السؤال الأول:

أ) أوجد إن أمكن: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+5}{\sqrt{x^2+2x}}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x(1+\frac{5}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x})}}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cancel{x}(1+\frac{5}{x})}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$ $\quad x \neq 0$

$\dfrac{\lim\limits_{x \to \infty}(1+\frac{5}{x})}{\lim\limits_{x \to \infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$

$\dfrac{\lim\limits_{x \to \infty} 1 + \lim\limits_{x \to \infty}\frac{2}{x}}{1}$

$\dfrac{1+0}{1} = 1$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$x \to \infty$

$|x| = x$

$\lim\limits_{x \to \infty}(1+\frac{2}{x})$

$= \lim\limits_{x \to \infty} 1 + \lim\limits_{x \to \infty}\frac{2}{x}$

$= 1 + 0 = 1 > 0$

$\lim\limits_{x \to \infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}} = \sqrt{\lim\limits_{x \to \infty}(1+\frac{2}{x})}$

$= \sqrt{1}$

$= 1 \neq 0$

ب) لتكن: $f(x) = 2x^2 - 3$ ، $g(x) = \sqrt{x+4}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= \sqrt{2x^2+1}$

* $(g \circ f)(-2) = \sqrt{2(-2)^2+1} = 3$

* $\lim\limits_{x \to -2}\sqrt{2x^2+1} = \sqrt{\lim\limits_{x \to -2}(2x^2+1)}$

$= \sqrt{9} = 3$

$\lim\limits_{x \to -2}(2x^2+1)$

$= 9 > 0$

$\because (g \circ f)(-2) = \lim\limits_{x \to -2}(g \circ f)(-2)$

$\therefore$ الدالة متصلة عند $x = -2$

السؤال الثاني:

أ) لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & : x\le 1 \\ 2x+1 & : x>1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها

أوجد إن أمكن $f'(x)$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & ، x<1 \\ \text{تبحث} & x=1 \\ 2 & ، x>1 \end{cases}$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad (\text{إن وجدت})$$

$$f'_{-}(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2-3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}$$
$$=1+1=2$$

$$f'_{+}(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+1-3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-2}{x-1}$$
$$=2$$

$$f'_{-}(1)=f'_{+}(1)$$
$$\therefore f'(1)=2$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & : x<1 \\ 2 & : x=1 \\ 2 & : x>1 \end{cases}$$

ب) أوجد ميل مماس المنحنى $y=\sin^5 x$ عند $x=\frac{\pi}{3}$

$$y'=5(\sin x)^4\cdot\cos x$$

$$\text{الميل}(m)\ y'\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=5\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^4\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{45}{32}$$

السؤال الثالث:

أ) بين أن الدالة f : $f(x)=x^3+1$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3\,,3]$ (a, b) ثم أوجد c الذي تُنبىء به النظرية وفسر إجابتك

$f(x)$ دالة كثيرة حدود متصلة على $[-3,3]$

$f(x)$ قابلة للاشتقاق على $(-3,3)$

$\therefore$ $f(x)$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[-3,3]$

$\therefore$ يوجد على الأقل c تنتمي $(-3,3)$ حيث

$f(-3)=(-3)^3+1=-27$

$f(3)=(3)^3+1=28$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}=\frac{28+27}{6}=\frac{55}{6}$$

$f'(x)=3x^2$

$f'(c)=3c^2$

$\therefore 3c^2=\frac{55}{6}$

$c^2=\frac{55}{18} \Rightarrow c=\pm\sqrt{\frac{55}{18}}\in(-3,3)$

$\therefore$ يوجد مماسان لمنحنى الدالة عند $x=\pm\sqrt{\frac{55}{18}}$ توازيان القاطع المار بالنقطتين $(-3,-27)$ ، $(3,28)$

ب) إذا كانت $y=\sqrt{1-2x}$ فأثبت أن : $yy''+(y')^2=0$

بتربيع الطرفين $y=\sqrt{1-2x}$

$y^2=1-2x$

$2yy'=-2$

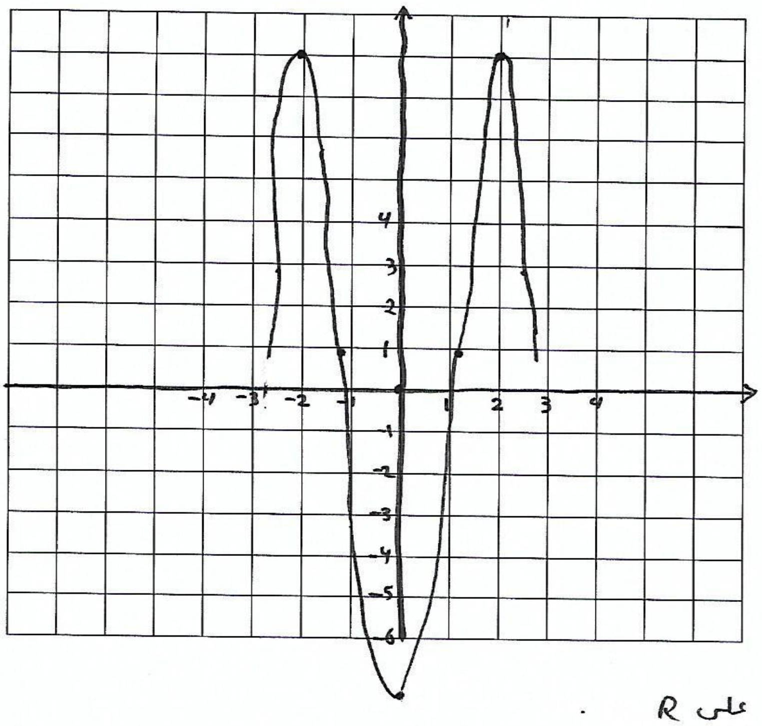
$yy'=-1$

$y'^2+y''y=0$

$\therefore yy''+(y')^2=0$ وهو المطلوب

السؤال الرابع:

أ) ادرس تغير كل من الدوال التالية وارسم بيانها. $h(x) = 8x^2 - x^4 - 8$



x	-3	-2	$-2/\sqrt{3}$	0	$2/\sqrt{3}$	2	3
$h(x)$	-17	8	$\frac{8}{9}$	-8	$\frac{8}{9}$	8	-1

- $h(x)$ دالة كثيرة حدود متصلة على R.
- $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to\infty} -x^4 = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^4 = -\infty$

- $h'(x) = 16x - 4x^3$

$h'(x) = 0 \Rightarrow 16x - 4x^3 = 0$

$4x(4 - x^2) = 0$

$x = 0 \;،\; x = 2 \;،\; x = -2$

x		-2		0		2	
إشارة h'	$+$		$-$		$+$		$-$
سلوك h	↗		↘		↗		↘

- الدالة متزايدة على كل من $(-\infty ، -2)$ ، $(0 ، 2)$
- الدالة متناقصة على كل من $(-2 ، 0)$ ، $(2 ، \infty)$
- النقاط الحرجة $(2 ، 8)$ ، $(0 ، -8)$ ، $(-2 ، 8)$
- $h''(x) = 16 - 12x^2 \Rightarrow h''(x) = 0 \quad \therefore 16 - 12x^2 = 0$

$x^2 = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

x		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$	
إشارة $h''(x)$	$-$		$+$		$-$
بيان $h(x)$	$\cap$		$\cup$		$\cap$

الدالة لها تقعر للأعلى على $(-\frac{2}{\sqrt{3}} ، \frac{2}{\sqrt{3}})$ ، الدالة لها تقعر للأسفل على كل من $(-\infty ، -\frac{2}{\sqrt{3}})$ ، $(\frac{2}{\sqrt{3}} ، \infty)$

ب)

أُخذت عيّنة عشوائية من مجتمع قيد الدراسة حجمها $n = 150$، فوجد أن المتوسّط الحسابي للعينة $\bar{x} = 30.3$ مع انحراف معياري $S = 6.5$. اختبر الفرض إذا كان المتوسّط الحسابي للمجتمع هو $\mu = 30$، مقابل الفرض البديل $\mu \neq 30$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

الحل ① صياغة الفروض

$H_0 : \mu = 30$ ، $H_1 : \mu \neq 30$

② ∵ σ غير معلومة ، $n > 30$

∴ نستخدم المقياس الإحصائي Z

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{30.3 - 30}{\frac{6.5}{\sqrt{150}}} \simeq 0.565$$

③ تحديد مستوى المعنوية α:

$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$Z_{0.025} = 1.96$

④ منطقة القبول هي $(-1.96 , 1.96)$

⑤ اتخاذ القرار ∵ $0.565 \in (-1.96 , 1.96)$

∴ القرار قبول فرض العدم $\mu = 30$

أولاً: في البنود (3 – 1) توجد عبارات، ظلل في ورقة الإجابة:
(a) إذا كانت العبارة صحيحة، (b) إذا كانت العبارة ليست صحيحة

(١) اذا كانت الدالة f متصلة عند x = - 1 وكانت $\lim_{x\to -1}(f(x)-2)=-1$

فإن f (- 1) = 1

---

(2) القيمة الحرجه $Z_{\alpha/2}$ لدرجة الثقه 96 % هي 2.055 x

ثانياً: في البنود (10 – 3) لكل بند يوجد أربع خيارات، واحد فقط منها صحيح، ظلل في ورقة الإجابة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة :

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin x}=$

(a) 1 (b) 2 (c) $\frac{1}{2}$ (d) -2

---

(4) اذا علمت الدالة g دالة متصلة عند x = 2 فان الدالة المتصلة عند x = 2 فيما يلي هي :

(a) $\frac{g(x)}{x-2}$ (b) $|g(x)|$ (c) $\sqrt{g(x)}$ (d) $\frac{1}{g(x)}$

---

(5) لتكن الدالة $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & : x\ge 1 \\ 4x-1 & : x<1 \end{cases}$ فإن مجال الدالة f' هو $R-\{1\}$

(a) (b)

(6) اذا كانت $y=\frac{1}{\sin x}$ فإن y' تساوي

(a) $\cot x\csc x$ (b) $\cos x$ (c) $-\cot x\csc x$ (d) $-\cos x$

(7) اذا كانت $r=\tan(2-\theta)$ فان $\frac{dr}{d\theta}$ تساوي

(a) $\sec^2(2-\theta)$ (b) $\sec^2(2+\theta)$
(c) $-\sec^2(2-\theta)$ (d) $\sec(2-\theta)$

(8) ان حجم العينه المطلوبه لتقدير المتوسط الحسابي للمجتمع مع هامش خطأ وحدتين ومستوى ثقة 95% وانحراف معياري للمجتمع $\sigma=8$ يساوي

(a) 65 (b) 62 (c) 8 (d) 25

(10)مستطيل مساحته $36\ cm^2$ فإن ابعاده التي تعطي اصغر محيط هي :

(a) 9cm , 4cm (b) 12cm , 3cm
(c) 6cm,6cm (d) 18cm , 2cm

(10)أي من المنحنيات الدوال التالية يكون مقعرا للأسفل في (-1,1)

(a) $f(x)=x^2$ (b) $f(x)=x|x|$
(c) $f(x)=-x^3$ (d) $f(x)=-x^2$

السؤال الأول :

أ) أوجد إن أمكن : $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x}}{x+1}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2(2-\frac{1}{x})}}{x(1+\frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})} \qquad x \neq 0$$

$$= \frac{\lim_{x \to \infty} \sqrt{2-\frac{1}{x}}}{\lim_{x \to \infty} (1+\frac{1}{x})}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$x \to \infty$

$|x| = x$

$* \lim_{x \to \infty} (2-\frac{1}{x}) = \lim_{x \to \infty} 2 - \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 2-0 = 2 > 0$

$* \lim_{x \to \infty} \sqrt{2-\frac{1}{x}} = \sqrt{\lim_{x \to \infty}(2-\frac{1}{x})}$

$= \sqrt{(\lim_{x \to \infty} 2 - \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x})}$

$= \sqrt{2}$

$* \lim_{x \to \infty} (1+\frac{1}{x})$

$= \lim_{x \to \infty} 1 + \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$

$= 1 + 0 = 1 \neq 0$

ب) أوجد إن أمكن : $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}}$$

$$= \lim_{x \to 1} (\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$$

$$= \lim_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2} + \lim_{x \to 1} \sqrt[3]{x} + \lim_{x \to 1} 1$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x \to 1} x^2} + \sqrt[3]{\lim_{x \to 1} x} + 1$$

السؤال الثاني: $a(x)$

أ) **لتكن :** $f(x)=|x^2-5x+6|$ **ادرس اتصال الدالة** f **عنـــد** $x=2$

$*\quad a(x) = x^2-5x+6$

$b(x) = |x|$

$(b\circ a)(x) = b(a(x))$

$= b(x^2-5x+6)$

$= |x^2-5x+6| = f(x)$

الدالة $f(x)$ عباره عن حاصل تركيب دالتين كل منهما متصل على $\mathbb{R}$

$\therefore$ $f(x)$ متصل على $\mathbb{R}$

$\therefore$ $f(x)$ متصل عند $x=2$

ب) **أوجد معادلة المماس عند النقطة** $\left(\overset{x_1}{1},\overset{y_1}{\frac{2}{3}}\right)$ **لمنحنى الدالة** f **حيث** $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+2}$

معادلة المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - \frac{2}{3} = \frac{5}{9}(x-1)$

$y = \frac{5}{9}x - \frac{5}{9} + \frac{2}{3}$

$y = \frac{5}{9}x + \frac{1}{9}$

ميل المماس (m) (المشتقة)

$f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2+2) - 2x(x^3+1)}{(x^2+2)^2}$

$m = f'(1) = \dfrac{3\times1(1+2) - 2\times1(1+1)}{(1+2)^2}$

$= \dfrac{9-4}{9} = \dfrac{5}{9}$

السؤال الثالث:

أ) إذا كانت $y = \cos x$ بين أن $y^{(4)} - y'' = 0$

$$y = \cos x$$
$$y' = -\sin x$$
$$y'' = -\cos x$$
$$y''' = \sin x$$
$$y^{(4)} = -\cos x$$

$$\therefore y^{(4)} - y''$$
$$-\cos x + \cos x = 0$$

ب) بين أن الدالة f : $f(x) = x^2 + 2x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[\overset{a}{-3}, \overset{b}{1}]$ ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك.

$f(x)$ دالة كثيرة حدود متصلة على $[-3, 1]$ — (1)

$f(x)$ قابلة للاشتقاق على $(-3, 1)$ — (2)

من 1 و 2 $\therefore$ الدالة $f(x)$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[-3, 1]$

$\therefore$ يوجد نقطة $x = c$ تنتمي $(-3, 1)$ على الأقل بحيث

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$f(1) = (1)^2 + 2(1) = 3$

$f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) = 3$

$f'(x) = 2x + 2$

$f'(c) = 2c + 2$

$$\frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)}$$

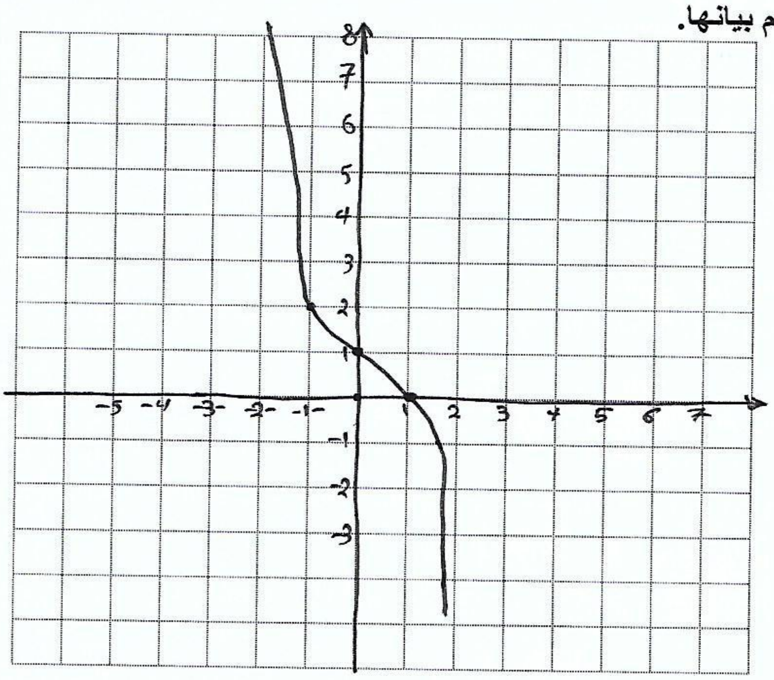
$$2c + 2 = 0$$

$$c = \frac{-2}{2} = -1$$

* عند النقطة إحداثي السيني $x = -1$ يمكن رسم مماس يوازي القاطع للمنحنى عند النقطتين إحداثي السيني $x = -3$ و $x = 1$

السؤال الرابع :

أ) ادرس تغير الدالة f: $f(x)=1-x^3$ وارسم بيانها.



* $f(x)$ دالة كثيرة حدود مجالها R

* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} -x^3 = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^3 = \infty$

* $f(x) = 1-x^3$

$f'(x) = -3x^2$

$f'(x)=0 \Longrightarrow -3x^2=0$

$x=0$

x	$-\infty$		0		∞
إشارة f'		$-$		$-$	
سلوك f		↘		↘	

* الدالة تناقصية على كل من $(-\infty, 0)$ ، $(0, \infty)$

النقاط الحرجة عند $x=0$

$f(0) = 1-0 = 1$

* نقطة حرجة $(0, 1)$

$f''(x) = -6x$

$f''(x)=0 \Longrightarrow -6x=0$

$x=0$

x	$-\infty$		0		∞
إشارة f''		$+$		$-$	
بيان f		$\cup$		$\cap$	

الدالة لها تقعر للأعلى على $(-\infty, 0)$

الدالة لها تقعر للأسفل على $(0, \infty)$

نقطة الانعطاف عند $x=0$ وهي $(0, 1)$

*

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	2	1	0	-7

ب) أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ، ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 50$
وانحرافها المعياري $\sigma = 9$ ، باستخدام مستوى ثقة ٩٥%

١) أوجد هامش الخطأ

٢) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي μ

٣) فسّر فترة الثقة.

∵ مستوى الثقة 95%

∴ القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

∴ هامش الخطأ (E) $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$= 1.96 \times \frac{9}{\sqrt{81}}$

$= 1.96$

فترة الثقة هي $(\bar{x} - E , \bar{x} + E)$

$= (50 - 1.96 , 50 + 1.96)$

$= (48.31 , 51.96)$

عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $(n = 81)$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ

القسم الثاني (الأسئلة الموضوعية) :

أولا : في البنود (1-3) ظلل في ورقة الإجابة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة
(1) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{(3-x)^9} = -\infty$
(2) إذا كانت $f(x) = \sin 2x$ فإن : $f'(x) = 2\cos 2x$
(3) إذا كانت f داله متصله عند $x=c$ فإن الداله : $g(x) = \sqrt{f(x)}$ متصله عند $x=c$
ثانيا : في البنود (4-10) لكل بند أربع إختيارات واحد منها فقط صحيح اختر الإجابة الصحيحة ثم ظلل دائرة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة :
(4) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-2x}{\sqrt{4x^2-x+3}} =$ (a) -1 (b) $\frac{-1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1
(5) لتكن الدالتين $f(x) = x^2+3$, $g(x) = 5x+1$ فإن $(g \circ f)'(x)$ تساوي: (a) $5x^2+16$ (b) $25x^2+10x+4$ (c) $10x$ (d) $50x+10$

(6) الدالة التي تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطه على الفترة $[-2,3]$ هي $f(x) =$

(a) $\sqrt[3]{x}$ (b) $\tan x$

(c) $\sqrt{9-x^2}$ (d) $\frac{1}{x}$

(7) إذا كانت $f(x) = (1+6x)^{\frac{2}{3}}$ فإن $f''(x)$ يساوي

(a) $-8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$ (b) $-64(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

(c) $-8(1+6x)^{\frac{4}{3}}$ (d) $-64(1+6x)^{\frac{4}{3}}$

(8) إذا كانت : $x^2 - 3y^2 + 2xy = 0$ فإن $\frac{dy}{dx} =$

(a) $\frac{y-x}{3y-x}$ (b) $\frac{y+x}{3y-x}$

(c) $\frac{x-y}{3y-x}$ (d) $\frac{y-x}{3y+x}$

(9) إذا كانت f داله كثيرة حدود ، $(c, f(c))$ نقطة إنعطاف لها فإن :

(a) $f''(c)=0$ (b) $f'(c) = 0$

(c) $f(c) = 0$ (d) $f''(c)$ غير موجودة

(10) القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 96.6% هي :

(a) 2.21 (b) 2.17

(c) 21.2 (d) 2.12