الملف حل أسئلة حاول أن تحل (المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني)

مناقشة دعنا نفكر ونناقش

لتكن $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$

أكمــــــــــل

$f(x) = 4x^3 - 6x = g(x)$

$g'(x) = 12x^2 - 6$

هـــــــــــل $(f'(x))' = 12x^2 - 6$

أولاً :

المشتقات ذات الرتب العليا

رمزنا سابقاً لمشتقة داله علي مجالها بالرمز $y' = \frac{dy}{dx}$
والأن سوف تسمي y' المشتقه
من الرتبه الأولي للداله y بدلاله المتغير X

والمشتقه الأولي نفسها $(y)'$ يمكن ان تكون داله قابله للاشتقاق
علي مجالها بدلاله المتغير X وبالتالي يمكن كتابتها :

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

وهذه تسمي المشتقه من الرتبه الثانيه للداله y بدلالة X
والمشتقه الثانيه نفسها يمكن ان تكون داله قابله للاشتقاق علي مجالها بدلالة المتغير X
وبالتالي يمكن كتابة :

$$y''' = \frac{d(y)''}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2 y}{dx^2}\right] = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

وهذه تسمي المشتقه من الرتبه الثالثة للداله y بدلالة X :

وبصوره عامه إذا كان n عدداً صحيحاً حيث $n > 1$
فإن مشتقة الداله y من الرتبه n بدلالة X هي علي الشكل التالي :

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left[y^{(n-1)} \right] = \frac{d^n y}{d x^n}$$

تذكـــر

a $y = f(x)$

b $\frac{dy}{dx} = y^{\backslash}$

ملاحظه

احياناً نستخدم قاعده السلسله مرتين أو اكثر لإيجاد مشتقه

ملاحظه

لايجب الخلط بين رتبه مشتقه الداله $y^{(n)}$, y^n من قوي y

مثال (1)
صـ 109

اوجد المشتقات حتي الرتبه الرابعه للداله $y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$ بدلاله المتغير X

الحـــل

$$y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$$

مشتقه من الرتبه الأولي

$$y' = \frac{dy}{dx} = 14x^6 - 8x + 3$$

مشتقه من الرتبه الثانية

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 84x^5 - 8$$

مشتقه من الرتبه الثالثة

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = 420x^4$$

مشتقه من الرتبه الرابعة

$$y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = 1680x^3$$

حاول ان تحل
(1) صـ 109

اوجد المشتقات حتي الرتبه الثالثة للداله $Y = 4X^5 - 5X^3 + 7$
بدلاله المتغير X

الحـــل

$$y = 4x^5 - 5x^3 + 7$$

مشتقه من الرتبه الأولي

$$y' = \frac{dy}{dx} = 20x^4 - 15x^2$$

مشتقه من الرتبه الثانية

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 80x^3 - 30x$$

مشتقه من الرتبه الثالثة

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = 240x^2 - 30$$

مثال (2) صـ109

اذا كانت $y = \sin x$ بين ان $y^{(4)} = y$

الحـل

y داله معرفه لكل قيم x علي R

$y = \sin x$

مشتقه من الرتبه الأولي

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos x$$

مشتقه من الرتبه الثانية

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\sin x$$

مشتقه من الرتبه الثالثة

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = -\cos x$$

مشتقه من الرتبه الرابعة

$$y^{(4)} = \frac{d^4 y}{dx^4} = \sin x$$

ماذا نلاحظ

$$y^{(4)} = y$$

حاول ان تحل
(2)صـ 109

اذا كانت $y = \cos x$ بين ان $y^{(4)} + y'' = 0$

الحل

y داله معرفه لكل قيم x علي R

$$y = \cos x$$

مشتقه من الرتبه الأولي

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sin x$$

مشتقه من الرتبه الثانية

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x$$

مشتقه من الرتبه الثالثة

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \sin x$$

مشتقه من الرتبه الرابعة

$$y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = \cos x$$

$$y^{(4)} + y = \cos x + (-\cos x) = 0$$

مثال (3) صـ110

أوجد y حيث $y = \dfrac{1}{\cos x}$

الحل

$$y = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow y = \sec x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sec x \tan x$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(\sec x \tan x)$$

$$= \tan x \frac{d}{dx} \sec x + \sec x \frac{d}{dx} \tan x$$

$$= \tan x \, . \, \sec x \, . \tan x + \sec x \, . \sec^2 x$$

$$= \sec x \tan^2 x + \sec^3 x$$

حاول ان تحل
(3)صـ110

أوجد y حيث $y = \frac{1}{\sin x}$

الحـــل

$y = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow y = \csc x$

$y' = \frac{dy}{dx} = -\csc x \cdot \cot x$

$y'' = \frac{d}{dx}(-\csc x \cdot \cot x)$

$= -\csc x \cdot -\csc^2 x + \cot x \cdot \cot x \cdot -\csc x$

$= -\csc x \cdot \cot^2 x + \csc^3 x$

يمكن ايجاد مشتقات بعض الدوال علي الصوره

$$y = f(x)$$

$$y = 3x^2 - 2x + 1$$

$$y = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$y - xy = x$$

$$y(1 - x) = x \Rightarrow y = \frac{x}{1 - x}$$

حيث يمكن كتابتها بالصوره الصريحه y

الدالة الصريحه : داله تحدد فيها y مباشرةً متي علمت قيمة x

ومنه يمكننا ايجاد مشتقة الداله او ميل المنحني

الأشتقاق الضمني

منحنى الدالة $X^2 + y^2 = 25$

نجد ان ميل المنحنى معرف عند جميع نقاطه

بأستثناء النقطتين $(5 ، 0)$ ، $(-5 ، 0)$

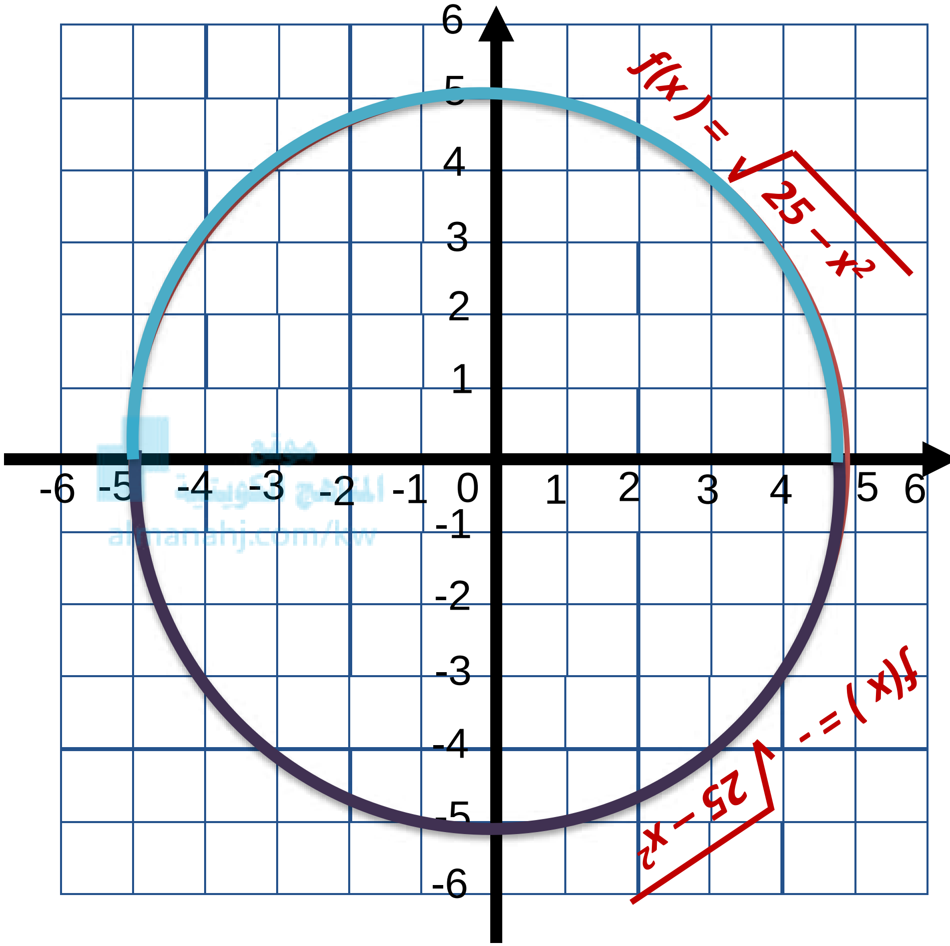
المنحنى هو اتحاد منحنيي الدالتين

$$y_1 = f_1(x) = -\sqrt{25 - x^2}$$

$$y_2 = f_2(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

قابلتين للاشتقاق عند اي نقطة في مجالها عدا

5 ، -5



$$y^2 - 2xy + 3x = 0$$

$$x^2 - \sqrt{y} + 2y = 0$$

هل يمكن ايجاد ميل المنحني اذا كان من غيرالممكن التوصل للصورة الصحيحة للحصول علي الدوال المكونه لها نلاحظ في الدوال السابقه

يصعب فصلها , وكتابتها علي الصورة الصريحة

لذلك نلجأ للاشتقاق الضمني

مثال توضيحي

أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y^3 + 5y^2 - x^3 = 0$

الحل

نفرض أن $y = f(x)$

وبالتعويض في المعادلة

$$f(x)^3 + 5(f(x))^2 - x^3 = 0$$

وبإستخدام قاعدة السلسلة نوجد المشتقه فتكون كالتالي

$$3(f(x))^2 \cdot f'(x) + 10 f(x) \cdot f'(x) - 3x^2 = 0$$

أي أن

$$3y^2 y' + 10 y y' - 3x^2 = 0$$

$$y'(3y^2 + 10y) = 3x^2$$

وبحل هذه المعادله للحصول علي

يتم حذفها

$$y' = \frac{3x^2}{(3y^2 + 10y)}$$

وبإستخدام نفس الخطوات المتبعه في المثال التوضيحي يمكننا التوصل الي ان :

$$(y^2)' = 2yy' , (y^3)' = 3y^2y'$$

عموماً تتم عملية الأشتقاق الضمني وفق الخطوات التالية علي الترتيب :

1. اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x
2. تجميع الحدود التي تحتوي $\frac{dy}{dx}$ أو y' في احد اطراف المعادلة
3. إخراج $\frac{dy}{dx}$ أو y' كعامل مشترك
4. كتابة المعادلة علي صورة $\frac{dy}{dx}$ أو y' بدلالة y ، x

مثال (4)
صـ 111

اوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ في الحالات التاليه

الحـــل

a

$$y^2 + xy = 7x$$

نشتق طرفي المعادله بالنسبه للمتغير X بإعتبار أن y داله في X قابله للاشتقاق وتطبيق قاعدة السلسله هو :

$$2yy' + xy' + y = 7$$

$$y'(2y + x) = 7 - y$$

$$y' = \frac{7 - y}{(2y + x)}$$

مثال (4)
صـ 111

b

$$y = x + x^2 y^5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} + \frac{d}{dx}(x^2 y^5)$$

$$y' = 1 + y^5 \frac{d(x^2)}{dx} + x^2 \frac{d(y^5)}{dx}$$

$$y' = 1 + 2xy^5 + 5y^4 y' x^2$$

$$y' - 5y^4 y' x^2 = = 1 + 2xy^5$$

$$y'(1 - 5y^4 x^2) = = 1 + 2xy^5$$

$$\boxed{y' = \frac{1 + 2xy^5}{(1 - 5y^4 x^2)}}$$

حاول ان تحل رقم
(4) صـ 112

لتكن $y^2 = x^2 - 2x$ ، اوجد $y = \frac{dy}{dx}$

الحـــل

$$y^2 = x^2 - 2x$$

$$2yy' = 2x - 2$$

$$yy' = x - 1$$

$$y' = \frac{X - 1}{y}$$

مثال (5)
صـ 112

أوجد ميل المماس للمنحني (الدائره) الذي معادلته
$x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة (3 , - 4)

الحـــل

يمكننا ايجاد ميل المنحني عند النقطه (3 , - 4) بسهوله
بإستخدام الأشتقاق الضمني للمعادله الأصليه بالنسبه الي

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

بالتعويض

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,-4)} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

ميل المماس = $\frac{3}{4}$

حاول أن تحل
(5) صـ 112

أوجد ميل المماس للمنحني الذي معادلته
$X^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند النقطة (1 ، 1)

الحـــل

$X^2 - y^2 + yx - 1 = 0$

$2x - 2yy' + y + y'x = 0$

$2x + y + y'(-2y + x) = 0$

$y'(-2y + x) = -(2x + y)$

$$y' = \frac{(-2x - y)}{(x - 2y)}$$

وبالتعويض ب (1 ، 1)

$y' = 3$

ميل المماس المنحني = 3

مثال (6) صـ113

أوجد ميل المماس للمنحني الذي معادلته $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$

الحـل

$$\frac{d}{dx}(2y) = \frac{d}{dx}(x^2 + \sin y)$$

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin y)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}(2 - \cos y) = 2x$$

بالتعويض

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2\sqrt{\pi}, 2\pi)} = \frac{2(2\sqrt{\pi})}{2 - \cos(2\pi)}$$

$$= \frac{4\sqrt{\pi}}{2-1}$$

$$= 4\sqrt{\pi}$$

ميل المماس المنحني $4\sqrt{\pi}$

حاول أن تحل
(6) صـ 113

أوجد ميل المماس للمنحني الذي معادلته

$X^2 + y^2 - 2yx = 1$ عند النقطة $(2, 1)$ حيث $X \neq y$

تعديل

تعديل

الحـــل

$$X^2 + y^2 - 2yx = 1$$

$$2X + 2yy' - 2(xy' + y) = 0$$

$$2X + 2yy' - 2xy' - 2y = 0$$

$$X + yy' - xy' - y = 0$$

$$X - y + yy' - xy' = 0$$

$$X - y = y'(x - y)$$

$$y' = \frac{X - y}{(x - y)} = 1$$

ميل المماس = 1

مثال (7)
صـ113

للمنحني الذي معادلته $2\sqrt{y} + y = x$
اوجد $y^{\backslash}$ ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحني عند النقطه (1 ، 3)

الحـــــل

$$2y^{\frac{1}{2}} + y = x$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} y^{\frac{-1}{2}} y' + y' = x$$

$$\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot y' + y' = 1$$

$$y' \left(\frac{1}{\sqrt{y}} + 1 \right) = 1$$

$$y' = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{y}} + 1}$$

الأشتقاق الضمني

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{1 + \sqrt{y}}$$

بالتعويض بـ (1، 2)

$$y' = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

ميل المماس $= \frac{1}{2}$

حاول ان تحل
صـ 114 رقم
(7)

للمنحني الذي معادلته $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$
اوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحني عند النقطه (1 ، 1)

الحـــــل

الأشتقاق الضمني

$$y^2 + (y)^{\frac{1}{2}} + x^2 = 3$$

$$2yy' + \frac{1}{2}\, y'\, y^{\frac{-1}{2}} + 2x = 0$$

$$2yy' + \frac{1}{2}\, y'\, y^{\frac{-1}{2}} = -2x$$

$$y'\left(2y + \frac{1}{2}\, y^{\frac{-1}{2}}\right) = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2y + \frac{1}{2}\, y^{\frac{-1}{2}}}$$

$$y' = \frac{-2x}{2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}}$$

بالتعويض ب (1 ،1)

$$y' = \frac{-2}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{-4}{5}$$

ميل المماس = $\frac{-4}{5}$

مثال (8)
صـ 114

إذا كانت $y = \sqrt{1-2x}$ فأثبت أن $y\, y'' + (y')^2 = 0$

الحـــل

لتكن $y = (g \circ h)(x)$ حيث

$$g(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$h(x) = 1 - 2x \quad \Rightarrow \quad h'(x) = -2$$

$$g(h(x)) = \frac{1}{2\sqrt{1-2x}}$$

$$y' = g'(h(x)).h(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-2x}} \cdot -2$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$$

$$y = \frac{(0)\sqrt{1-2x} - (-1)\frac{-1}{\sqrt{1-2x}}}{(\sqrt{1-2x})^2}$$

$$y'' = \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-2x}}}{(\sqrt{1-2x})^2}$$

$$y'' = \frac{-1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}$$

$$yy'' + (y')^2 = \sqrt{1-2x}\;\frac{-1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}} + \left(\frac{-1}{\sqrt{1-2x}}\right)^2$$

$$= \frac{-1}{1-2x} + \frac{1}{1-2x} = 0$$

حاول ان تحل
صـ114 رقم8

إذا كانت $y = x \sin x$ فأثبت أن $y''' + y' + 2\sin x = 0$

الحـــل

$$y = x \sin x$$

$$y' = x \cos x + \sin x$$

$$y'' = -x \sin x + \cos x + \cos x$$

$$y'' = 2\cos x - x \sin x$$

$$y''' = -3 \sin x - x \cos x$$

$$y''' + y' + 2\sin x = -3 \sin x - x \cos x + x\cos x + \sin x + 2\sin x$$

$$y''' + y' + 2\sin x = -3 \sin x \quad + 0 \quad + 3\sin x$$

$$y''' + y' + 2\sin x = 0$$

مثال 9

لتكن $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

اثبت ان: $(1+x^2)f'''(x) + 6xf''(x) + 6f'(x) = 0$

الحل:

نوجد اولا: $\boldsymbol{f'(x), f''(x), f'''(x)}$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2(-2) - (-2x)(2)(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{(1+x^2)^3(12x) - (6x^2-2)(3)(1+x^2)^2 2x)}{(1+x^2)^6}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^3\,(-24x^3+24x)}{(1+x^2)^6}$$

$$f''(x) = \frac{(-24x^3+24x)}{(1+x^2)^4}$$

$$(1+x^2)f'''(x) + 6xf''(x) + 6f'(x)$$

$$\frac{(-24x^3+24x)}{(1+x^2)^4} + \frac{36x^3-12x}{(1+x^2)^3} + \frac{-12x^3-12x}{(1+x^2)^3}$$

=0

حاول ان تحل 9

لتكن $f(x) = \frac{1}{1-x}$

اثبت ان $f(x) = \frac{3!}{(1-x)^4}$

الحل:

نوجد اولا:

$$\boldsymbol{f'(x), f''(x), f'''(x)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2\,(1-x)}{(1-x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-2(3)(1-x)^2(-1)}{(1-x)^6}$$

$$3! = 3*2*1 = 6$$

$$f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4}$$