_4 = {_nC_{n-2}}$

1 $$\frac{n!}{(n-4)!\times 4!} = \frac{n!}{2!\times(n-2)!}$$

1 + 1 $$\frac{1}{(n-4)!\times 4\times 3\times 2!} = \frac{1}{2!\times(n-2)(n-3)(n-4)!}$$

1 $$\frac{1}{4\times 3} = \frac{1}{(n-2)(n-3)}$$

$\frac{1}{2}$ $$4\times 3 = (n-2)(n-3)$$

$\frac{1}{2}$ $$12 = n^2 - 5n + 6$$

$\frac{1}{2}$ $$n^2 - 5n - 6 = 0$$

$\frac{1}{2}$ $$(n-6)(n+1) = 0$$

1 $n = 6$, $n = -1$ مرفوضة

تابع السؤال الثالث :

(b) أوجد قيمة n حيث : $\dfrac{_nC_7}{_{(n-1)}C_6} = \dfrac{8}{7}$

(7 درجات)

الحل :

$$\frac{_nC_7}{_{(n-1)}C_6} = \frac{8}{7}$$

2 $$\frac{\dfrac{n!}{(n-7)!\times 7!}}{\dfrac{(n-1)!}{(n-1-6)!\times 6!}} = \frac{8}{7}$$

3 $$\frac{n\times\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-7)!}\times 7\times\cancel{6!}}\times\frac{\cancel{(n-7)!}\times\cancel{6!}}{\cancel{(n-1)!}} = \frac{8}{7}$$

1 $$\frac{n}{7} = \frac{8}{7}$$

1 $$n = 8$$

(b) أوجد قيمة n حيث : $\dfrac{{}_{n}C_5}{{}_{(n-1)}C_4}=\dfrac{6}{5}$ (5 درجات)

	$\dfrac{{}_{n}C_5}{{}_{n-1}C_4}=\dfrac{6}{5}$
$1+1$	$\dfrac{n!}{(n-5)!\ 5!}\div\dfrac{(n-1)!}{(n-1-4)!\ 4!}=\dfrac{6}{5}$
$\frac{1}{2}$	$\dfrac{n!}{(n-5)!\ 5!}\times\dfrac{(n-5)!\ 4!}{(n-1)!}=\dfrac{6}{5}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$\dfrac{n(n-1)!}{(n-5)!\ 5.4!}\times\dfrac{(n-5)!\ 4!}{(n-1)!}=\dfrac{6}{5}$
$\frac{1}{2}$	$\dfrac{n}{5}=\dfrac{6}{5}$
$\frac{1}{2}$	$n=6$

(b) ❶ حل المعادلة : ${}_{n}C_2=105$ (3 درجات)

الحل✍:

1	$\dfrac{n!}{(n-2)!\times 2!}=105$
½	$\dfrac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\times 2!}=105$
½	$n(n-1)=210$
½+½	$n(n-1)=15\times 14 \longrightarrow n=15$

(b) حل المعادلة : $_nC_4 = {_nC_{n-2}}$

$$\frac{n!}{(n-4)!\times 4!} = \frac{n!}{2!\times(n-2)!}$$

$$\frac{1}{(n-4)!\times 4\times 3\times 2!} = \frac{1}{2!\times(n-2)(n-3)(n-4)!}$$

$$\frac{1}{4\times 3} = \frac{1}{(n-2)(n-3)}$$

$$4\times 3 = (n-2)(n-3)$$

$$12 = n^2 - 5n + 6$$

$$n^2 - 5n - 6 = 0$$

$$(n-6)(n+1) = 0$$

$n = 6$, $n = -1$ مرفوضة

نموذج إجابة امتحان الفترة الدراسية الثانية للصف الحادي عشر علمي - الرياضيات - العام الدراسي: 2023 / 2024 م

السؤال الرابع : (15 درجة)

(a) استخدم نظرية ذات الحدين لفك ما يلي :

$(x-2)^4$

(8 درجات)

الحل :

$\frac{1}{2}$	$(x-2)^4 = (x+(-2))^4$
كل حد 1	$(x-2)^4 = {_4C_0}x^4 + {_4C_1}x^3(-2) + {_4C_2}x^2(-2)^2 + {_4C_3}x(-2)^3 + {_4C_4}(-2)^4$
كل معامل $\frac{1}{2}$	$= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

(b) (1) استخدم نظرية ذات الحدين لإيجاد مفكوك $(x-2y)^3$ (4 درجات)

$4\times\frac{1}{2}$ | $(x-2y)^3 = {}_3C_0\,(x)^3 + {}_3C_1\,(x)^2(-2y) + {}_3C_2(x)(-2y)^2 + {}_3C_3(-2y)^3$

1 | $(x-2y)^3 = x^3 + 3\,x^2\,(-2y) + 3\,x\,(-2y)^2 + (-2y)^3$

1 | $(x-2y)^3 = x^3 - 6\,x^2\,y + 12\,x\,y^2 - 8\,y^3$

أوجد الحد الذي يحتوي على $x^3\,y^4$ في مفكوك $(2x+3y)^7$

الحل:

الحد الذي رتبته $r+1$ هو : $T_{r+1} = {}_nC_r\,.x^{n-r}.\,y^r$

في مفكوك كثيرة الحدود $(2x+3y)^7$, $n=7$

$\because$ أس y يساوي 4 $\therefore\ r=4$

$$T_5 = {}_7C_4\,.(2x)^3.\ (3y)^4$$
$$=(35)\,2^3\,x^3.\ 3^4\,y^4$$
$$=(35)(8)(81)x^3\,y^4$$
$$=22680\,x^3\,y^4$$

(c) في مفكوك $(x-y)^{12}$ أوجد الحد الخامس (3 درجات)

❷ يستخدم حوالي 11% من الطلاب في أحد المدارس اليد اليسرى للكتابة.
يوجد في أحد الصفوف 30 طالبا، فما احتمال أن يكون 4 طلاب من هذا الصف يستخدمون اليد اليسرى للكتابة. (3 درجات)

الحل هـ: نفرض الحدث A : استخدام اليد اليسرى في الكتابة
الحدث B : عدم استخدام اليد اليسرى في الكتابة
الحدث E : 4 طلاب يستخدمون اليد اليسرى في الكتابة

$P(A) = m = \frac{11}{100} = 0.11 \quad , \quad P(B) = 1 - m = 0.89$ ½ + ½

للحدث E يكون $n = 30$, $k = 4$ ½

فيكون احتمال أن يكون 4 طلاب من هذا الصف يستخدمون اليد اليسرى للكتابة هو

$P(E) = {}_nC_k \ (m)^k \ (1-m)^{n-k}$ ½

$= {}_{30}C_4 \ (0.11)^4 \ (0.89)^{26}$ ½

$= 0.19388$ ½

b) يحتوي كيس على 4 كرات زرقاء اللون و كرتين حمراء اللون .أخذت كرتان معا من دون النظر داخل الكيس . أوجد احتمال كل حدث مما يلي :

1) الكرتان زرقاوان

2) كرة زرقاء و كرة حمراء

الحل:

1	1) $n(S) = {}_6C_2 = \dfrac{6!}{(6-2)! \times 2!} = 15$
	الحدث A : الكرتان زرقاوان
1	$n(A) = {}_4C_2 = \dfrac{4!}{(4-2)! \times 2!} = 6$
1	$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$
	2) الحدث B : كرة زرقاء و كرة حمراء
1	$n(B) = {}_4C_1 \times {}_2C_1$
1 + 1	$= \dfrac{4!}{(4-1)! \times 1!} \times \dfrac{2!}{(2-1)! \times 1!} = 4 \times 2 = 8$
1	$P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{8}{15}$

(b) خلال شهر التسوق يقدم أحد المحلات العرض التالي : عند شراء كل صنف تحصل على بطاقة. تفوز 30% من البطاقات بجوائز ويتم اختيار هذه البطاقات الرابحة بشكل عشوائي ، مع راشد 4 بطاقات ، فما احتمال أن يفوز راشد بجائزتين ؟ (7 درجات)

الحل :

نفرض الحدث A : فوز راشد بجائزة	
$P(A) = m = 0.30$	1
نفرض الحدث B : عدم فوز راشد بجائزة	
$P(B) = 1 - m = 0.70$	1
نفرض الحدث E : فوز راشد بجائزتين	
فيكون $n = 4 \quad , \quad k = 2$	1
$P(E) = {}_nC_k (m)^k (1-m)^{n-k}$	1
$= {}_4C_2 (0.3)^2 (0.7)^2$	2
$= 0.2646$	1

تابع السؤال الثالث :

(b) في احدى الآلات الحاسبة 4 بطاريات . احتمال أن تخدم كل بطارية مدة عام كامل يساوي 90% ما احتمال أن تخدم كل من البطاريات الاربع مدة عام كامل ؟

(7 درجات)

الحل :

ليكن الحدث A تخدم البطارية مدة عام كامل : $P(A) = m = 0.9$	$1+\frac{1}{2}$
ليكن الحدث B لا تخدم البطارية مدة عام كامل : $P(B) = 1 - m = 0.1$	$1+\frac{1}{2}$
الحدث E تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام كامل:	
نستخدم احتمال ذات الحدين $k = 4 , n = 4$	
$P(E) = {}_nC_k \cdot (m)^k \cdot (1-m)^{n-k}$	1
$= {}_4C_4 \cdot (0.9)^4 \cdot (0.1)^0$	$1\frac{1}{2}$
$= 0.6561$	1
احتمال أن تخدم كل من البطاريات الاربع مدة عام كامل يساوي 0.6561	$\frac{1}{2}$