بند(١١- ١)

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

مبدأ العد Counting Principle

لإجراء عملية على عدد من المراحل المتتابعة، كما يلي:

المرحلة الأولى بـ r_1 طريقة مختلفة،

المرحلة الثانية بـ r_2 طريقة مختلفة،

المرحلة الثالثة بـ r_3 طريقة مختلفة،

.....وهكذا حتى المرحلة S بـ r_n طريقة مختلفة

فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $r_1 \times r_2 \times r_3 \times ... \times r_n$

مثال (1)

لتكن: $A = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

تم تكوين أعداد ذات ثلاثة منازل باستخدام عناصر A

أوجد:

a عدد الأعداد الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد الفردية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

حاول أن تحل

1 من مثال(1)، أوجد:

a عدد الأعداد الفردية الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد الزوجية الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد الزوجية المختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

مثال (2)

لتكن: $B = \{0, 3, 4, 5, 7, 9\}$

تم تكوين أعداد ذات أربعة منازل باستخدام عناصر المجموعة B

أوجد: a عدد الأعداد الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 5 الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد مختلفة الأرقام والمحصورة بين 7 000، 4 000 الممكن تكوينها.

حاول أن تحل

2 من المثال 2، أوجد:

a عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 10 الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد مختلفة الأرقام والأكبر من 5 000 الممكن تكوينها.

قانون التباديل Law of Permutations

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

حيث: $n \in \mathbb{Z}^+ \ , \ r \in \mathbb{N}, n \geq r$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: $n \in \mathbb{Z}^+ \ , \ r \in \mathbb{N}, n \geq r$

حاول أن تحل

4 ما عدد الطرائق المختلفة لوصول اليخوت الثلاثة الأوائل إذا اشترك في السباق 10 يخوت؟

مثال (5)

حل المعادلات التالية:

a $_nP_5 = 6 \times {}_nP_4 \,,\; n \geqslant 5$

b $_6P_r = 4 \times {}_6P_{r-1}$

c $\dfrac{{}_{2n}P_{n+2}}{{}_{2n}P_{n-1}} = 60$

b ${}_{8}P_{r} = 4 \times {}_{8}P_{r-1}$

$$_5P_r = 12 \times {}_5P_{r-2}$$

Law of Combinations قانون التوافيق

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!}$$

$$_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث: $n \in \mathbb{Z}^+ \ , \ r \in \mathbb{N} , n \geq r$

لاحظ أن: $_nC_0 = 1 \ , \ _nC_1 = n \ , \ _nC_n = 1$

حاول أن تحل

6 في المثال (6): a بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 7 كتب؟

b بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 8 كتب؟

c ماذا تلاحظ؟

مثال (7)

ترشح 10 طلاب لتمثيل القسم العلمي من مدرستك. يجري اختيار الممثلين الثلاثة بالاقتراع السري. يمكنك اختيار ثلاثة طلاب أو أقل. بكم طريقة مختلفة يمكنك أن تقترع؟

مثال (8)

في الصف الحادي عشر 28 طالبًا وفي الصف الثاني عشر 24 طالبًا.
أراد معلم الرياضة اختيار 5 طلاب لتشكيل فريق لكرة السلة، شرط أن يتضمن الفريق على الأقل لاعبًا واحدًا من الصف الحادي عشر. ما عدد الخيارات الممكنة؟

خواص أخرى للتوافيق

$${}_nC_m = {}_nC_{n-m}$$

$${}_nC_m = {}_{n-1}C_m + {}_{n-1}C_{m-1}$$

حاول أن تحل

9 يتكون فريق كرة القدم في المدرسة من 18 لاعبًا. يريد المدرب تشكيل فريق من 11 لاعبًا.

a أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها.

b أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها إذا أراد المدرب أن يتضمن الفريق اللاعب عبد العزيز.

c أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها إذا استثنى المدرب اللاعب عبد العزيز من تشكيلة الفريق بطريقتين مختلفتين.

مثال (10)

أوجد قيمة n في كل مما يلي:

a $_nC_3 = {}_nC_4$

b $\frac{_nC_7}{(n-1)C_6} = \frac{8}{7}$

a $_nC_2 = 105$

b $_nC_4 = {}_nC_5$

$_nC_4 = {}_nC_{n-2}$

$_{2n}C_4 = \frac{1}{2}\ {}_{2n}C_5$

بند (١١-٢)

نظرية ذات الحدين
The Binomial Theorem

مفكوك ذات الحدين — Binomial Expanding

مثلث باسكال

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = 1x^1y^0 + 1x^0y^1$$
$$(x+y)^2 = 1x^2y^0 + 2x^1y^1 + 1x^0y^2$$
$$(x+y)^3 = 1x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + 1x^0y^3$$
$$(x+y)^4 = 1x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1x^0y^4$$
$$(x+y)^5 = 1x^5y^0 + 5x^4y^1 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5x^1y^4 + 1x^0y^5$$

نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب n،

$$(x+y)^n = {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1}y + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \ldots\ldots + {}_nC_rx^{n-r}y^r + \ldots\ldots + {}_nC_{n-1}xy^{n-1} + {}_nC_ny^n$$

خواص نظرية ذات الحدين — Properties of the Binomial Theorem

1. مفكوك $(x+y)^n$ يتضمن $n+1$ حدًّا يرمز لها بـ: $T_1, T_2, \ldots, T_{r+1}, \ldots, T_n, T_{n+1}$
2. الحد الأول في المفكوك هو x^n، ثم ينقص أس x في الحدود التالية بمقدار الوحدة على التوالي.
3. يبدأ ظهور العدد y في الحد الثاني، ثم يزيد أس العدد y بمقدار الوحدة على التوالي حتى نصل إلى الحد الأخير في المفكوك ويكون y^n.
4. مجموع أسي x و y في أي حد من حدود المفكوك ثابت ويساوي الأس n.
5. معامل الحد T_1 يساوي معامل الحد T_{n+1}، ومعامل الحد T_2 يساوي معامل الحد T_n، وهكذا ...
6. الحد العام الذي رتبته $r+1$ يرمز له بالرمز: T_{r+1}

حاول أن تحل

1 استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل من:

a $(x+y)^5$

c $(x^2+3y)^4$

a $(a-b)^4$

c $(2x-y^2)^5$

الحد العام الذي رتبته $r+1$ يرمز له بالرمز: T_{r+1}

$$T_{r+1} = {}_nC_r \times x^{n-r} \times y^r$$

مثال (2)

في مفكوك: $(2x - 3y^2)^{10}$ أوجد الحدّ السابع.

حاول أن تحل

2 في مفكوك: $(3x^2 - y)^{15}$ أوجد معامل T_{12}

مثال (3)

أوجد الحد الذي يحتوي على x^3y^4 في مفكوك $(2x + 3y)^7$

حاول أن تحل

3 أوجد الحد الذي يحتوي على x^2y^3 في مفكوك $(3x - y)^5$

بند (١١ -٣)

الاحتمال
Probability

التجربة العشوائية

هي تجربة لها عدة نواتج مختلفة ممكنة ولكن لا يمكن التأكد مسبقًا من أن أي ناتج منها سوف يتحقق عند إجراء التجربة.

أنواع الأحداث Types of Events

حدث بسيط Simple Event

مجموعة جزئية من فضاء العينة (S) تحوي ناتجًا واحدًا من نواتج التجربة العشوائية (مجموعة تحوي عنصرًا واحدًا) فإذا كان A حدثًا بسيطًا فإن $n(A) = 1$

حدث مركب Compound Event

مجموعة جزئية تحوي أكثر من ناتج واحد من نواتج التجربة العشوائية.

فإذا كان B حدثًا مركبًا فإن $n(B) > 1$

حدث مستحيل Impossible Event

مجموعة جزئية خالية $\varnothing$ من فضاء العينة (S): فإذا كان D حدثًا مستحيلًا فإن $n(D) = 0$

حدث مؤكد Certain Event

مجموعة جزئية تساوي فضاء العينة (S): فإذا كان F حدثًا مؤكدًا فإن $n(F) = n(S)$

حدثان متنافيان Mutually Exclusive Events

يقال للحدثين A, B أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفي (يمنع) وقوع الآخر أثناء التجربة.

أي أن: $A \cap B = \phi$ ويكون $n(A \cap B) = n(\phi) = 0$

حدث متمم Complement Event

الحدث المتمم للحدث A هو الحدث الذي يحوي جميع عناصر فضاء العينة (S) التي لا تنتمي إلى الحدث A

نرمز إلى الحدث المتمم بالرمز $\overline{A}$

A، $\overline{A}$ هما حدثان متنافيان. ويكون: $A \cap \overline{A} = \phi$ ، $A \cup \overline{A} = S$

حدثان مستقلان Independant Events

يقال للحدثين A, B أنهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر أثناء التجربة العشوائية.

مثال (1)

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي.

1. اكتب وحدد نوع كلٍ من الأحداث التالية:
   - a. A: ظهور عدد أكبر من 5
   - b. B: ظهور عدد فردي
   - c. C: ظهور عدد زوجي
   - d. D: ظهور عدد أصغر من 7
2.
   - a. أثبت أن B, C حدثان متتامان.
   - b. بيّن فيما إذا كان الحدثان C, D متنافيان أم لا.

حاول أن تحل

1 في أحد المخيمات الصيفية يشارك الطلاب في مجموعة من الأنشطة وهي: كرة القدم، كرة السلة، كرة المضرب، الكرة الطائرة، السباحة وركوب الدراجات.

1 اكتب وحدد نوع كل من الأحداث التالية:

a A: المشاركة في كرة المضرب فقط.

b B: المشاركة في الأنشطة التي تستخدم فيها كرة كبيرة.

c C: المشاركة في الأنشطة التي لا تستخدم فيها كرة.

2 a بيّن فيما إذا كان الحدثان B, C متتامان أم لا.

b أعط مثالًا عن حدثين متنافيين.

الاحتمال Probability

إذا كانت جميع نواتج التجربة العشوائية لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث هو:

$$P(E) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } E}{\text{عدد نواتج فضاء العينة } S} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

خواص الاحتمال لحدث ما **Properties of the Probabilty of an Event**

E حدث في فضاء عينة S منته وغير خالٍ

a $0 \le P(E) \le 1$

b إذا كان E حدثًا مستحيلًا، فإن $P(E) = 0$

c إذا كان E حدثًا مؤكدًا، فإن $P(E) = 1$

d مجموع احتمالات النواتج في فضاء العينة $= 1$

مثال (2)

يبيّن الجدول المقابل وسيلة النقل التي يستخدمها طلاب الصف الحادي عشر بشعبتيه للمجيء إلى المدرسة.

اختير طالب عشوائيًّا من بين طلاب شعبتي الصف الحادي عشر.

ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يستقلون الحافلة المدرسية للمجيء إلى المدرسة؟

وسيلة النقل	الشعبة A	الشعبة B	المجموع
الحافلة المدرسية	16	15	31
مع الأهل	6	8	14
سيارة نقل عام	2	5	7
المجموع	24	28	52

الحل:

حاول أن تحل

2 في المثال (2)، a ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يقلونهم أهلهم إلى المدرسة؟

b ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الشعبة B؟

مثال (3)

حصل الطلاب: مصطفى، محمد، طه، أحمد، أمين على الدرجة النهائية العظمى في اختبار الرياضيات وأراد مدير المدرسة اختيار 3 منهم لتمثيل المدرسة في مسابقة ثقافية.

ما احتمال اختيار «محمد»؟

حاول أن تحل

3 في المثال (3)، اعتذر طه عن المشاركة. فما احتمال اختيار «محمد»؟

إذا كان A، B حدثان فإن	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
إذا كان A، B حدثان متنافيان، فإن	$P(A \cap B) = 0$
إذا كان A، B حدثان مستقلان، فإن	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
إذا كان $\overline{A}$ هو الحدث المتمم للحدث A فإن	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

مثال (5)

حوالى 53% من طلاب إحدى الجامعات عمرهم أصغر من 25 عامًا وحوالى 21% من طلاب هذه الجامعة عمرهم أكبر من 34 عامًا.

اختير طالب عشوائيًّا من هذه الجامعة.

a ما احتمال أن يكون عمر الطالب أصغر من 25 أو أكبر من 34؟

b ما احتمال أن يكون عمر الطالب 25 عامًا فأكثر؟

حاول أن تحل

5 في المثال (5)، أوجد احتمال كل حدث مما يلي:

a عمر الطالب بين 25 عامًا و34 عامًا.

b عمر الطالب 34 عامًا وأقل.

مثال (6)

رُمي حجر نرد منتظم. فما احتمال الحصول على أحد مضاعفات العدد 3 أو عدد زوجي؟

حاول أن تحل

6 في المثال (6)، ما احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أولي؟

احتمال ذات الحدين

إقامة تجربة n مرّة وتسجيل نتائجها علمًا أن هناك فقط لكل تجربة نتيجتين H أو T

إذا كان $P(H) = m$، الحدث E «H تحقق فقط k مرّة» فبالتالي:

$$P(E) = {}_nC_k m^k (1-m)^{n-k}$$

مثال (7)

خلال شهر التسوق يقدم أحد المحلات العرض التالي: عند شراء كل صنف تحصل على بطاقة. تفوز 40% من البطاقات بجوائز ويتم اختيار هذه البطاقات الرابحة بشكل عشوائي. مع راشد 3 بطاقات. ما احتمال أن يفوز راشد بجائزتين؟

حاول أن تحل

7 في المثال (7)، ما احتمال أن يفوز راشد بجائزة واحدة فقط؟

مثال (8)

في إحدى الآلات الحاسبة 4 بطاريات. احتمال أن تخدم كل بطارية مدة عام كامل يساوي 90%
ما احتمال أن تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام؟

8 في المثال (8)، ما احتمال أن تخدم 3 بطاريات فقط مدة عام كامل؟