UULA

الرياضيات

الكورس الثاني

11

2021 - 2020

UULA.COM

UULA

الرياضيات

الكورس الثاني

11

2021 - 2020

UULA.COM

قائمة المحتوى

05 الإحصاء والاحتمال

الأعداد المركبة

الوحدة التخيلية

هي العدد الذى مربعه (-1) ويرمز له بالرمز i

$$i = \sqrt{-1} \ , i^2 = -1$$

الأعداد التخيلية

- لأى عدد حقيقي موجب m ،

$$\sqrt{-m} = \sqrt{m}\, i$$

- تسمى الأعداد الحقيقية التي على الصورة bi حيث $b \in \mathbb{R}^*$ أعداد تخيلية

س بسط كل مما يلى مستخدماً الوحدة التخيلية i:

- $\sqrt{-8}$
- $\sqrt{-4}$
- $\sqrt{-36}$
- $-\sqrt{-12}$
- $\sqrt{-2}$

تعريف: العدد المركب

العدد المركب هو عدد على الصورة $a + bi$ حيث a, b عددان حقيقيان , i الوحدة التخيلية.

$$z = \underbrace{\boldsymbol{a}}_{\text{الجزء الحقيقي}} + \underbrace{\boldsymbol{bi}}_{\text{الجزء التخيلي}}$$

س أكتب كلاً من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

- $1 - \sqrt{-20}$
- $\frac{1+\sqrt{-25}}{4}$
- $\sqrt{-9} + 6$

س أكتب كلاً من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

- $\frac{\sqrt{-9}+5}{7}$
- $\frac{10-\sqrt{-100}}{5}$
- $\sqrt{-18} + 6$

تساوى عددين مركبين

تساوى عددان مركبان إذا وفقط تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.
ليكن:

$$z_1 = a_1 + b_1 i \quad , z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \;, b_1 = b_2$$

س أوجد قيم كل من $x,y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلى:

- $12 + 3i = 4x - 9yi$
- $x^2 - y^2 i = 9 - 25i$
- $2x + yi = 1$

س أوجد قيم كل من $x,y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

- $x + 5i = 7 - 3yi$

- $(x + 3) + y^2 i = 5 - yi$

- $3i = 2x - 5yi$

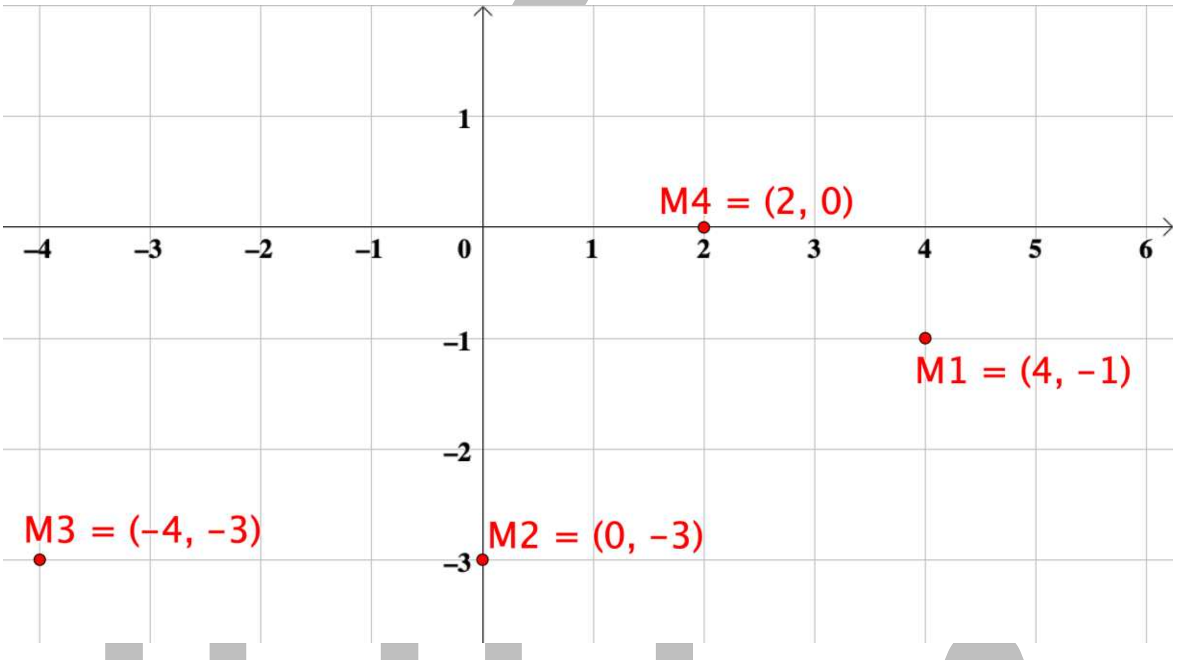
التمثيل البياني لعدد مركب

$z = a + bi \longleftrightarrow M(a\,,b)$

الصورة الجبرية — الصورة الديكارتية

س مثل كلاً مما يلي في المستوي المركب:

- $z_1 = 4 - i$
- $z_2 = -3i$
- $z_3 = -4 - 3i$
- $z_4 = 2$



س أكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط:

- $K(7,0)$
- $H(1,-2)$
- $N(4,1)$

$Z_1 = 7$

$Z_2 = 1 - 2i$

$Z_3 = 4 + i$

العمليات على مجموعة الأعداد المركبة

أولاً: جمع وطرح الأعداد المركبة

س إذا كان $z_1 = -2 + 5i \ , \ z_2 = 3.4 - 1.2i \ , \ z_3 = -0.3i$ فأوجد:

- $z_1 + z_2$
- $z_2 - z_1$
- $z_3 - z_2 - z_1$

س إذا كان $z_1 = 2 + 3i \ , \ z_2 = 4 - 7i \ , \ z_3 = 2i$ فأوجد:

- $z_1 + z_2$
- $z_1 - z_2$
- $z_3 + z_2 + z_1$

ثانياً: ضرب الأعداد المركبة

إذا كان $z_1 , z_2 \in \mathbb{C} , c \in \mathbb{R}$

حيث $z_1 = a_1 + b_1 i \, , z_2 = a_2 + b_2 i$ فإن:

- $cz_1 = ca_1 + cb_1 i$
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

س أوجد الناتج:

- $(6 - 5i)(4 - 3i)$
- $(9 + 4i)(4 - 9i)$
- $(12i)(7i)(i + 1)$

س أوجد الناتج:

- $(5i)(-4i)$

- $3(7+5i)$

- $(4i)(1-\frac{1}{2}i)(1+\frac{1}{2}i)$

س إذا كان $z_2 = 5 - i$, $z_1 = 2 + 3i$ فأوجد:

- $-3z_2$

- $z_1 \cdot z_2$

س إذا كان $z_1 = 2 - 3i \;,\; z_2 = 1 + 4i$ فأوجد:

- $\frac{1}{2} z_1$

- $z_1 \cdot z_2$

قوى العدد المركب

س أوجد:

- $5(i)^{73}$

- $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{3}$

- $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{4}$

س إذا كان: $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = z_3, \ -2i = z_2, \ z_1 = i$ فأوجد:

- $(z_1)^{21}$

- $(z_2)^{6}$

- $(z_3)^{2}$

ثالثاً: قسمة الأعداد المركبة

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب

$z = a + bi$ هو $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

س إذا كان $z_2 = 3 + 5i$, $z_1 = 2 - 7i$ فأوجد:

- $\overline{z_1} + \overline{z_2}$

- $\overline{z_1 - z_2}$

- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

س إذا كان $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 5 - 2i$ فأوجد:

- $z_1 + \overline{z_2}$

- $z_1 - \overline{z_2}$

- $\overline{(\overline{z_1})}$

- $\overline{z_1 + z_2}$

- $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + bi$
ويرمز له بالرمز z^{-1}

ويكون: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi}$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} \qquad z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

س أوجد المعكوس الضربي لكل من:

- $z_1 = -3i - 7$

- $z_2 = 5 + 11i$

- $z_3 = 6i$

س أوجد ناتج قسمة $5 - 6i$ على $2 + 3i$

س أوجد ناتج قسمة $2i - 3$ على $1 + 2i$

س أكتب كلاً مما يلي في الصورة الجبرية :

- $\frac{3+i}{2+5i}$

- $\frac{2-i}{2+i}$

- $\frac{\overline{5+i}}{\overline{2-3i}}$

س أكتب كلاً مما يلي في الصورة الجبرية للعدد المركب:

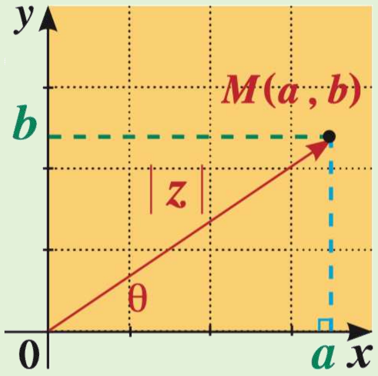
- $\frac{2}{3-i}$

- $\overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)}$

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

القيمة المطلقة لعدد مركب

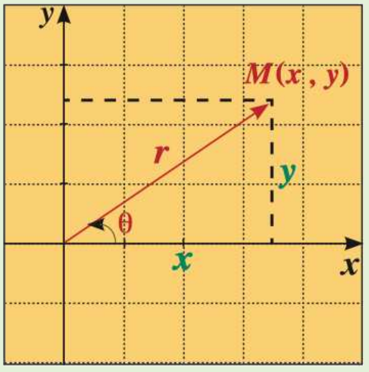
$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



س أوجد:

- $|6 - 4i|$
- $|-2 + 5i|$
- $|5i|$
- $|3 - 4i|$

الاحداثيات القطبية



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

س أوجد الزوج المرتب $(x\ ,\ y)$ الذى يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين:

- $A(5{,}300°)$
- $B(2, \frac{2\pi}{3})$
- $A(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6})$
- $B(5, \frac{\pi}{4})$

س حول من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية (r, θ) لكل مما يلي:

- $D(3\sqrt{3}\,, 3) \quad : 0 \leq \theta \leq 2\pi$

- $C(-2,5)$

س حول من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية (r, θ) لكل مما يلي:

- $M(-3, -4) \quad : \; 0° \leq \theta < 360°$

- $C\left(4, -2\sqrt{5}\right) \quad : 0 \leq \theta \leq 2\pi$

الصورة المثلثية

يمكن كتابة العدد المركب $z = x + yi$ على الصورة:
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وتعرف **بالصورة المثلثية** للعدد المركب z.

س ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية:

- $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$

- $z_2 = -1 - i$

س ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية:

- $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}\, i$

- $z_2 = -2 - 2i$

- $z_3 = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

س ضع كلاً مما يلى في الصورة المثلثية $z=r(\cos\theta + i\sin\theta)$:

- $2\left(\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right)$

- $\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)$

- $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

- $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

س ضع كلاً مما يلى في الصورة المثلثية $z=r(\cos\theta + i \sin\theta)$:

- $\frac{9}{2}(\cos 30^{o} + i \ sin \ 390^{o})$

- $3\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$

- $-\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

س ضع كلاً مما يلى في الصورة المثلثية $z=r(\cos\theta + i \sin\theta)$:

- $3(\cos 50^{o} - i\sin(-130^{o}))$

س ضع كلاً مما يلى في الصورة الجبرية :

- $4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
- $\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$
- $2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$
- $3\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$

الصورة المثلثية في حالات خاصة

س ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية :

- $z_1 = 2i$

- $z_2 = 5$

- $z_3 = \frac{-3}{4}$

- $z_4 = -\frac{5}{2}i$

حل معادلات

س أوجد مجموعة حل المعادلة: $3z + 1 - i = 7 + 3i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

س أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i = 3 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

س أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i\overline{z} = 5 - 2i$ في $\mathbb{C}$.

س أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + i = 2\overline{z} + 1$ في $\mathbb{C}$.

س أوجد مجموعة حل المعادلة: $4x^2 + 100 = 0$ حيث $x \in \mathbb{C}$.

س أوجد مجموعة حل كل معادلة ما يلي:

- $8x^2 + 2 = 0$
- $-5x^2 - 150 = 0$
- $3x^2 + 48 = 0$

س أوجد مجموعة حل المعادلة: $4z^2 + 16z + 25 = 0$ فى $\mathbb{C}$.

س أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$ فى $\mathbb{C}$.

س لتكن المعادلة: $2z^2 - 6z + 5 = 0$

- أثبت أن العدد المركب $z_1 = \frac{3-i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

- أوجد الجذر الثاني.

س لتكن المعادلة: $z^2 + z + 1 = 0$

- بدون حل المعادلة: أثبت أن المركب $z_1 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

- أوجد الجذر الثاني.

الجذر التربيعي لعدد مركب

س أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3 - 4i$

س أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 5 + 12i$

س أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 + 24i$

الدوال الجيبية

$y = a\cos bx \quad y = a\sin bx \quad a \neq 0 \ , b \neq 0$

- تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية.
- $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0 \ , 2\pi]$
- $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

س أوجد الدورة و السعة لكل دالة مما يلي:

- $y = 2\cos x$
- $y = -5\cos\frac{x}{3}$
- $y = \frac{1}{2}\cos(-x)$
- $y = -2\cos 5x$

س اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos bx$ إذا كانت :

الدورة: $\frac{\pi}{3}$, $a = -2$

الدورة: π, $a = 0.25$

الدورة: 2, $a = 1$

س اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a \sin bx$ إذا كانت :

الدورة: $\frac{\pi}{2}$, $a = 3$

الدورة: 2π, $a = -\frac{1}{2}$

س أوجد الدورة و السعة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

- $y = \frac{1}{2} \sin 4x$

- $y = -4 \sin x \ \ , x \in [-\pi \ , 2\pi]$

س أوجد الدورة و السعة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

- $y = 3sin2x$

- $y = -2\sin(\frac{1}{2}x)$ $\qquad : -4\pi \leq x \leq 4\pi$

س أوجد الدورة و السعة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

- $y = 3 \cos 2x$

- $y = -2 \cos\left(\frac{3}{4}x\right), 0 \leq x \leq 2\pi$

س أوجد الدورة و السعة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

- $y = 2\cos 4x$

- $y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right) \quad : x \in [-3\pi , 3\pi]$

س أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

- $y = -\tan x$

- $y = \frac{1}{2}\tan x$

س أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

- $y = \ tan2x \ , x \in (\frac{-\pi}{4} \ , \frac{3\pi}{4})$

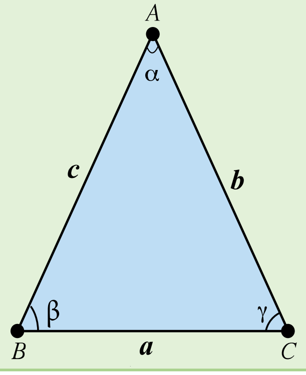
- $y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$

خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

$\tan x$	$\cos x$	$\sin x$	الخاصية
π	2π	2π	الدورة
$\mathbb{R} - \{x, x = \frac{\pi}{2} + n\pi\}$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	المجال
$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	المدى
$x = n\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$	$x = n\pi$	الأصفار
فردية	زوجية	فردية	زوجية أو فردية

قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$



س حل ΔABC حيث : $\alpha = 36°\ ,\ \beta = 48°\ ,\ a = 8cm$

س حل ΔABC حيث : $\alpha = 40° \, , \, \beta = 60° \, , \, a = 4cm$

س حل ΔABC حيث : $a = 7\ cm\ ,\ b = 6\ cm\ ,\ \alpha = 26.3°$

س حل ΔABC حيث : $a = 3\ cm\ ,\ b = 2\ cm\ ,\ \alpha = 40°$

س حل ΔABC حيث : $a = 6\ cm\ ,\ b = 7\ cm\ ,\ \alpha = 30°$

س حل ΔABC حيث : $a = 6\ cm\ ,\ b = 8\ cm\ ,\ \alpha = 35°$

قانون جيب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

س حل ΔABC حيث : $a = 11\ cm\ ,\ b = 5\ cm\ ,\ \gamma = 20°$

س حل ΔABC حيث : $a = 2\ cm\ ,\ b = 3\ cm\ ,\ \gamma = 60°$

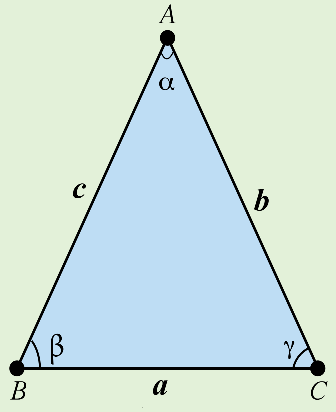
س في ΔABC حيث : $a = 9\ cm\ ,\ b = 7\ cm\ ,\ c = 5\ cm$
أوجد قياس الزاوية الأكبر.

س حل ΔABC حيث : $a = 4\ cm\ ,\ b = 3\ cm\ ,\ c = 6\ cm$

س حل ΔABC حيث : $a = 6\ cm\ ,\ b = 7\ cm\ ,\ \alpha = 30°$

س حل ΔABC حيث : $a = 5\ cm\ ,\ b = 6.5\ cm\ ,\ \alpha = 25°$

مساحة المثلث



$$Area(ABC) = \frac{1}{2} bc \ \sin\alpha$$
$$= \frac{1}{2} ac \ \sin\beta$$
$$= \frac{1}{2} ab \ \sin\gamma$$

س أوجد مساحة المثلث ABC حيث:

$a = 5\ cm \ , \ \ b = 6\ cm \ \ ,c = 8\ cm$

قاعدة هيرون

$$Area(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث: (نصف محيط المثلث) $= s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

س أوجد مساحة المثلث ABC حيث:

$a = 4\ cm\ ,\ \ b = 4\ cm\ \ ,c = 3\ cm$

س أوجد مساحة المثلث ABC حيث:

$a = 7\ cm\ ,\ \ b = 5\ cm\ \ ,\ \ c = 8\ cm$

المتطابقات المثلثية

المتطابقات المثلثية الأساسية

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \; , \; \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \; , \; \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \; , 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \; , 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

س أثبت صحة المتطابقة التالية:

- $\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$

س أثبت صحة المتطابقة التالية:

- $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$

س أثبت صحة المتطابقة التالية:

- $2\cot x \csc x = \frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1}$

س أثبت صحة المتطابقة التالية:

- $$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=4\tan x\cdot\sec x$$

س أثبت صحة المتطابقة التالية:

- $$\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$$

س أثبت صحة المتطابقة التالية:

- $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = (\csc x - \cot x)^2$

س أثبت صحة المتطابقة التالية:

- $\frac{\cot^2 \theta}{1+\csc \theta} = \cot \theta \ (\sec \theta \ - \tan \theta)$

س أثبت صحة المتطابقة التالية:

- $\frac{\sec x+\tan x}{\cot x+\cos x} = \sin x + \sin x \tan^2 x$

س أثبت صحة المتطابقة التالية:

- $\sin^2 x \cos^5 x = (\sin^2 x\ - 2\sin^4 x + \sin^6 x) \cos x$

حل معادلات مثلثية

س حل المعادلة: $\sqrt{2}\cos x = 1$

س حل المعادلة: $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

س حل المعادلة: $5\sin\theta - 3 = \sin\theta$

س حل المعادلة: $4\sin\theta + 1 = \sin\theta$, حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

س حل المعادلة: $\tan x = \sqrt{3}$

س حل المعادلة: $\tan = 1$

س حل المعادلة: $2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta$

س حل المعادلة: $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

س حل المعادلة: $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$

س حل المعادلة: $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

معادلات تحتوي على مضاعفات الزوايا

س حل المعادلة: $2\cos 3x = \sqrt{2}$ حيث $0 \leq x < \pi$

س حل المعادلة: $4\cos 2x = 2$ حيث $0° \le x < 360°$

متطابقات مجموع وفرق زاويتين

متطابقات الدوال المتكافئة:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta \quad \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \quad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta \quad \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$

س أثبت أن: $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta$

س أثبت أن: $\sec\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=csc\,\theta$

متطابقات المجموع والفرق:

$$\cos(\beta+\alpha) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta+\alpha) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$$

$$\tan(\beta+\alpha) = \frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$

$$\tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

س أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة:

- $\sin 15^o$

- $\cos 75^o$

- $\tan 105^o$

س إذا كان: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ $, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $\cos\beta = \frac{-12}{13}$ $, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

س أوجد كلا مما يلي:

$\cos(\alpha + \beta) =$

$\tan(\alpha + \beta) =$

$\sin(\beta - \alpha) =$

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

متطابقات ضعف الزاوية

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

$$sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

$$tan\,(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

س إذا كان $\cos x = \frac{3}{5}$ أستخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد: $\cos 2x$

س إذا كان $\sin x = \frac{5}{13}$ أستخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد: $\cos 2x$

س إذا كان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد: $\sin 2\theta$.

س إذا كان $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ فأوجد: $\sin 2\theta$.

س إذا كان: $\tan\theta = \sqrt{3}$,
استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

س إذا كان: $\tan\theta = -1 + \sqrt{2}$,
استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

س أثبت صحة المتطابقة: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

س أثبت صحة المتطابقة: $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

س أثبت صحة المتطابقة: $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

س أثبت صحة المتطابقة: $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2 0}{1+\tan^2 0}$

س أثبت صحة المتطابقة: $2\cos 2\theta = 4\cos^2 \theta - 2$

س أثبت صحة المتطابقة: $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

س أثبت صحة المتطابقة: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

س استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\sin 15°$

س استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\cos 15°$

س إذا كانت: $180° < \theta < 270°$, $\sin\theta = \frac{-24}{25}$, فأوجد:

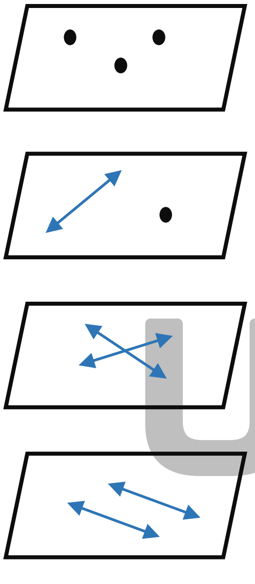
$\sin\frac{\theta}{2}$ $\tan\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$

المستقيمات والمستويات في الفضاء

مسلمات (موضوعات) الفضاء

- من نقطة واحدة يمر عدد لا نهائي من المستقيمات.
- أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد.
- كل مستقيم يحوى على الأقل نقطتين مختلفتين.
- من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بالنقطة ويوازى المستقيم المعلوم.
- في كل مستو يوجد على الأقل ٣ نقاط ليست على استقامة واحدة.
- أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعين مستوياً وحيداً

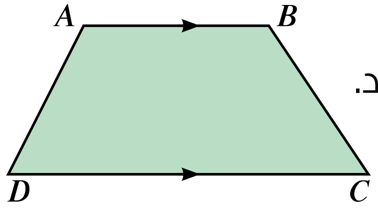
حالات تعيين المستوي في الفضاء



- أي ثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة تعين مستويا واحد فقط
- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعينان مستويا واحداً فقط
- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويا واحدا فقط
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويا واحدا فقط

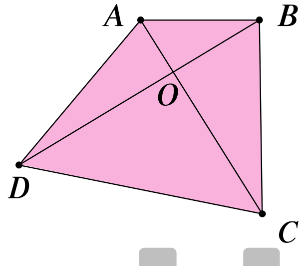
س

أثبت أن أضلاع أي شبه منحرف تقع جميعها في مستوٍ واحد.

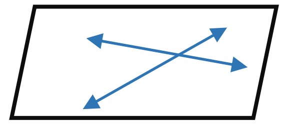


س

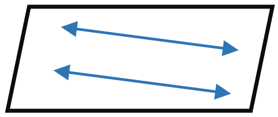
في الشكل المقابل $\overline{BD}, \overline{AC}$ يتقاطعان في O ،
أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.



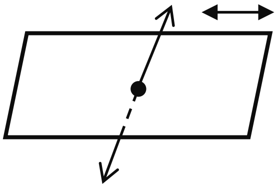
أوضاع المستقيمات في الفضاء



- متقاطعان

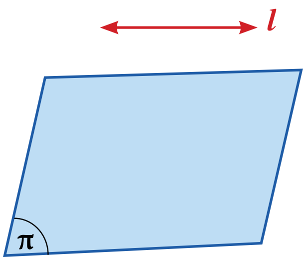


- متوازيان



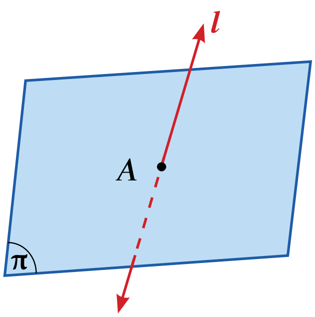
- متخالفان

أوضاع مستقيم ومستو في الفضاء



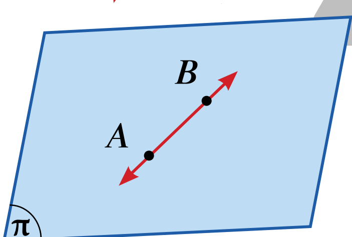
- صفر نقطة مشتركة (المستقيم مواز المستوى)

$$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \pi$$



- نقطة مشتركة واحدة (المستقيم يقطع المستوى)

$$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \{A\}$$

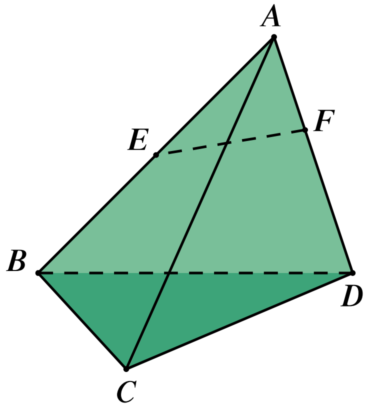


- نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل (المستقيم يقع بكامله في المستوى)

$$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \pi \qquad \therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$$

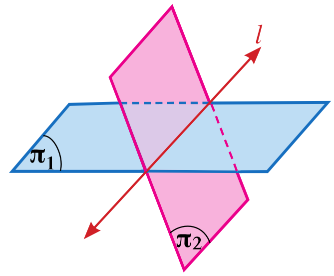
س

إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.
النقطة E تنتمي إلى $\overline{AB}$, النقطة F تنتمي إلى $\overline{AD}$
$\overline{EF}$لايوازي $\overline{BD}$. أثبت أن:



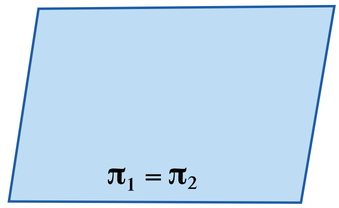
- $\overleftrightarrow{EF} \subseteq (ABD)$
- $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (ACD)

أوضاع مستويين في الفضاء



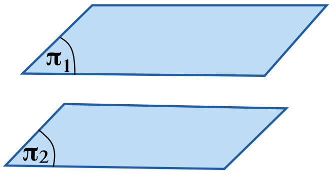
- المستويان متقاطعان في مستقيم

$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$



- المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط)

$\pi_1 = \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$



- المستويان متوازيان: لا يشتركان في أي نقطة

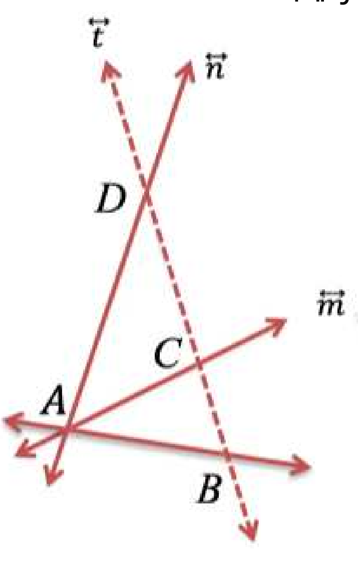
$\pi_1 \cap \pi_2 = \phi \Longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$

س

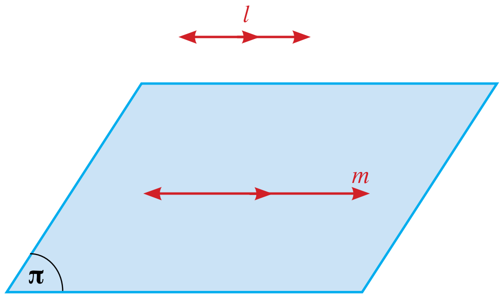
l,m,n ثلاثة مستقيمات لا تقع في مستوٍ واحد تتقاطع مثنى مثنى
أثبت أن المستقيمات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة.

س

$\overleftrightarrow{n}$, $\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{l}$ ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في A
المستقيم t يقطع المستقيمات الثلاثة في B,C,D على الترتيب
أثبت أن المستقيمات l,m,n,t تقع في مستوٍ واحد.



المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء



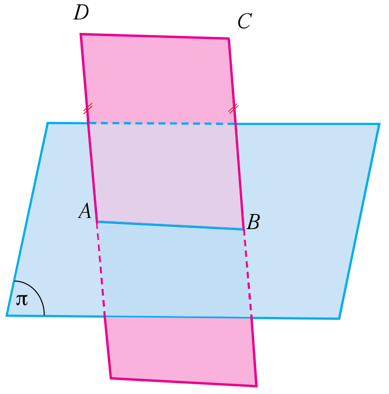
$$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}\ ,\ \overleftrightarrow{m} \subset \pi \quad \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \pi$$

نظرية ا:
إذا وازى مستقيم خارج مستو مستقيماً في المستوى فإنه يوازي المستوى.

س

فى الشكل المقابل: $AD = BC$, $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$,

أثبت أن: $\overleftrightarrow{CD} // \pi$



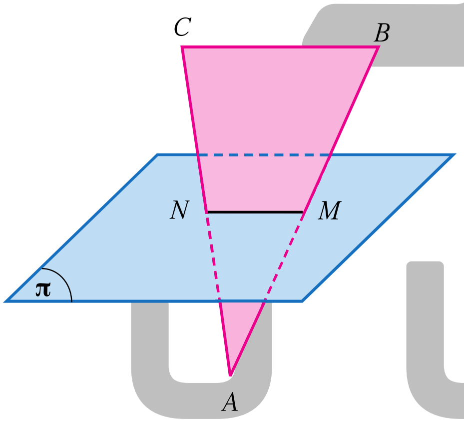
س

في لشكل المقابل: المثلث ABC فيه

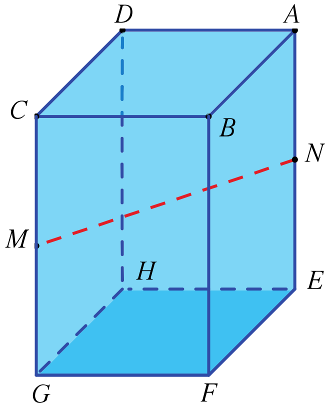
M منتصف $\overline{AB}$, N منتصف $\overline{AC}$,

N, M تنتميان الى المستوى π

اثبت أن $\overleftrightarrow{BC} // \pi$



س



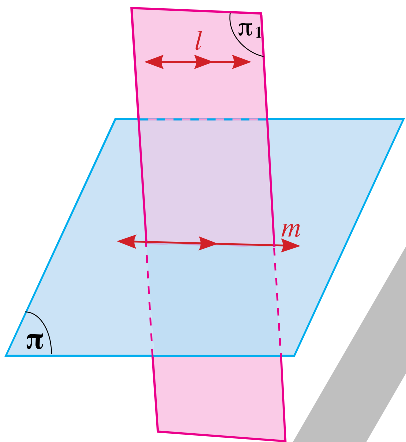
$ABCDEFGH$ شبه مكعب.

M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$

أثبت أن $(EFGH)$ يوازى $\overleftrightarrow{MN}$

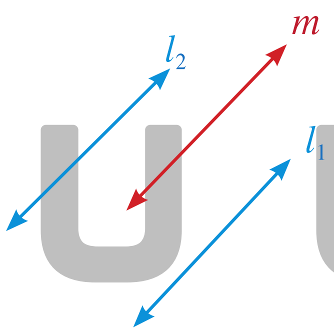
نظرية 2 - نظرية 3

نظرية 2:
إذا وازى مستقيم مستوياً , فكل مستو مار بالمستقيم ويقطع المستوى , يقطعه في مستقيم مواز للمستقيم المعلوم.



$$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{l} \parallel \pi \\ \overleftrightarrow{l} \subset \pi_1 \\ \pi_1 \cap \pi = \{\overleftrightarrow{m}\} \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$$

نظرية 3:
المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.



$$\overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{m} , \overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{m} \quad \Rightarrow \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$$

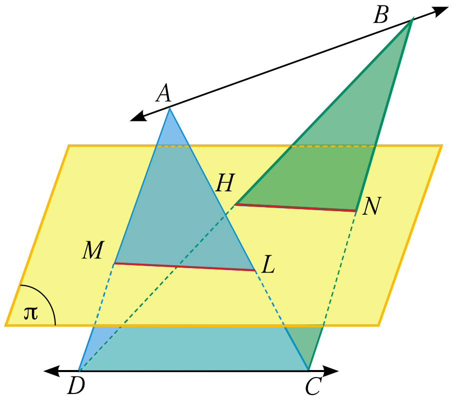
س

في الشكل المقابل: اذا كان $\overleftrightarrow{CD}$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ متخالفان $\pi \,//\, \overleftrightarrow{CD}$.

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L

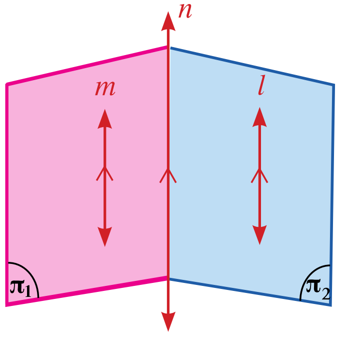
$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N

أثبت أن: $\overleftrightarrow{NH} \,//\, \overleftrightarrow{LM}$



س إذا كان $\pi // \overleftrightarrow{AB}$ فأثبت أن $LMHN$ متوازي أضلاع

نتيجة 1:
إذا توازى مستقيمان ومر بهما مستويان متقاطعان, فإن خط تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلا من هذين المستقيمين.

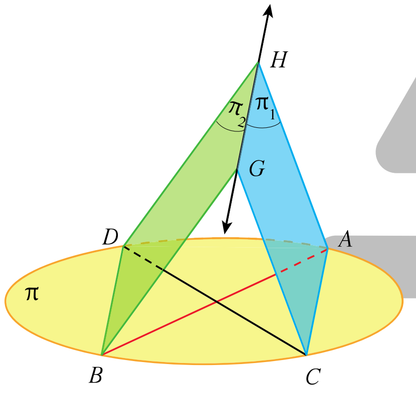


$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}\\ \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 ,\ \overleftrightarrow{l} \subset \pi_2\\ \pi_1 \cap \pi_2 = \{\overleftrightarrow{n}\}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$$

س في الشكل المقابل: $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ قطران في مستوى الدائرة π

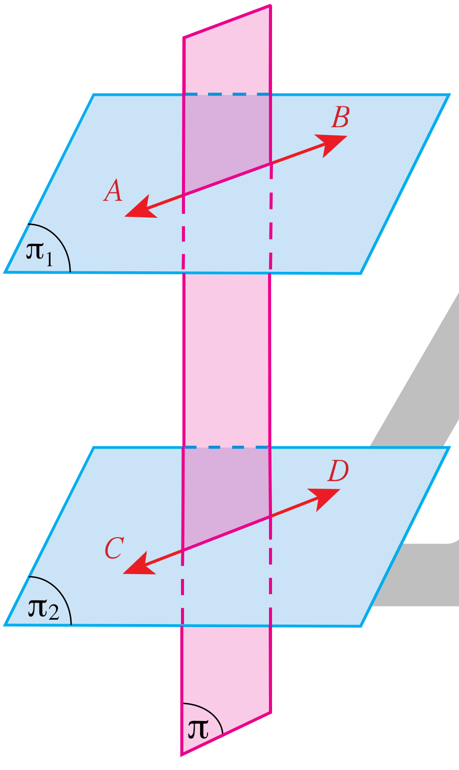
$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$



نظرية 4

نظرية 4:
إذا قطع مستو مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.



$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \backslash\backslash\, \pi_2 \\ \pi_1 \cap \pi = \{\overleftrightarrow{AB}\} \\ \pi_2 \cap \pi = \{\overleftrightarrow{CD}\} \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \backslash\backslash\, \overleftrightarrow{CD}$$

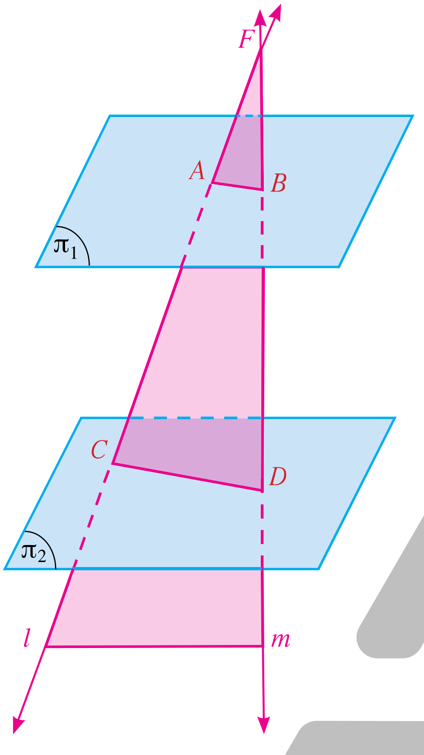
س

في الشكل المقابل: $\pi 2$, $\pi 1$ مستويين متوازيين

$\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{l}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلاً من π_1 في A,B , π_2 في C,D

إذا $BD = 4cm$, $AC = 6cm$, $CD = 9cm$, $FB = 5cm$

فأوجد محيط المثلثات FAB



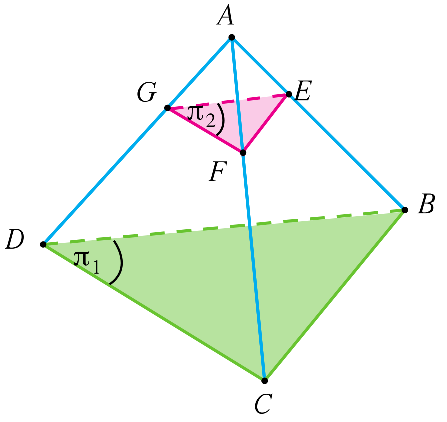
س

في الشكل المقابل: $ABCD$ هرم ثلاثي.

المستويان π_1 , π_2 متوازيان.

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$, $FG = 6cm$

فأوجد DC



بعض التمارين من كراسة التمارين

س ليكن π_2 , π_1 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث:

$$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1 , \ \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2$$

$$\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2 , \ \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1$$

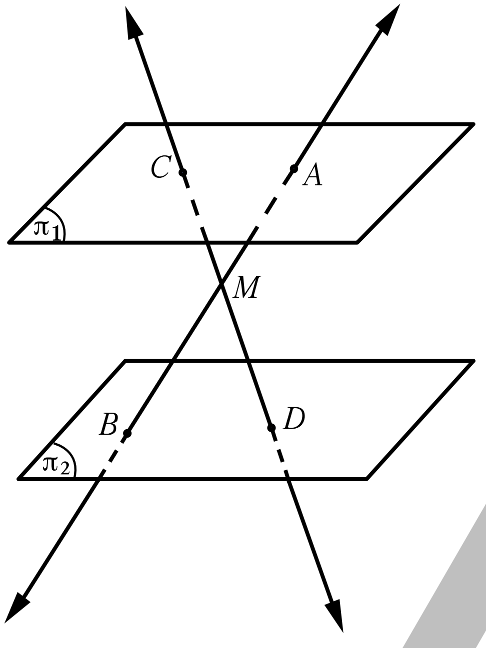
أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

س $ABEF$, $ABCD$ متوازيا أضلاع غير مستويين معاً ويتقاطعان في $\overleftrightarrow{AB}$
أثبت أن: $CDEF$ متوازي أضلاع

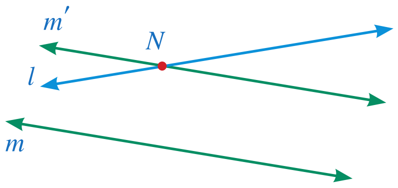
س في الشكل المقابل $\pi 2$, $\pi 1$ مستويان متوازيان, M نقطة واقعة بينهما,

حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$



تعامد مستقيم مع مستوٍ



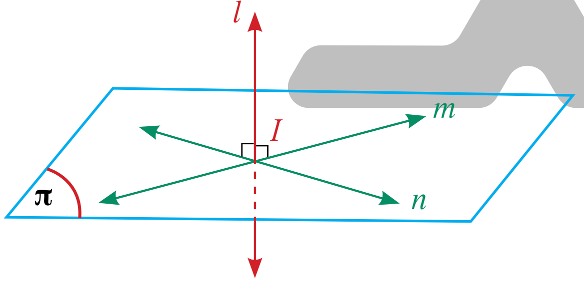
تعريف

الزاوية بين مستقيمين متخالفين: هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيم قاطع له و مواز للأخر.

تعريف

يكون المستقيم عمودي على المستوى ، إذا كان عمودياً على كل المستقيمات الواقعة في هذا المستوي. $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$

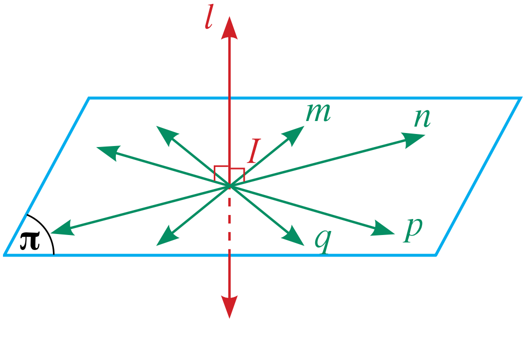
نظرية 5:
المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عمودياً على مستويهما.



$\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}\ , \overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n} \Rightarrow$

$\overleftrightarrow{l} \perp \pi$

نتيجة 2:
جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواه في مستو واحد عمودياً على المستقيم المعلوم.

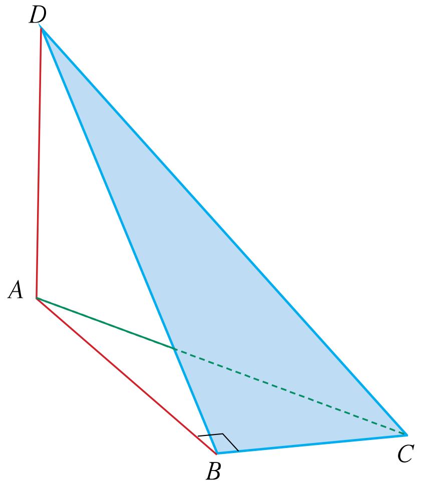


س

في الشكل المقابل, المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

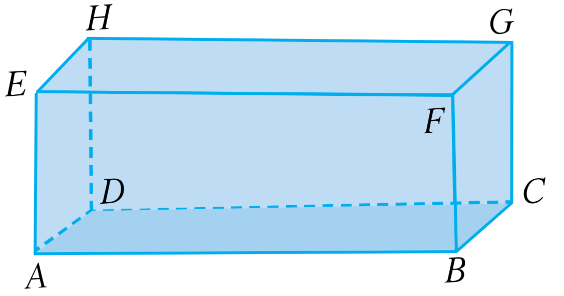
$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

أثبت أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$



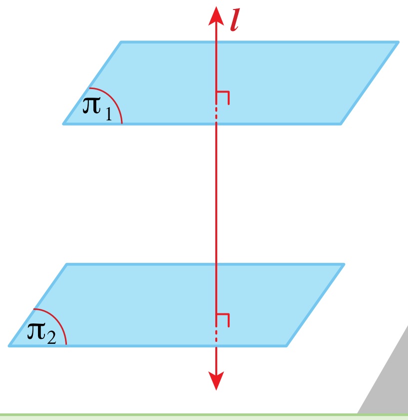
س

في شبه المكعب المقابل ،
أثبت أن المثلث BEH قائم في $\widehat{E}$



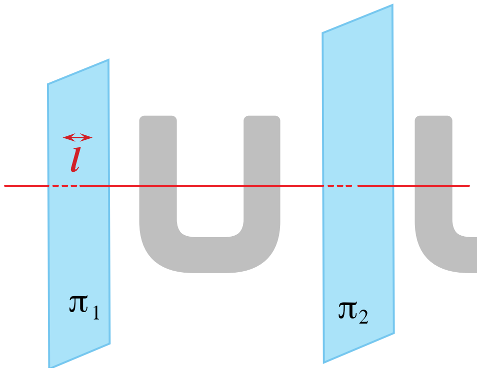
نظرية 6 - نظرية 7

نظرية ٦:
إذ كان مستقيم عمودياً على كل من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيان.



$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 , \quad \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \backslash\backslash \, \pi_2$$

نظرية ٧:
إذ كان مستقيم عمودياً على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عمودياً على المستوى الأخر



$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 , \pi_1 \backslash\backslash \, \pi_2 \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$$

س

في الشكل المقابل :

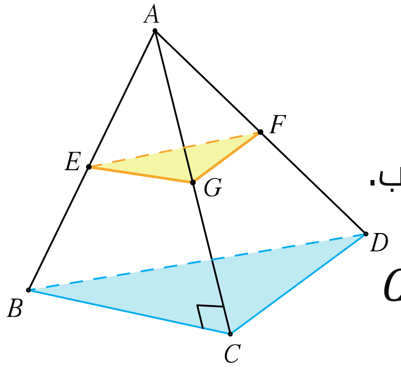
A نقطه خارج المستوى BCD,

والنقاط E,G,F منتصفات $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ على الترتيب.

اذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

وكان $CD = 5CM , AC = 12CM , AD = 13CM$

فأثبت أن: $(EGF)//(BCD)$

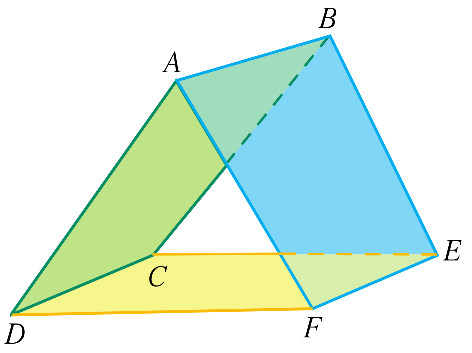


س

فى الشكل المقابل :

$ABCD$, $ABEF$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD)//(BEC)$



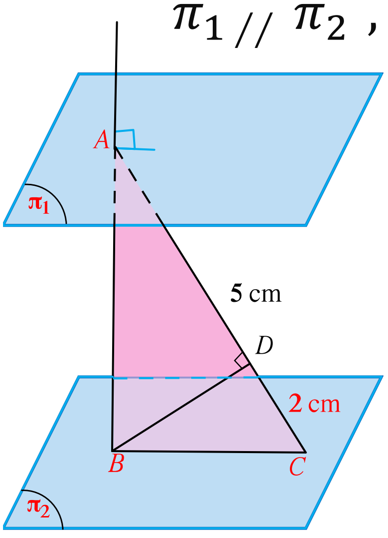
س

في الشكل المقابل , $\pi_1 // \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1 , A \in \pi_1 , \overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$

رسم: $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$ في المستوى ABC

اذاكان $AD = 5CM , DC = 2CM$

أوجد: BD



س

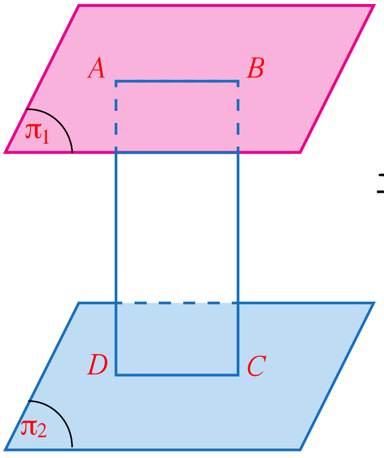
في الشكل المقابل : $\pi_1 \; // \; \pi_2$

A,B نقطتان فى π_1

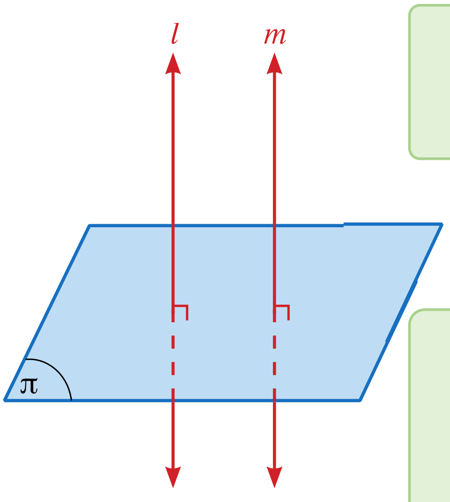
C,D نقطتان في π_2 حيث: A,B,C,D في مستوى واحد

$\overline{BC} \perp \pi_2$, $\overline{AD} \perp \pi_2$

أثبت أن $ABCD$ مستطيل



نظرية 8 - نظرية 9

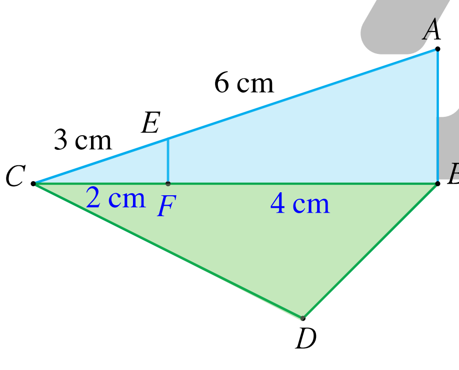


نظرية 8:
المستقيمان العموديان على مستو متوازيان

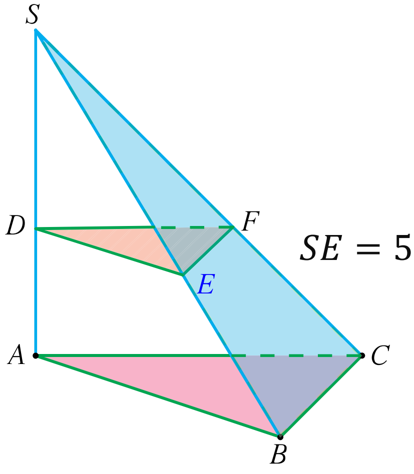
$$\underset{l}{\leftrightarrow} \perp \pi \, , \underset{m}{\leftrightarrow} \perp \pi \Rightarrow \underset{l}{\leftrightarrow} \backslash\backslash \underset{m}{\leftrightarrow}$$

نظرية 9:
إذا وازى مستقيمان أحدهما عمودياً على مستو كان المستقيم الآخر عمودياً على المستوى أيضاً

$$\underset{l}{\leftrightarrow} \perp \pi \, , \underset{l}{\leftrightarrow} \backslash\backslash \underset{m}{\leftrightarrow} \Rightarrow \underset{m}{\leftrightarrow} \perp \pi$$



س في الشكل المقابل إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$
وكان $CF = 2CM \, , FB = 4CM$
$CE = 3CM \, , EA = 6CM$
أثبت ان: $\overline{EF} \perp \overline{DB}$



س

في الشكل المقابل:

المستويان (DEF) , (ABC) متوازيان

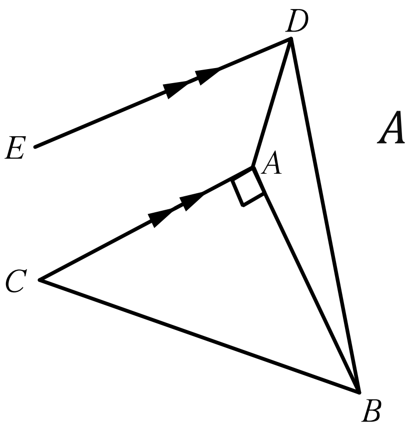
$\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$

إذا كان:

$SE = 5cm$,$SD = 3\ cm$,$DA = 2\ cm$,$BC = 5\ cm$,$AC = 6\ cm$

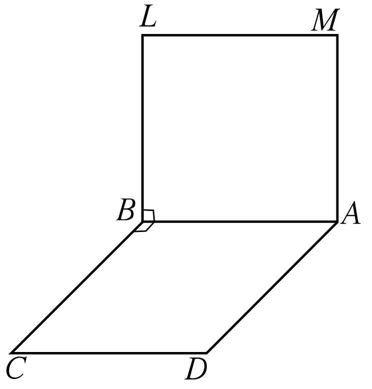
فأوجد محيط المثلث DEF

بعض أسئلة التدريبات



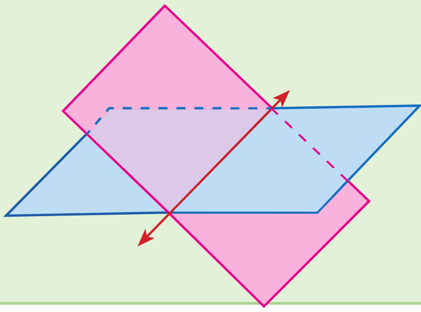
س في الشكل المقابل , ABC مثلث قائم الزاوية فى A
رسم $\overleftrightarrow{AD}$ عمودى على مستوى المثلث ABC ,
ورسم $\overleftrightarrow{CA} // \overleftrightarrow{ED}$ أثبت أن : $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{ED}$

س ABLM , ABCD مربعان ليسا فى مستو واحد,
لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$,
أثبت أن : $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$

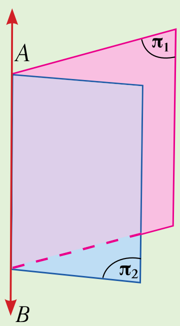


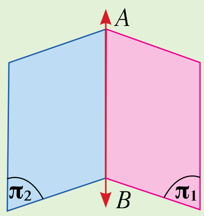
الزاوية الزوجيّة:

إذا تقاطع مستويان مختلفان في الفضاء فإنهما يتقاطعان في مستقيم وينتج من هذا التفاطع أربع **زوايا زوجية**



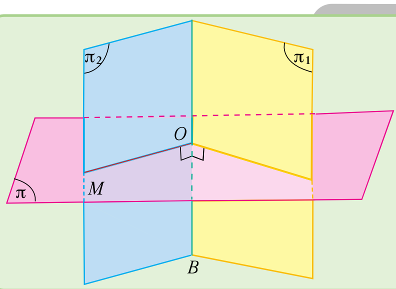
يقسم المستقيم المشترك كل مستوى إلى نصفين ويسمى المستقيم المشترك **حافه الزاويه الزوجية** أو **الفاصل المشترك** ,و يسمى كل من نصفي المستويين **وجه الزاوية الزوجية**



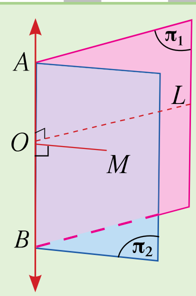


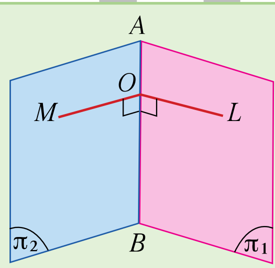
$$\pi_1 , \overleftrightarrow{AB} , \pi_2$$

الزاوية المستوية للزاوية الزوجية :
هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستو عمودي على حافتها



قياس الزاوية الزوجية :
هو قياس إحدى زواياها المستوية ودائما نأخذ قياس الزاوية الحادة

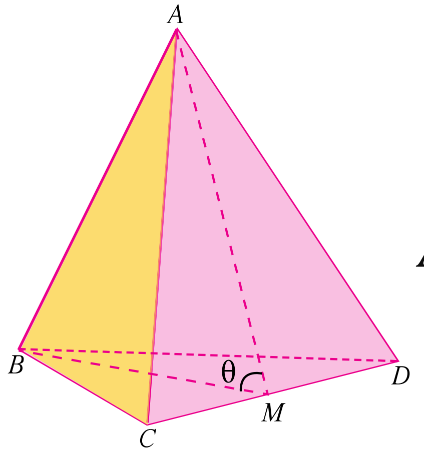




س

يبين الشكل المقابل هرما ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه $8cm$

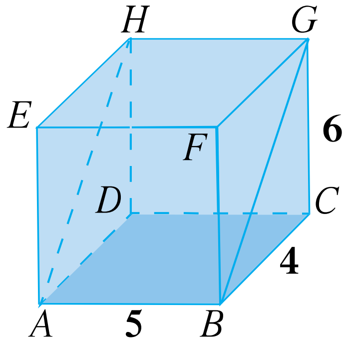
M منتصف $\overline{DC}$



- حدد الزاوية المستوية بين المستويين ADC ,BDC
- أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

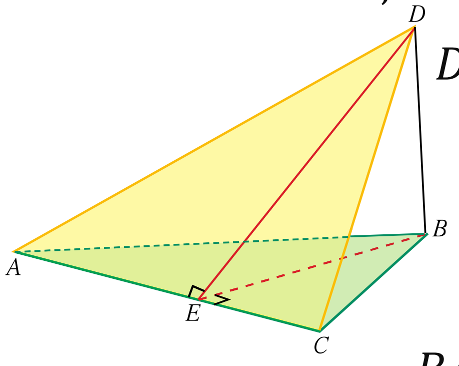
س

فى شبه المكعب المقابل , أثبت أن الزاويه GBC هى الزاوية المستويه للزاوية الزوجية للمستويين $(ABCD)$, $(ABGH)$ ثم أوجد قياسها .



س

في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC ,



$$DB = 5cm\ , AB = 10cm\ , m\left(B\widehat{A}\ C\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\overline{DB} \perp (ABC)$$

$$\overline{BE} \perp \overline{AC}\ , \overline{DE} \perp \overline{AC}$$

أوجد:

- $BE\ ,DE$
- قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $BAC\ , DAC$

مثال (٣) + حاول ص ١٤٢:

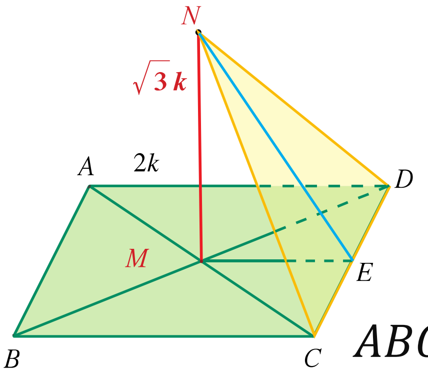
$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه فى M

و فيه $AD = 2K$

أقيم $\overline{NM}$ عمودا على $(ABCD)$

حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}\, k$

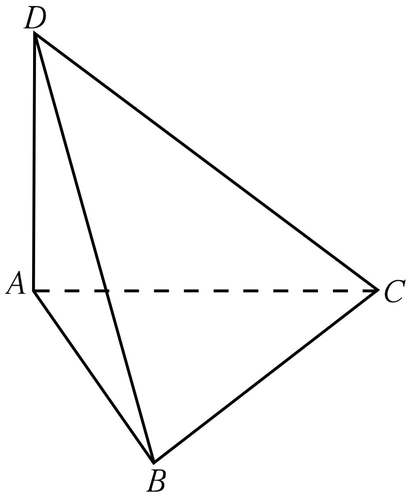
أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NCD



س ABC مثلث متطابق الأضلاع.

$\overleftrightarrow{DA}$ متعامد مع المستوي ABC

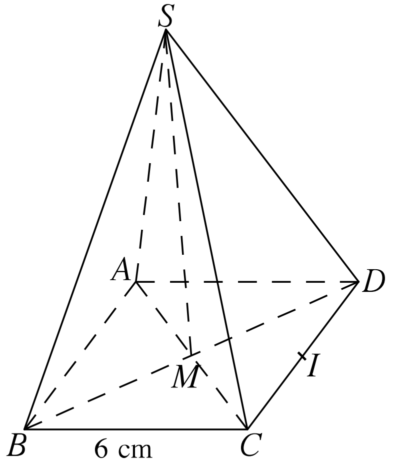
أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$



س $SABCD$ هرم مربع القاعدة طول ضلعها $6cm$ ومركزها M

بحيث أن $(ABCD) \perp \overleftrightarrow{SM}, I$ منتصف $\overline{CD}$

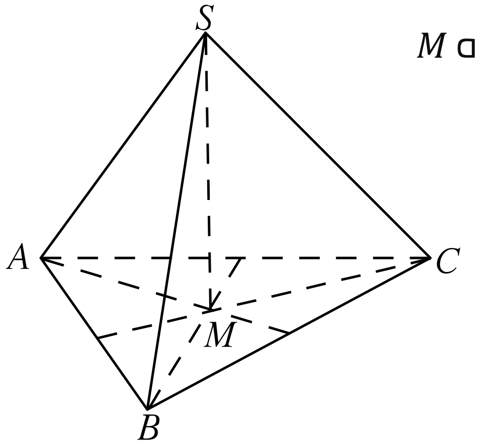
- أثبت أن: $(M\hat{I}S)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(ABCD, \overleftrightarrow{CD}, SCD)$
- أوجد: $m(M\hat{I}S)$ إذا كان $SM = \sqrt{3}cm$



س $SABC$ هرم قاعدته مثلث متطابق الأضلاع مركزه M

بحيث أن $\overleftrightarrow{SM} \perp (ABC)$

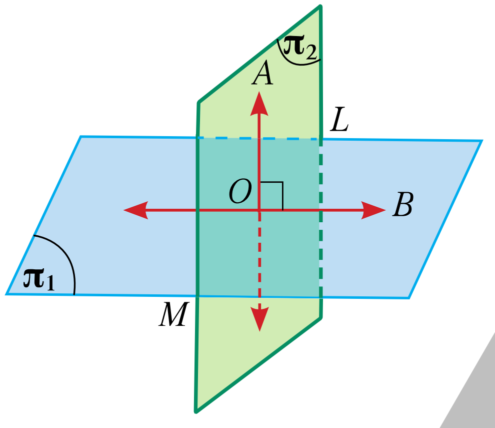
أوجد قياس الزاوية الزوجية $(SMB, \overleftrightarrow{SM}, SMC)$



المستويات المتعامدة

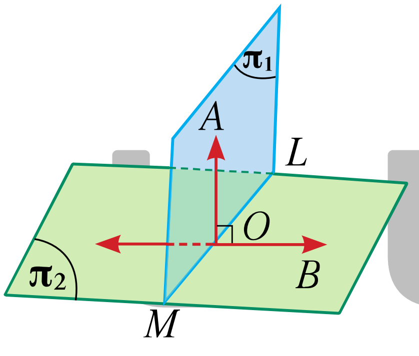
تعريف

يكون المستويان متعامدان إذا كانت الزاوية المستوية بينهما زاوية قائمة (قياس الزاوية الزوجية بين المستويين 90°



$$\pi_1 \perp \pi_2$$

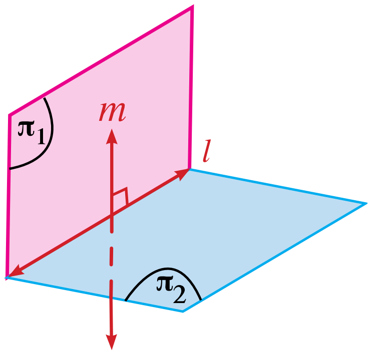
نظرية 10:
إذا كان مستقيم عمودياً على مستو فكل مستو يمر بذلك المستقيم يكون عمودياً على المستوي.



$$\overleftrightarrow{OA} \perp \pi_2\,,\quad \overleftrightarrow{OA} \subset \pi_1\,,$$

$$\Rightarrow \pi_1 \perp \pi_2\,,$$

نتيجة ٣:
إذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط تقاطعهما فإنه يكون عمودياً على المستوى الأخر.

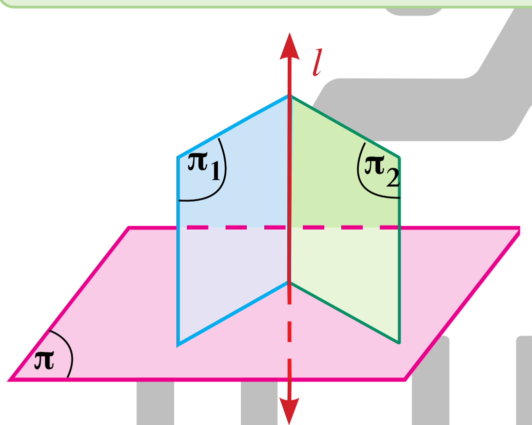


$\pi_1 \perp \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$,

$\overleftrightarrow{m} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{l}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{m} \perp \pi_2$,

نتيجة ٤:
إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودي على مستو ثالث فإن خط تقاطع المستويين يكون عمودياً على هذا المستوي الثالث.



$\pi_1 \perp \pi$, $\pi_2 \perp \pi$

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \pi$

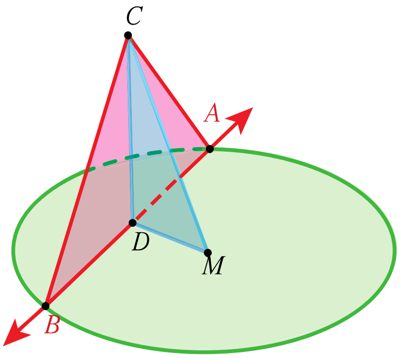
س

في الشكل المقابل: C نقطة خارج مستوي الدائرة التي مركزها M, D منتصف $\overline{AB}$

ABC مثلث فيه $CA = CB$

إذا كان $DM = DC = 5cm\ ,\ MC = \sqrt{50}cm$

أثبت أن:



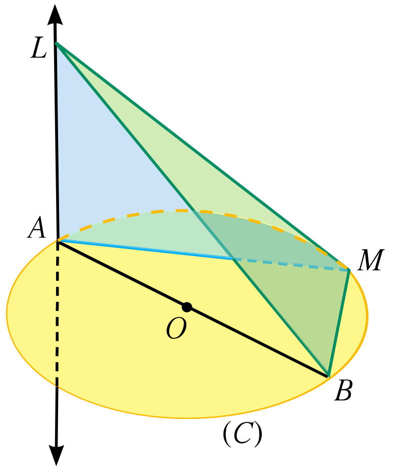
- $\overline{MC} \perp \overline{AB}$
- مستوي الدائرة $\perp (ACB)$

س

في الشكل المقابل: دائرة مركزها O , $\overline{AB}$ قطر.

M نقطة تنتمي إلى الدائرة.

$\overleftrightarrow{LA}$ متعامدة مع مستوي الدائرة.



أثبت أن:

- $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$
- $(LBM) \perp (LAM)$

س

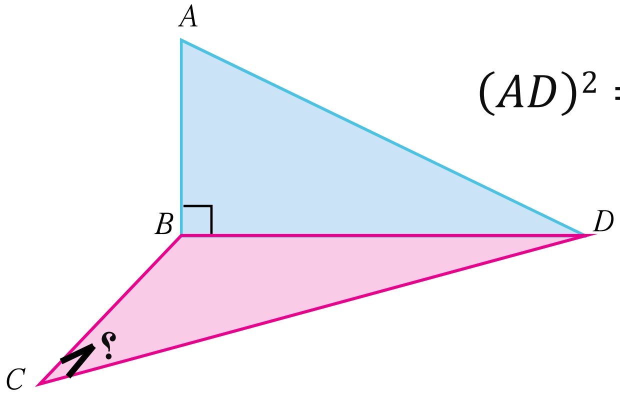
A,B,C,D أربع نقاط ليست مستوية معاً.

إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

وكان $(AD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2$

أثبت أن:

- $\overline{BC} \perp \overline{DC}$
- $(ABD) \perp (CBD)$



س

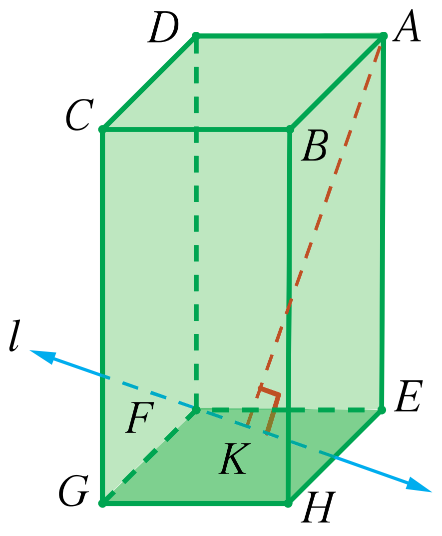
في شبه المكعب $ABCDEFGH$ المقابل.

$\overleftrightarrow{l}$ مستقيم في $(EFGH)$ يمر في F

$\overline{AK} \perp \overleftrightarrow{l}$

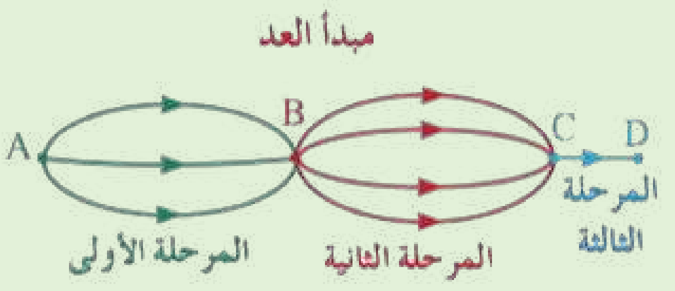
أثبت أن:

- $\overline{EK} \perp \overleftrightarrow{l}$
- $(FDK) \perp (AEK)$



مبدأ العد و التباديل و التوافيق

مبدأ العد:



لإجراء عملية على عدد من المراحل المتتابعة كما يلى:

المرحلة الأولى بـ r_1 طريقة مختلفة,

المرحلة الثانية بـ r_2 طريقة مختلفة,

المرحلة الثالثة بـ r_3 طريقة مختلفة,

..... وهكذا حتى المرحلة n بـ rn طريقةمختلفة

فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $r1 \times r2 \times r3 \times \cdots rn$

س لتكن: $A = \{1,2,4,5,6\}$
يراد تكوين أعداد ذات ثلاث منازل باستخدام عناصر A
أوجد :

- عدد الأعداد الممكن تكوينها

- عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.
- عدد الأعداد الفردية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

- عدد الأعداد الزوجية الممكن تكوينها.
- عدد الأعداد الزوجية المختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

س لتكن: $B = \{0,3,4,5,7,9\}$

يراد تكوين أعداد ذات أربعة منازل باستخدام عناصر B

أوجد :

- عدد الأعداد الممكن تكوينها
- عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها والمحصورة بين 4000, 7000 .
- عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 10 الممكن تكوينها.
- عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 5 الممكن تكوينها.
- عدد الأعداد مختلفة الأرقام والأكبر من 5000 الممكن تكوينها.

مضروب n

س $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \times 2 \times 1 \,,\, n \in \mathbb{Z}^+$

- $4!=$
- $5!=$
- $0!=$
- $1!=$

مسائل نحلها باستخدام المضروب

س بكم طريقة يمكن ترتيب **3** طلاب على **3** مقاعد ؟

س كم عدد مؤلف من 4 منازل **مختلفة** يمكن تشكيله من {2,3,5,6}

س كم كلمة مؤلفة من 3 حروف **مختلفة** يمكن تشكيلها من الأحرف {A,B,C}

التباديل

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$
$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

${}_nP_1 =$ | ${}_nP_0 =$

${}_7P_3 =$ | ${}_nP_n =$

${}_5P_0 =$ | ${}_5P_2 =$

${}_8P_1 =$ | ${}_6P_6 =$

س اشتر كت 7 يخوت فى سباق

- بكم طريقة مختلفة يمكن توقع وصول اليخوت الثلاثة الأوائل بالترتيب ؟

- ما عدد الطرائق المختلفة لوصول اليخوت الثلاثة الأوائل إذا اشترك فى السباق 10 يخوت ؟

- بكم طريقة مختلفة يمكن لثلاثة طلاب الجلوس فى صف واحد يحوى 8 مقاعد؟

- كم عدد مؤلف من 3 منازل مختلفة يمكن تشكيله من {2,3,5,6,7,8}

- كم كلمة مؤلفة من 4 حروف مختلفة يمكن تشكيلها من الأحرف $\{A,B,C,D,E,F\}$

س حل المعادلات التالية:

- ${}_{n}P_{5} = 6 \times {}_{n}P_{4}, n \geq 5$

- ${}_{n}P_{4} = 5 \times {}_{n}P_{3}, n \geq 4$

$${}_{6}P_{r} = 4 \times {}_{6}P_{r-1}$$

$$\frac{{}_{2n}P_{n+2}}{{}_{2n}P_{n-1}} = 60$$

- $_{n}P_{7} = 12 \times {}_{n}P_{5}$

- $_{8}P_{r} = 4 \times {}_{8}P_{r-1}$

- ${}_5P_r = 12 \times {}_5P_{r-2}$

- $\frac{{}_nP_{n-2}}{{}_nP_{n-4}} = \frac{n^2}{12}$

التوافيق

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

- ${}_nC_0 = 1$ ${}_nC_1 = n$ ${}_nC_n = 1$

س بكم طريقة مختلفة يمكن اختيارمجموعة من 4 عناصر من مجموعة مؤلفة من 300 عنصر ؟

س في مكتبة المدرسة 15 كتابا مختلفا من مجموعة روايات التاريخ الإسلامي. بكم طريقة يمكنك اختيار 4 كتب منها للمطالعة؟

س يتكون فريق كرة القدم في المدرسة من 18 لاعبا. يريد المدرب تشكيل فريق من 11 لاعبا.

- أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها.

- أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها إذا أراد المدرب أن يتضمن الفريق اللاعب عبد العزيز.

س أوجد قيمة n في كل مما يلي:

- ${}_nC_3 = {}_nC_4$

- ${}_nC_4 = {}_nC_5$

س أوجد قيمة n فى كل مما يلى:

- $_{n}C_{2} = 105$

س أوجد قيمة n فى كل مما يلى:

- $\frac{_{n}C_{7}}{_{(n-1)}C_{6}} = \frac{8}{7}$

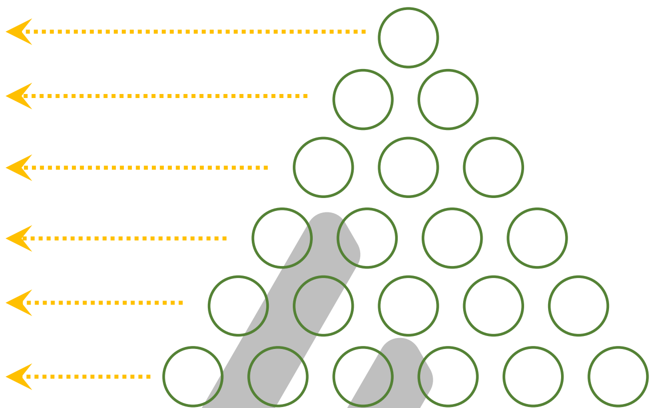
- ${}_{n}C_3 + {}_{n}C_2 = 3n(n-1)$

- ${}_{n}C_4 = {}_{n}C_{n-2}$

- ${}_{2n}C_4 = \frac{1}{2}\ {}_{2n}C5$

نظرية ذات الحدين

مثلث باسكال



نظرية ذات الحدين

$$(x+y)^n = {}_nc_0x^n + {}_nc_1x^{n-1}y + {}_nc_2x^{n-2}y^2 + \cdots + {}_nc_r x^{n-r}y^r + \cdots + {}_nc_{n-1}xy^{n-1} + {}_nc_ny^n$$

س استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل من:

- $(x+y)^2$

- $(a-b)^4$

- $(2x-y^2)^5$

- $(x+y)^5$

س في مفكوك: $(2x-3y^2)^{10}$ أوجد الحد السابع

س فى مفكوك: $(3x^2 - y)^{15}$ أوجد معامل T_{12}

س أوجد الحد الذي يحتوي علي x^3y^4 فى مفكوك $(2x + 3y)^7$

س أوجد الحد الذي يحتوي على x^2y^3 فى مفكوك $(3x-y)^5$

الاحتمال

التجربة العشوائية

التجربة العشوائية:
هي تجربة لها عدة نواتج مختلفة ممكنة ولكن لا يمكن التأكد مسبقا من أى ناتج منها سوف يتحقق عند إجراء التجربة.

س في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة الوجه العلوي.
أكتب وحدد نوع كل من الأحداث التالية:

- A ظهورعدد أكبر من 5
- B ظهور عدد فردى
- C ظهور عدد زوجي
- D ظهور عدد أصغر من 7

- أثبت أن B,C حدثان متتامان.
- بين فيما إذا كان الحدثان C,D متنافيان أم لا.

س اختير طالب عشوائيا من بين طلاب شعبتى الصف الحادي عشرة

المجموع	الشعبة B	الشعبة A	وسيلة النقل
31	15	16	الحافلة المدرسية
14	8	6	مع الأهل
7	5	2	سيارة نقل عام
52	28	24	المجموع

- ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يستقلون الحافلة المدرسية

- ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يقلونهم أهلهم الى المدرسة؟

- ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الشعبة B؟

س الطلاب: مصطفى , محمد , طه , أحمد , أمين
أراد مدير المدرسة اختيار3 منهم لتمثيل المدرسة فى مسابقة ثقافية .
ما احتمال اختيار (محمد)؟

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ حدثان فإن B,A

$P(A \cap B) = 0 \quad \Leftrightarrow$ حدثان متنافيان B,A

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \Leftrightarrow$ حدثان مستقلان B,A

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad \Leftrightarrow$ $\overline{A}$ هو الحدث المتمم للحدث A

س إذا كان الحدثان t, r متنافيان . أوجد $P(t \cup r)$.

- ❑ $P(t)=12\%$, $P(r)=27\%$
- ❑ $P(t) = \frac{5}{8}$, $P(r) = \frac{1}{8}$

إذا كان الحدثان m, n مستقلان . أوجد $P(m \cap n)$.

- ❑ $P(m)=0.6$; $P(n) = 0.9$
- ❑ $P(m) = \frac{1}{4}$; $P(n) = \frac{2}{3}$

س رمي حجر نرد منتظم . فما احتمال الحصول على أحد مضاعفات العدد 3 أو عدد زوجي؟

- ما احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أولي؟

س في أحد البلدان , 30% من السكان هم تحت سن العشرين , 17% فوق الستين . اختير شخص من السكان عشوائيا . فما احتمال أن يكون تحت سن العشرين أو فوق الستين؟

احتمال ذات الحدين

$$P(E) = {}_nC_k \cdot P(H)^k \cdot P(T)^{n-k}$$
$$= {}_nC_k \cdot mk(1-m)^{n-k}$$

س تفوز 40% من البطاقات بجوائز مع راشد 3 بطاقات . ما احتمال أن يفوز راشد بجائزتين؟

س ما احتمال أن يفوز راشد بجائزة واحدة فقط؟

س في إحدى الآلات الحاسبة 4 بطاريات . احتمال أن تخدم كل بطارية مدة عام كامل يساوى 90% ما احتمال أن تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام؟

س ما احتمال أن تخدم 3 بطاريات فقط مدة عام كامل؟

س فى إحدى المدن , وافق 40% من السكان على مرور القطار السريع فى الغابة قرب مدينتهم . اختير 10 أشخاص عشوائيا من سكان المدينة , فما احتمال أن يكون 4 منهم قد وافقوا على مرور القطار السريع؟

س يستخدم حوالى 11% من الطلاب اليد اليسري للكتابة . يوجد فى أحد الصفوف 30طالبا . فما احتمال أن يكون 4طلاب من هذا الصف يستخدمون اليد اليسري للكتابة؟