الإجابات :

Hala Labeeb

H.L.

٢٠٢١ - ٢٠٢٠

القائد

في

الرياضيات

حساب المثلثات

الصف العاشر الثانوي
الفصل الدراسي الثاني

إعداد / أ : إبراهيم عطية
ت : ٥٠٧٥٢٨٨٨

الوحدة الثامنة

بدأ بيد نحو التميز في الرياضيات

1

هدية مجانية

H.L.

الربع الأول: جا θ > ٠ +، جتا θ > ٠ +
الربع الثاني: جا θ > ٠ +، جتا θ < ٠ −
الربع الثالث: جا θ < ٠ −، جتا θ < ٠ −
الربع الرابع: جا θ < ٠ −، جتا θ > ٠ +
٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠° ، ٠°

الوحدة الثامنة

درس (٨ - ١)

{١} حـــدد إشارة جا θ ، جتـــا θ في كل مما يلي :

(أ) θ = ١٣٥°

$٩٠° < \theta < ١٨٠°$
θ تقع في الربع الثاني
∴ جا θ > ٠
جتا θ < ٠

(ب) θ = ٣٠٥°

$٢٧٠° < \theta < ٣٦٠°$
θ تقع في الربع الرابع
جا θ < ٠
جتا θ > ٠

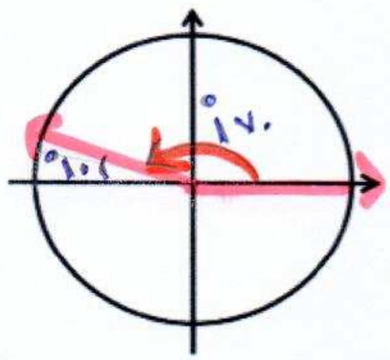
(جـ) $\theta = \frac{٧\pi}{٦}$

$\pi < \theta < \frac{٣}{٢}\pi$
θ تقع في الربع الثالث
جا θ < ٠
جتا θ < ٠

{٢} ارسم كلاً من الزوايا الموجهة في وضع قياسي ثم عين زاوية الإسناد ، وأوجـــد قياسهـــا .

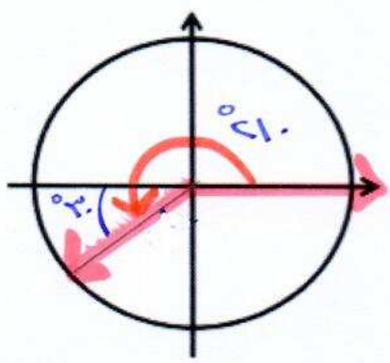
(أ) ١٧٠°

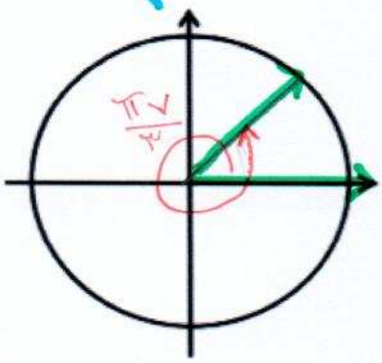
θ = ١٧٠°
θ تقع في الربع الثاني
∴ قياس زاوية الإسناد α = ١٨٠° − θ
= ١٨٠° − ١٧٠°
= ١٠°



(ب) ٢١٠°

θ = ٢١٠°
θ تقع في الربع الثالث
∴ قياس زاوية الإسناد α = θ − ١٨٠°
= ٢١٠° − ١٨٠°
= ٣٠°





(جـ) $\frac{7\pi}{3}$

$\theta = \frac{٧ط}{٣}$

θ تقع في الربع الأول

$\theta = \frac{٧ط}{٣} - ٢ط$

$\theta = \frac{١}{٣}ط$

$\therefore \alpha = \theta = \frac{١}{٣}ط$

{٣} في أي ربـع أو علي أي محـور يقع الضلع النهائي لكل من الزوايا التالية :

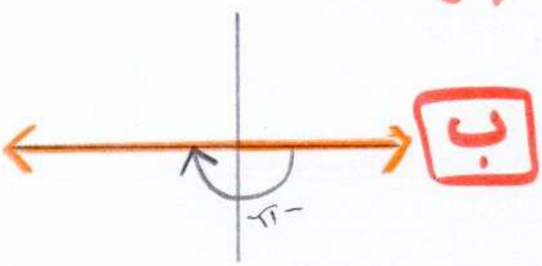
(أ) ١٥٠° الربع الثاني

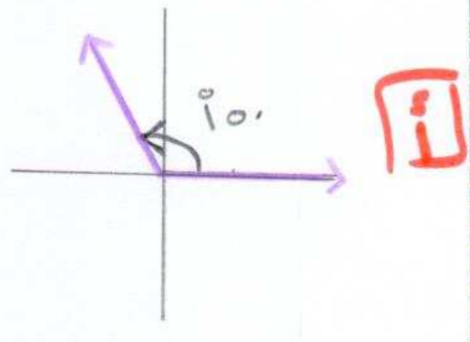
(ب) $-\pi$ على محور السينات السالب

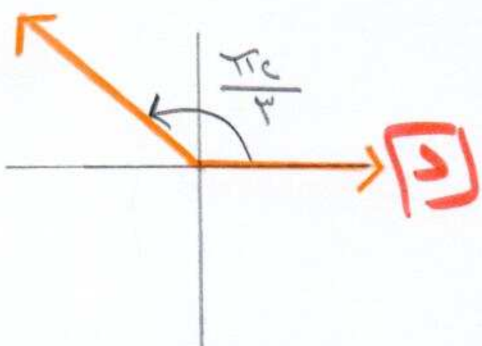
(جـ) − ٦٠° الربع الرابع

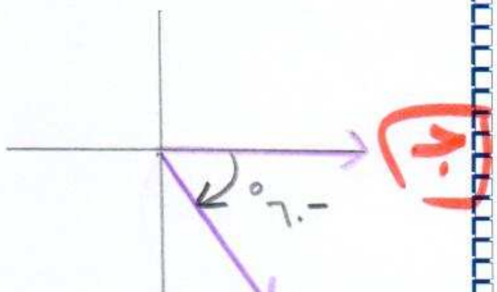
(د) $\frac{2\pi}{3}$ الربع الثاني

إبراهيم عطية









H.L.

درس (٨ – ٢)

{١} أوجـــد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة :

(أ) جا ١٥٠° = جا (١٨٠° − ٣٠°)
= جا ٣٠°
= $\frac{1}{2}$

(ب) ظا (− ٢٢٥°) = − ظا ٢٢٥°
= − ظا (١٨٠° + ٤٥°)
= − ظا ٤٥°
= − ١

(جـ) جتا (− ١٣٥°) = جتا ١٣٥°
= جتا (١٨٠° − ٤٥°)
= − جتا ٤٥°
= $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(د) جتا $\frac{7\pi}{6}$ = جتا $(\pi + \frac{\pi}{6})$
= − جتا $\frac{\pi}{6}$
= $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(هـ) جا $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ = − جا $(\pi - \frac{\pi}{3})$
= − جا $(\frac{\pi}{3})$
= $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(و) ظا $\frac{11\pi}{6}$ = ظا $(2\pi - \frac{\pi}{6})$
= − ظا $(\frac{\pi}{6})$
= $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(ح) جا ٣٩٠° = جا (٣٦٠° + ٣٠°)
= جا ٣٠°
= $\frac{1}{2}$

(ي) قتا ٤٥٠° = قتا (٣٦٠° + ٩٠°)
= قتا ٩٠°
= ١

{٢} اكتب النسب المثلثية التالية بدلالة إحدي النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ :

(أ) جـا $(\pi + \theta)$ = ـ جا θ

(ب) جتـا $(\pi - \theta)$ = ـ جتا θ

(جـ) جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = جتا θ

(د) جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جا θ

(هـ) ظـا (١٨٠° − س) = ـ ظا س

(و) جتـا (١٨٠° + س) = ـ جتا س

إبراهيم عطية

(ح) جـا (- س) = ـ جا س

(ي) ظتـا $(\pi + \theta)$ = ظتا θ

(م) قتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = قا θ

(س) ظتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = ـ ظا θ

H.L.

{٣} **بسط التعبير التالي لأبسط صورة :**

(أ) جا س + جا (٩٠° + س) + جا (١٨٠° + س) + جا (٩٠° − س)

= ~~جا س~~ + جتا س − ~~جا س~~ + جتا س

= ٢ جتا س

(ب) جتا$(\pi - \theta)$ − جتا$(-\theta)$ + جا$(\pi + \theta)$ + جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

= − جتا θ − جتا θ − ~~جا~~ θ + ~~جا~~ θ

= −٢ جتا θ

إبراهيم عطية

(جـ) جا$(\pi + \theta)$ − جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جتا$(\theta - \pi)$ + جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$.

− ~~جا~~ θ + ~~جا~~ θ − ~~جتا~~ θ + ~~جتا~~ θ

= صفر

H.L.

{٤} **حل كلاً من المعادلات التالية :**

(أ) جتـا س = $\frac{١}{٢}$

جتا س = جتا $\frac{\pi}{٣}$

∵ جتا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الرابع

∴ س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π

أو

س = $-\frac{\pi}{٣}$ + ٢ك π

(ك ∈ ص)

(ب) ٢ جـا س = $\sqrt{٢}$

$\frac{\text{٢ جا س}}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

جا س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

جا س = جا $\frac{\pi}{٤}$

∵ جا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الثاني

∴ س = $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ك π

أو س = $(\pi - \frac{\pi}{٤})$ + ٢ك π

س = $\frac{٣}{٤}\pi$ + ٢ك π (ك ∈ ص)

(جـ) $\sqrt{٣}$ ظـا س = ١

$\frac{\sqrt{٣}\text{ ظا س}}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

ظا س = ظا $\frac{\pi}{٦}$

∵ ظا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الثالث

∴ س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π

أو

س = $(\pi + \frac{\pi}{٦})$ + ٢ك π

س = $\frac{٧}{٦}\pi$ + ٢ك π

(ك ∈ ص)

(د) ظتـا س = $\sqrt{٣}$

ظا س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

ظا س = ظا $\frac{\pi}{٦}$

∵ ظا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الثالث

س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ك π

أو

س = $(\pi + \frac{\pi}{٦})$ + ٢ك π

س = $\frac{٧}{٦}\pi$ + ٢ك π

(ك ∈ ص)

H.L.

درس (٨ – ٣)

{١} اذا كانت : جتـــا θ = $\frac{١}{٣}$ ، جـا θ < ٠ ، أوجـــد : جـاθ ، ظتـــا θ

جا²θ + جتا²θ = ١ (متطابقة فيثاغورث)

جا²θ + $(\frac{١}{٣})^٢$ = ١

جا²θ + $\frac{١}{٩}$ = ١

جا²θ = ١ − $\frac{١}{٩}$

جا²θ = $\frac{٨}{٩}$

جاθ = $\sqrt{\frac{٨}{٩}}$

جاθ = $\frac{\pm ٢\sqrt{٢}}{٣}$

∵ جاθ < ٠

∴ جاθ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

ظتاθ = $\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$

= $\frac{\frac{١}{٣}}{\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}}$

= $-\frac{\sqrt{٢}}{٤}$

إبراهيم عطية

{٢} اذا كانت : جـا θ = $\frac{١}{٥}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$

أوجـــد قيمة النسب المثلثية الأخرى للزاوية θ

جا²θ + جتا²θ = ١ (متطابقة فيثاغورث)

$(\frac{١}{٥})^٢$ + جتا²θ = ١

$\frac{١}{٢٥}$ + جتا²θ = ١

جتا²θ = ١ − $\frac{١}{٢٥}$

= $\frac{٢٤}{٢٥}$

جتاθ = $\sqrt{\frac{٢٤}{٢٥}}$

= $\pm\frac{٢\sqrt{٦}}{٥}$

∵ ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$

∴ جتاθ > ٠

جتاθ = $\frac{٢\sqrt{٦}}{٥}$

قتاθ = $\frac{١}{\text{جا}\theta}$

= ٥

قاθ = $\frac{١}{\text{جتا}\theta}$

= $\frac{٥\sqrt{٦}}{١٢}$

ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

= $\frac{\frac{١}{٥}}{\frac{٢\sqrt{٦}}{٥}}$

= $\frac{\sqrt{٦}}{١٢}$

ظتاθ = $\frac{١}{\text{ظا}\theta}$

= $\boxed{٢\sqrt{٦}}$

H.C.

{٣} اذا كان : ظا θ = $\frac{٣}{٤}$ ، جا θ < ٠ ، أوجـــد : جاθ ، جتا θ

$\text{ظا}\,\theta = \frac{٣}{٤}$

$\text{قا}^2\theta = ١ + \text{ظا}^2\theta$

$\text{قا}^2\theta = ١ + \left(\frac{٣}{٤}\right)^2$

$\text{قا}^2\theta = \frac{٢٥}{١٦}$

$\text{قا}\,\theta = \sqrt{\frac{٢٥}{١٦}}$

∴ $\text{قا}\,\theta = \frac{٥}{٤}$ أو $\text{قا}\,\theta = \frac{-٥}{٤}$

$\frac{١}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{٥}{٤}$ أو $\frac{١}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{-٥}{٤}$

$\text{جتا}\,\theta = \frac{٤}{٥}$ أو $\text{جتا}\,\theta = \frac{-٤}{٥}$

∵ ظا θ > ٠

، جا θ < ٠

∴ $\text{جتا}\,\theta = \frac{-٤}{٥}$

$\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{٣}{٤}$

$٤\,\text{جا}\,\theta = ٣\,\text{جتا}\,\theta$

$٤\,\text{جا}\,\theta = ٣ \times \frac{-٤}{٥}$

$٤\,\text{جا}\,\theta = \frac{-١٢}{٥}$

$\text{جا}\,\theta = \frac{\frac{-١٢}{٥}}{٤}$

$\text{جا}\,\theta = \frac{-٣}{٥}$

{٤} اذا كان : ظا θ = $\frac{٢٤}{٧}$ ، جتا θ < ٠ ، أوجـــد : جاθ ، جتا θ

$\text{ظا}\,\theta = \frac{٢٤}{٧}$

$\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{٢٤}{٧}$

$\text{جا}\,\theta = \frac{٢٤}{٧}\,\text{جتا}\,\theta$ —— ①

∴ $\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = ١$ (متطابقة فيثاغورث)

$\left(\frac{٢٤}{٧}\,\text{جتا}\,\theta\right)^2 + \text{جتا}^2\theta = ١$

$\frac{٥٧٦}{٤٩}\,\text{جتا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = ١$

$\frac{٦٢٥}{٤٩}\,\text{جتا}^2\theta = ١$

$\text{جتا}^2\theta = \frac{١}{\frac{٦٢٥}{٤٩}}$

H.C.

$جتا^2 \theta = \frac{٤٩}{٦٢٥}$

$جتا \theta = \sqrt{\frac{٤٩}{٦٢٥}}$

$جتا \theta = \frac{٧}{٢٥}$ أو $جتا \theta = -\frac{٧}{٢٥}$ (مرفوضة)

$\because جتا \theta > ٠$

$\therefore جتا \theta = \frac{٧}{٢٥}$

س ① :

$جا \theta = \frac{٢٤}{٧} جتا \theta$

$جا \theta = \frac{٢٤}{٧} \times \frac{٧}{٢٥}$

$\therefore جا \theta = \frac{٢٤}{٢٥}$

H.C.

{٥} اذا كان : جـا θ = $\frac{٣}{٧}$ ، جتـا θ < ٠ ، أوجـــد : ظتـاθ ، ظـا θ

باستخدام متطابقة فيثاغورث :

جا$^2\theta$ + جتا$^2\theta$ = ١

$(\frac{٣}{٧})^2$ + جتا$^2\theta$ = ١

$\frac{٩}{٤٩}$ + جتا$^2\theta$ = ١

جتا$^2\theta$ = ١ − $\frac{٩}{٤٩}$

جتا$^2\theta$ = $\frac{٤٠}{٤٩}$

جتاθ = $\sqrt{\frac{٤٠}{٤٩}}$

جتاθ = $\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧}$ أو جتاθ = $-\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧}$ (مرفوضة)

∵ جتاθ < ٠

∴ جتاθ = $\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧}$

ظتاθ = $\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$

ظتاθ = $\frac{\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧}}{\frac{٣}{٧}}$

ظتاθ = $\frac{٢\sqrt{١٠}}{٣}$

ظاθ = $\frac{١}{\text{ظتا}\theta}$

= $\frac{٣\sqrt{١٠}}{٢٠}$

{٦} **أثبت صحــة كل من المتطابقات التالية :**

(أ) جتـا^{4}س + جـا^{2}س × جتـا^{2}س = جتـا^{2}س

(ب) **أثبت صحة المتطابقـــة :** $\frac{(\text{قـا}\theta + ١)(\text{قـا}\theta - ١)}{\text{جـا}^2\theta}$ = قـا$^2\theta$ ، حيث المقام ≠ ٠

الإجابات

H.L.

٦ أ

جتا^{4}س + جا^{2}س × جتا^{2}س = جتا^{2}س

الطرف الأيمن :

جتا^{4}س + جا^{2}س × جتا^{2}س = جتا^{2}س (جتا^{2}س + جا^{2}س)

= جتا^{2}س × ١

= جتا^{2}س

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

---

٦ ب

$$\frac{(\text{قا}\,\theta + ١)(\text{قا}\,\theta - ١)}{\text{جا}\,\theta} = \text{قا}^{2}\,\theta$$

الطرف الأيمن :

$$\frac{(\text{قا}\,\theta + ١)(\text{قا}\,\theta - ١)}{\text{جا}\,\theta} = \frac{\text{قا}^{2}\,\theta - \cancel{\text{قا}\,\theta} + \cancel{\text{قا}\,\theta} - ١}{\text{جا}\,\theta}$$

$$= \frac{\text{قا}^{2}\,\theta - ١}{\text{جا}\,\theta}$$

$$= \frac{\text{ظا}^{2}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$$

$$= \text{ظا}^{2}\,\theta \times \frac{١}{\text{جا}\,\theta}$$

$$= \frac{\cancel{\text{جا}^{2}\,\theta}}{\text{جتا}^{2}\,\theta} \times \frac{١}{\cancel{\text{جا}\,\theta}}$$

$$= \frac{١}{\text{جتا}^{2}\,\theta}$$

$$= \text{قا}^{2}\,\theta$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(جـ) (قا$^2\theta$ + قتا$^2\theta$) − (ظا$^2\theta$ + ظتا$^2\theta$) = ٢

قا$^2\theta$ + قتا$^2\theta$ − ظا$^2\theta$ + ظتا$^2\theta$ = ٢

الطرف الأيمن:

قا$^2\theta$ + قتا$^2\theta$ − ظا$^2\theta$ − ظتا$^2\theta$ =

$= \frac{1}{جتا^2\theta} + \frac{1}{جا^2\theta} - \frac{جا^2\theta}{جتا^2\theta} - \frac{جتا^2\theta}{جا^2\theta}$

$= \frac{1}{جتا^2\theta} - \frac{جا^2\theta}{جتا^2\theta} + \frac{1}{جا^2\theta} - \frac{جتا^2\theta}{جا^2\theta}$

$= \frac{1 - جا^2\theta}{جتا^2\theta} + \frac{1 - جتا^2\theta}{جا^2\theta} = \frac{جتا^2\theta}{جتا^2\theta} + \frac{جا^2\theta}{جا^2\theta} = 1 + 1 = 2$

∴ الطرفان متساويان

(د) (١ − جتا$^2\theta$) (١ + ظتا$^2\theta$) = ١

الطرف الأيمن:

(١ − جتا$^2\theta$)(١ + ظتا$^2\theta$) = جا$^2\theta$ × قتا$^2\theta$

$= \cancel{جا^2\theta} \times \frac{1}{\cancel{جا^2\theta}} = 1$

∴ الطرفان متساويان

(هـ) ١ + ظتا$^2(-\theta)$ = قتا$^2\theta$

الطرف الأيمن:

١ + ظتا$^2(-\theta)$ = ١ + ظتا$^2\theta$

= قتا$^2\theta$

∴ الطرفان متساويان