Math Leader
القائد في الرياضيات

الصــــف الثاني عشر علمي

الفترة الدراســية الاولى (2)

دفتر متابـــعة الطالـــب

2019 / 2020

Samer ALKASSAR

" هذا الدفتر لايغني عن كتاب الطالب وكراسة التمارين "

2-3 قواعد الاشتقاق

قاعدة (1) مشتقة دالة ثابتة

إذا كانت $f(x) = k$ حيث k عدد ثابت فإن $f'(x) = 0$ لجميع قيم x الحقيقية

يمكننا القول بأن مشتقة أيّ دالّة ثابتة تساوي صفراً

$$f(x) = 5 \Longrightarrow f'(x) = 0$$

قاعدة (2) مشتقة الدالة $f(x) = x$

إذا كانت $f(x) = x$ فإن $f'(x) = 1$ لجميع قيم x الحقيقية

قاعدة (3) قاعدة القوى للأسس الصحيحة الموجبة للمتغيّر x

إذا كان $f(x) = x^n$ حيث n عدد صحيح موجب $n \neq 1$ فإن :

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$$

أي أن : $f'(x) = n\,x^{n-1}$

$$f(x) = x^4 \Longrightarrow f'(x) = 4x^3$$

قاعدة (4) : قاعدة الضرب بعدد ثابت

إذا كانت f دالة في x قابلة للاشتقاق وكان k عدداً ثابتاً فإنّ :

$$\frac{d}{dx}(kf(x)) = k\frac{d}{dx}f(x)$$

أي أن : $(k\,f(x))' = k\,f'(x)$

أي أن : مشتقة ضرب دالة قابلة للاشتقاق في ثابت هو مشتقة هذه الدالة مضروبة في الثابت

قاعدة (5) : قاعدة الجمع والطرح

إذا كانت g ، f دالتين في x قابلتين للإشتقاق ، فإنّ مجموعهما والفرق بينهما يكونان قابلين للاشتقاق عند كلّ نقطة تكون عندها كلّ من g ، f قابلة للاشتقاق

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)\pm\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)$$

أي أن: $\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x)$

مثال (1) أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y=5x^3-4x^2+6$

تطبيق (1) أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y=\frac{x^3}{3}-x$

قاعدة(6) : اشتقاق حاصل ضرب دالتين

ضرب دالتين f . g في x قابلتين للاشتقاق يكون قابلاً للاشتقاق بحيث :

$$\frac{d}{dx}(f(x).\,g(x))=f(x).\frac{d}{dx}(g(x))+g(x).\frac{d}{dx}(f(x))$$

أي أن: $(f(x).\,g(x))' = f(x).\,g'(x) + g(x) \bullet f'(x)$

يمكننا القول إن

مشتقة ضرب دالتين = الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية ×مشتقة الدالة الأولى .

مثال (2) أوجد $f'(x)$ إذا كان :

(1) $f(x) = (2x + 1)\ (3x - 2)$

(2) $f(x) = 4x^2(x + 6)$

(3) $f(x) = (x^3 - 4)^2$

قاعدة(7) : قاعدة القسمة

لتكن g . f دالتين في x قابلتين للاشتقاق حيث $g(x) \neq 0$ فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

أي أن $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

مشتقة قسمة دالتين = (دالة المقام × مشتقة دالة البسط − دالة البسط × مشتقة دالة المقام) / مربع دالة المقام

مثال (3) أوجد مشتقة : $f(x)=\frac{4x^2+2x}{2x^3+5}$

تطبيق (3) أوجد مشتقة الدالة $f(x)=\frac{x^2}{1-x^3}$

يمكننا إيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(a \,.\, f(a))$ عن طريق إيجاد المشتقة عند هذه النقطة $f'(a)$ وتكون معادلة المماس لمنحني الدالة عند النقطة $(a.\, f(a))$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

معادلة المستقيم العمودي (الناظم) على منحنى الدالة عند النقطة $(a.\, f(a))$

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}\,(x - a)$$

مثال (4) أوجد معادلة المماس ومعادلة و معادلة الناظم عند النقطة $(1.\,0)$ لمنحنى الدالة f حيث

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

****

تطبيق (4) أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = x^3 + x$ عند النقطة (1.2)

نتيجة : إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق وكانت $g(x) \neq 0$ ، k عدداً ثابتا فإن :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{k}{g(x)}\right)=\frac{-k.\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

أي أن: $$\left(\frac{k}{g(x)}\right)'=\frac{-k\bullet(g'(x))}{(g(x))^2}$$

مثال (5) أوجد $f'(x)$ حيث $f(x)=\dfrac{-4}{x^2+2x+5}$

تطبيق (5) أوجد معادلة المماس و معادلة العمودي (الناظم) لمنحنى الدالة $y = \frac{8}{4+x^2}$

عند النقطة (2.1)

واجب:

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة f : $f(x) = \frac{5x-7}{x^2-2}$ عند النقطة $A(1\,.\,2)$

قاعدة (8): x قاعدة القوى للأسس الصحيحة السالبة للمتغيّر

إذا كان n عدد صحيحاً موجباً ، $x \neq 0$ فإن :

$$\frac{d}{dx}(x^{-n})=-n\,x^{-n-1}$$

أي أن: $(x^{-n}) = -n\,x^{-n-1}$

مثال (6) لتكن $y = \frac{x^2+3}{2x}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

تطبيق (6) لتكن $y = \frac{3x^2+7}{8x^2}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$

****

قاعدة (9):

إذا كان $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ حيث n ، m عددان صحيحان ، $n \neq 0$ فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n}\, x^{\frac{m}{n}-1}$$

لجميع قيم x التي تكون المشتقة عندها موجودة

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n}\, x^{\frac{m}{n}-1}$$

نتيجة : إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ فإن $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال (7) أوجد مشتقة الدالة f : $x > 0$ ، $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$

تطبيق (7) أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$

****

مثال (8) أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية :

1 $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 : & x \le 2 \\ 4x - 3 : & x > 2 \end{cases}$$

****

2 $f(x)=\begin{cases} x^2+1: & x<1 \\ 2\sqrt{x}: & x\geq 1 \end{cases}$

****

تطبيق (8) لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x-\frac{4}{x} & : x\geq 2 \\ x^2-4 & : x<2 \end{cases}$ أوجد $f'(x)$ و عين مجالها .

واجب:

لتكن الدالة g : $g(x)=\begin{cases} (x-2)^2 & : x\leq 1 \\ 3x-2 & : x>1 \end{cases}$ أوجد إن أمكن $g'(1)$

2-4 مشتقات الدوال المثلثية

أولاً : مشتقات الدوال الجيبية :

1 مشتقة دالة الجيب هي موجب دالة جيب التمام .

$$\frac{d}{dx}(sinx) = cosx$$

2 مشتقة دالة جيب التمام هي سالب دالة الجيب .

$$\frac{d}{dx}(cosx) = -sinx$$

مثال (1) أوجد المشتقات للدوال التالية :

a $h(x) = \cos^2 x$

b $g(x) = \frac{x}{\cos x}$

c $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

تطبيق (1) أوجد المشتقات للدوال التالية :

(1) $y = 4 - x^2 \sin x$

(2) $y = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$

****

ثانياً : مشتقات الدوال المثلثية الأخرى

1. $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
2. $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$
3. $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$
4. $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$

مثال (2) أوجد مشتقات الدوال التالية :

1. $y = 2\sin x - \tan x$

2. $g(x) = \sec x + \csc x$

3. $h(x) = \frac{\sec x}{\csc x}$

****

تطبيق (2) أوجد مشتقة الدالة التالية :

$$y = \frac{\cot x}{1 + \cot x}$$

مثال (3) أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة : $y = \sec x$ عند النقطة $F\left(\frac{\pi}{3}.2\right)$

تطبيق (3) لتكن: $y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sin x}$ ، أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة عند $P\left(\frac{\pi}{4}.4\right)$

****

واجب : أثبت أن منحنى كل من الدالتين $y = \frac{1}{\cos x}$. $y = \cos x$ له مماس أفقي عند $x = 0$

واجب:

أوجد ميل المماس $\frac{dy}{dx}$ للمنحنى الذي معادلته : $2y = x^2 - \cos y$ عند النقطة $A(2.0)$

2-5 قاعدة السلسلة

قاعدة السلسلة (التسلسل)

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$ ، الدالة g قابلة للاشتقاق عند x ، فإن الدالة المركبة

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

تكون قابلة للاشتقاق عند x ، ويكون : $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \bullet g'(x)$

مثال (1) لتكن : $g(x) = x^{13}$. $f(x) = -2x^3 + 4$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة

$(fog)'(x)$. $(gof)'(0)$

تطبيق (1) لتكن : $g(x) = 3x^2$. $f(x) = 2x + 1$ أوجد $(fog)'(x)$

مثال (2) لتكن : $g(x) = \sqrt{x}$. $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(fog)'(1)$

تطبيق (2) أوجد $(fog)'$ عند القيم المعطاة لـ x

$f(x) = x^5 + 1$. $g(x) = \sqrt{x}$. $x = 1$

صورة أخرى لقاعدة السلسلة

إذا كانت $\boldsymbol{u = g(x)}$. $\boldsymbol{y = f(u)}$ فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

يتم حسابها عند $\boldsymbol{u = g(x)}$

مثال (3) لتكن : $y = u^2 + 4u - 3$. $\mathrm{u} = 2x^3 + x$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

تطبيق (3) لتكن : $y = \cos u$. $u = 6x + 2$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

مثال (4) أوجد مشتقة $y = \sin(x^2 + x)$ بالنسبة إلى المتغير x

تطبيق (4) أوجد $\frac{dy}{dx}$:

$y = \sin(3x + 1)$

$y = \tan(2x - x^3)$

مثال (5) أوجد مشتقة الدالة : $f(x) = \sin^3 x$ باستخدام قاعدة السلسلة .

تطبيق (5) أوجد مشتقة الدالة : $f(x) = cos^5x$ باستخدام قاعدة السلسلة

قاعدة سلسلة القوى

إذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق على مجالها وكان n عددا نسبيا فإن :

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

مثال (6) لتكن : $y = \sqrt[5]{(x^2+3x+5)^3}$ أوجد : y'

تطبيق (6) لتكن : $y = \sqrt[4]{(2x^4-3x^2+4)^3}$ اوجد y'

تطبيق: أوجد : $\frac{dy}{dx}$

a $y = (\tan x + \sec x)^2$

b $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

c $y=\sin^2(3x-2)$

مثال (7) بيّن أن ميل أي مماس للمنحنى $y=\frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائماً يكون موجباً حيث $x\neq -\frac{1}{2}$

تطبيق (7) لتكن الدالة : $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ أوجد :

معادلة المماس و معادلة الخط العمودي على المماس عند النقطة $(2\ ,\ 3)$

2-6 المشتقات ذات الرتب العليا و الاشتقاق الضمني

أولاً : المشتقات ذات الرتب العليا :

مثال (1) إذا كانت : $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$ فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة .

تطبيق (1) إذا كانت : $y = \frac{3}{x-2}$ فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة .

,

مثال (2) لتكن الدالة : $y = \cos x$ بين أن $y^{(4)} + y'' = 0$.

تطبيق (2) أوجد y'' حيث $y = \frac{1}{\sin x}$

ثانياً : الاشتقاق الضمني

مثال (4) لتكن : $y^2 = x^2 - 2x$ أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$

تطبيق (4) أوجد : $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$

$y^2 = x^2 + 4x + 2$

$y^2 - 4y = x - 3$

مثال (5) أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $x = 1$

****

تطبيق (5) أوجد معادلة المماس و معادلة الخط العمودي على المماس على منحنى الدالة :

$x^2 + 2xy - y^2 = 7$ عند النقطة (2.3)

****

مثال (6) أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته : $x^2 + y^2 - 2yx = 1$

حيث $x \neq y$ عند النقطة (2.1)

****

تطبيق (6) أوجد معادلة المماس و معادلة الخط العمودي على المماس على منحنى الدالة :

$2xy + \pi \sin y = 2\pi$ عند النقطة $\left(1.\frac{\pi}{2}\right)$

مثال (7) للمنحنى الذي معادلته : $2\sqrt{y} + y = x$ أوجد y'

ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة (3.1)

تطبيق (7) للمنحنى الذي معادلته : $y^2+\sqrt{y}+x^2=3$ أوجد y'

ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة (1.1)

مثال(8) إذا كانت $y=\sqrt{1-2x}$ فأثبت أن $yy''+(y')^2=0$

تطبيق (8) إذا كانت $y = x\sin x$ فأثبت أن $y''' + y' + 2\sin x = 0$

مثال (9) لتكن $f(x)=\frac{1}{1-x}$ فأثبت أن : $f'''(x)=\frac{3!}{(1-x)^4}$

****

تطبيق (9) لتكن $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ فأثبت أن : $4xf''(x) - 3f(x) = 0$

الوحدة الثالثة تطبيقات على الاشتقاق

1- **النقطة الحرجة** : النقطة الداخلية للدالة f $\left(c.f(c)\right)$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة .

مثال (1) أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية :

a $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$

b $y = x\sqrt{3 - x}$

c $y = \begin{cases} 3 - x & : x < 0 \\ 3 + 2x - x^2 & : x \geq 0 \end{cases}$

2 - القيم القصوى المطلقة :

إذا كانت f دالّة مجالها D، $c \in D$، فإن $f(c)$ تسمى:

a قيمة عظمى مطلقة للدالة f على D عندما:

$$f(c) \geqslant f(x) \quad , \quad \forall x \in D_f$$

b قيمة صغرى مطلقة للدالة f على D عندما:

$$f(c) \leqslant f(x) \quad , \quad \forall x \in D_f$$

مثال (2) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$ في الفترة $[0.4]$

تطبيق (2) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$

في الفترة $[-2.1]$

مثال (3) (a) أوجد القيم العظمى و الصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

في الفترة $[-2.3]$

(b) إذا كانت الدالة f متصلة على $[1.4]$: $f(x) = x + \frac{4}{x}$ أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة في الفترة $[1.4]$

****

تطبيق (3) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ في الفترة $[0.4]$

تطبيق: أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^2}$ في الفترة $[-1.1]$

نظرية القيمة المتوسطة :

إذا كانت f دالة:

1. متّصلة على الفترة $[a , b]$
2. قابلة للاشتقاق على الفترة (a , b)

فإنّه يوجد على الأقل $c \in (a , b)$ بحيث $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

مثال (4) بيّن أن الدالة f : $f(x) = x^2 + 2x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3.1]$ ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية و فسّر إجابتك .

تطبيق (4) بيّن أن الدالة f : $f(x) = x + \frac{1}{x}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $\left[\frac{1}{2}.2\right]$
ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية و فسّر إجابتك .

تزايد و تناقص الدوال

تعريف :

لتكن f دالّة معرّفة على الفترة I . نقول إن:

1. f دالّة متزايدة على I إذا كان: $\forall x_1 , x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
2. f دالّة متناقصة على I إذا كان: $\forall x_1 , x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ملاحظة: تكون الدالة f ثابتة على الفترة I عندما: $\forall x_1 , x_2 \in I$, $f(x_1) = f(x_2)$

نظرية : الدوال المتزايدة و الدوال المتناقصة و الدوال الثابتة :

لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على (a , b).

1. إذا كانت $f'(x) > 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ f تتزايد على (a , b).
2. إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ f تتناقص على (a , b).
3. إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كلّ نقطة تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ الدالة f ثابتة على (a , b).

مثال (5) أوجد فترات التزايد و فترات التناقص للدالة f: $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

مثال (6) لتكن الدالة f: $f(x) = x^3 - 6x$ حدد فترات التزايد و فترات التناقص للدالة f

مثال (7) لتكن الدالة f: $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$ حدد فترات التزايد و فترات التناقص للدالة f

تعريف القيم القصوى المحلية

لتكن $(c , f(c))$ نقطة داخلية للدالة f، D فترة مفتوحة تحوي c، تكون $f(c)$:

a قيمة عظمى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D \quad , \quad f(c) \geqslant f(x)$

b قيمة صغرى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D \quad , \quad f(c) \leqslant f(x)$

نظرية : القيم القصوى المحلية :

إذا كانت للدالّة f قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محليّة عند $x = c$ فإنّ $(c ,\ f(c))$ نقطة حرجة.

نظرية : اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية :

لتكن f دالّة متّصلة على مجالها و كانت $(c,\ f(c))$ نقطة حرجة.

1 إذا كانت إشارة المشتقّة f' تتغيّر من الموجب إلى السالب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c.

2 إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة صغرى محلّية عند c.

3 إذا لم تتغيّر إشارة f' عند $x = c$ ، فإن f لا يكون لها قيمة قصوى محلّية عند c.

****

مثال (1)

لتكن الدالّة f : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالة.

b الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحلية.

مثال (2)

لتكن الدالّة f : $f(x) = x - 3 + \dfrac{4}{x-1}$

فأوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالّة.

b الفترات التي تكون عليها الدالّة f متزايدة وتلك التي تكون عليها متناقصة.

c القيم القصوى المحليّة.

مثال (3) لتكن $f : a . b \in R . \; f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$

وكان للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من : $x = \frac{1}{3} . x = 1$ أوجد قيمة كل من الثابتين $a . b$

تطبيق (3) أوجد قيمة كل من الثوابت $a.b.c$ لمنحنى الدالة $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c : f$
الذي يمر بنقطة الأصل و له نقطة حرجة (4.16)

****

تطبيق: أوجد قيمة كل من الثوابت $a.b$ بحيث يكون للدالة f : $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$

نقطة حرجة $x = 2$ و نقطة انعطاف عند $x = \frac{1}{2}$

****

نظرية اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

1 إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محليّة عند $x = c$

2 إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محليّة عند $x = c$

مثال (2) استخدم اختبار المشتقة الثانية لتجد القيم القصوى المحلية للدالة : $f(x) = 4x^3 - 12x^2$

تعريف التقعر :

إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعرًا لأعلى على I.
وإذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعرًا لأسفل على I.

اختبار التقعر :

a إذا كانت $\forall x \in I \;,\; f''(x) > 0$ فإن منحنى الدالة f مقعرًا لأعلى على I

b إذا كانت $\forall x \in I \;,\; f''(x) < 0$ فإن منحنى الدالة f مقعرًا لأسفل على I.

تعريف نقطة الانعطاف :

تسمّى النقطة $(c , f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالّة متّصلة عند c،
ومنحنى الدالة f يغيّر تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

مثال (3) أوجد فترات التقعر و نقطة الانعطاف لمنحنى الدالة : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

الخطوات اللازم اتباعها في دراسة تغير الدالة كثيرة الحدود و رسم بيانها :

1. عيّن مجال الدالة f.
مجال دالة كثيرة الحدود هو $\mathbb{R}$ ولكنه يقتصر أحيانًا على فترة من $\mathbb{R}$ خاصة في المسائل الحياتية.
2. أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة f.
3. عيّن النقاط الحرجة للدالة f.
4. كوّن جدولًا لدراسة إشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.
5. كوّن جدولًا لدراسة إشارة f'' وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت.
6. أوجد نقاطًا إضافية.
تساعد هذه النقاط على رسم بيان الدالة بدقة وأهم هذه النقاط، نقاط التقاطع مع أحد المحورين إن أمكن.
7. ارسم بيان الدالة f. استخدم نتائج الخطوات السابقة في الرسم.

****

مثال (1) ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ وارسم بيانها .

****

تطبيق (1) ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2$ وارسم بيانها .

****

مثال (2) ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها .

تطبيق (2) ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^4 - 2x^2$ وارسم بيانها .

****

واجب: ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x$ وارسم بيانها .

تطبيقات على القيم القصوى

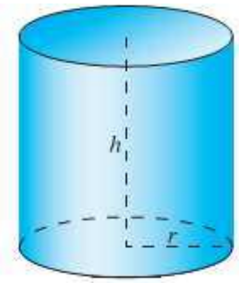
مثال (1) أوجد عددين مجموعهما 14 و ناتج ضربهما أكبر ما يمكن .

تطبيق (1) مجموع عددين غير سالبين هو 20، أوجد العددين إذا كان:

(a) مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن.

(b) أحد العددين مضافاً إليه الجذر التربيعيّ للآخر أكبر ما يمكن.

مثال (2) طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لتراً واحداً تكون على شكل أسطوانة دائرية قائمة كما في الشكل المقابل . ما ابعادها لتكون كمية المعدن المستخدم لصنعها أقل ما يمكن ؟



تطبيق (2) ماأكبر مساحة ممكنة لمثلث قائم الزاوية و طول وتره يساوي $6\ cm$ ؟ و ما أبعاده؟

مثال (3) تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h

a) أوجد الارتفاع h(cm) للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

b) ما قيمة هذا الحجم؟

الوحدة الرابعة : الإحصاء

المعلمة (Parameter): هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.

الإحصاءة (Statistic Function): هو اقتران تتعين قيمته من العينة كالمتوسط الحسابي $\bar{x}$ أو الانحراف المعياري S.

التقدير:

التقدير بنقطة هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تستخدم لتقدير معلمة مجهولة من معالم المجتمع.

التقدير بفترة الثقة

هو إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو احتمال معيّن.

القيمة الحرجة :

مثال (1): أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 95% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

تطبيق (1): أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 97% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

****

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

إذا كانت σ^2 معلومة و $n > 30$ أو $n \leq 30$.

1 نوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% وهي 1.96

2 نوجد هامش الخطأ $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، حيث σ هي الانحراف المعياري للمجتمع.

3 نوجد فترة الثقة $(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$.

مثال(2) :

أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 40$ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\overline{x} = 76.3$. باستخدام مستوى ثقة 95%

1 أوجد هامش الخطأ.

2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3 فسّر فترة الثقة.

تطبيق: عينة عشوائية حجمها n=13 أعطت $\bar{x} = 30$. $\sigma = 3.5$ أوجد فترة الثقة عند درجة ثقة 95% لمعلمة المجتمع μ المجهولة علماً أن المجتمع يتبع توزيعاً طبيعياً . هل تتضمن هذه الفترة المتوسط الحسابي μ

ثانيًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع غير معلوم وحجم العينة $n > 30$

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

1. نوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% وهي 1.96
2. نوجد هامش الخطأ $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ ، حيث S هي الانحراف المعياري للعينة.
3. نوجد فترة الثقة $(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$.

مثال (3) عينة عشوائية حجمها 36، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة 60 وتباينها 16، باستخدام مستوى ثقة 95%:

1. أوجد هامش الخطأ.
2. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
3. فسّر فترة الثقة.

تطبيق : أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ومتوسطها الحسابي $\overline{x} = 50$، وانحرافها المعياري $S = 9$، باستخدام مستوى ثقة 95%.

1. أوجد هامش الخطأ.
2. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
3. فسّر فترة الثقة.

إذا كان التباين σ^2 للمجتمع غير معلوم وحجم العينة $n \leqslant 30$

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحساب μ إذا كانت σ^2 غير معلومة، $n \leq 30$:

1. نوجد درجات الحرية $(n-1)$.
2. نوجد القيمة الحرجة $t_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% من جدول توزيع t.
3. نوجد هامش الخطأ $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$
4. نوجد فترة الثقة $(\bar{x}-E \ , \ \bar{x}+E)$.

مثال (4): أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 25$، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة (S) يساوي 10 ومتوسطها الحسابي $(\bar{x})$ يساوي 15، استخدم مستوى ثقة 95% لإيجاد:

1. هامش الخطأ.
2. فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

****

تطبيق : أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ علمًا أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.
إذا كان لدينا $n = 13$, $S = 0.3$, $\overline{x} = 8.4$

اختبارات الفروض الإحصائية

تعريف الفرض الإحصائي:

هو ادعاء معيّن مبني على حيثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.

تعريف المقياس الإحصائي :

هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.

تعريف اختبار المعنوية :

هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع.

الخطوات المتبعة لإجراء اختبار الفروض الإحصائية:

1. صياغة الفروض الإحصائية (فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1).
2. التحقق من الانحراف المعياري σ للمجتمع (معلوم أم غير معلوم) وتحديد حجم العينة (n) ومن ثم إيجاد المقياس الإحصائي للاختبار (Z أو t)، (مسترشدًا بالجدول التالي):

الانحراف المعياري (σ)	المقياس الإحصائي (Z أو t)	حجم العينة (n)
معلوم	$Z=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	لا يشترط حجم معين للعينة
غير معلوم	$Z=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$n>30$
	$t=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$n\leq 30$

3. تحديد مستوى المعنوية α وحساب القيمة الجدولية $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري أو القيمة الجدولية $t_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول t ذي درجات حرية.
4. تحديد منطقة القبول: $(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\ ,\ Z_{\frac{\alpha}{2}})$ أو $(-t_{\frac{\alpha}{2}}\ ,\ t_{\frac{\alpha}{2}})$ كما هو موضّح بالشكل.
5. اتخاذ القرار الإحصائي (قبول فرض العدم) أو (رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل).

مثال (1):

تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4 000 دينار كويتي. إذا أخذت عينة من 25 موظفًا، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو 3 950 دينارًا كويتيًا فإذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع (دينارًا) $\sigma = 125$

وضّح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة 95%

تطبيق : يزعم مسؤول في متجر لبيع الأدوات الكهربائية أن متوسط الأسعار هو 300 دينار أعطت عينة من 49 آلة ، $\overline{x} = 280$ و الانحراف المعياري معلوم $\sigma = 40$ تأكد من فرضية المسؤول عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$

مثال(2) :

إذا كانت $S = 1.79$, $\overline{x} = 37.2$, $n = 80$

اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

****

تطبيق: في دراسة لعدد ساعات استخدام الحاسوب أخذت عينة من 100 شخص يعملون في مختلف المجالات فوجد أن المتوسط الحسابي لعدد ساعات استخدام الحاسوب هو $\bar{x} = 4.5$

و الانحراف المعياري $S = 1$

اختبرالفرض إذا كان متوسط عدد الساعات للمجتمع هو $\mu = 5$ مقابل الفرض البديل$\mu \neq 5$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$

مثال(3):

يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 دينارًا كويتيًا.

فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل تبيّن أن متوسطها الحسابي (دينارًا) $\overline{x}=283$ وانحرافها المعياري (دينارًا) $S=32$.

فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟

استخدم مستوى ثقة 95% (علمًا بأن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًا).

تطبيق:

في عينة من مجتمع إحصائي حجمها $n = 20$ إذا كانت قيمة $\bar{x} = 40$ والانحراف المعياري $S = 7$

اختبرالفرض إذا كان $\mu = 35$ مقابل الفرض البديل$\mu \neq 35$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$