# المتغيرات العشوائية المتقطعة ( المنفصلة)

**مثال ١**

في تجربة القاء قطعة نقود متماثلة ثلاث مرات متتالية وليكن المتغير العشوائي س يعبر عن عدد الصور أوجد ما يلي :

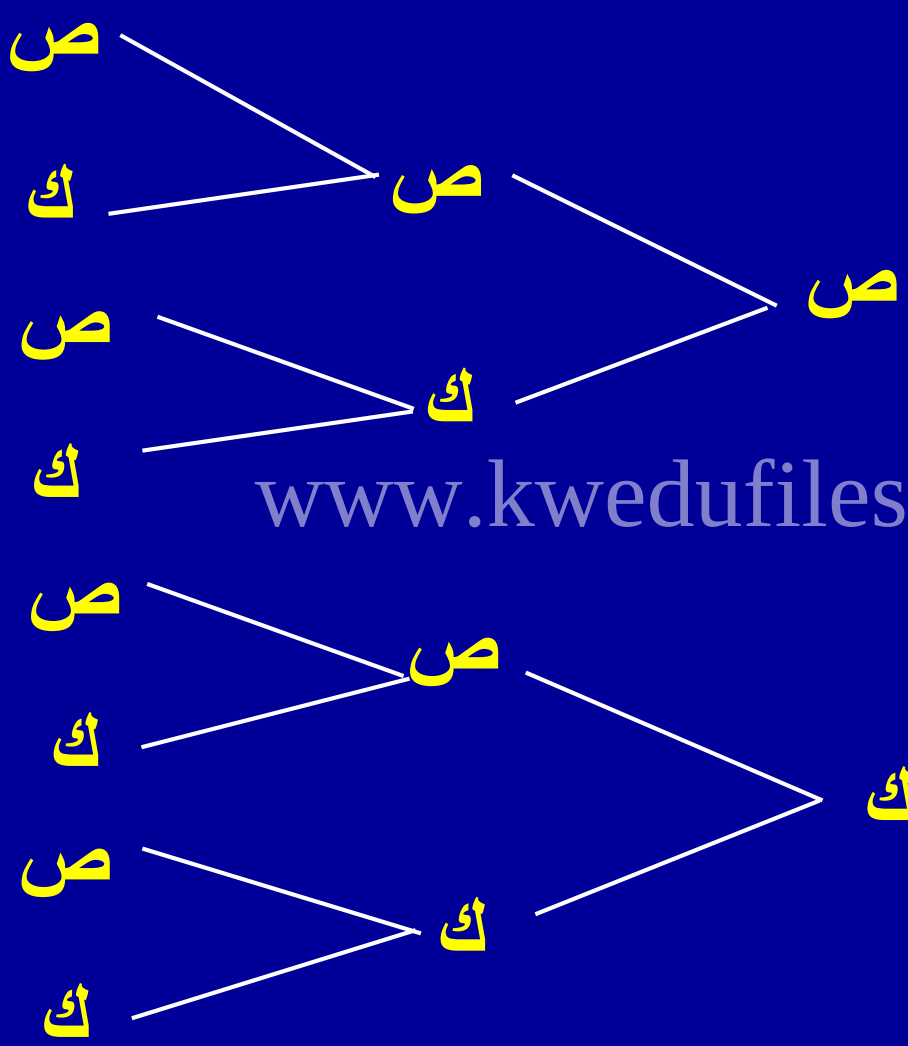
أ - فضاء العينة

ب - مدى المتغير العشوائي س.

جـ - نوع المتغير العشوائي س.

www.kwedufiles.com

الحل :




www.kwedufiles.com

فضاء العينة

## فضاء العينة:

ف = { (ص،ص،ص)، (ص،ص،ك)، (ص،ك، ص)، (ص،ك،ك)،

(ك،ص،ص)، (ك، ص ،ك)، (ك، ك، ص)، (ك ،ك ،ك) }

www.kwedufiles.com

| عناصر فضاء العينة (ف) | عناصر مدى المتغير العشوائي س |
| --- | --- |
| (ص ، ص ، ص) | ٣ |
| (ص ، ص ، ك ) | ٢ |
| ( ص ، ك ، ص) | ٢ |
| (ص ، ك ، ك ) | ١ |
| ( ك ، ص، ص) | ٢ |
| ( ك ، ص ، ك ) | ١ |
| ( ك ، ك ، ص ) | ١ |
| ( ك ، ك ، ك ) | ٠ |

www.kwedufiles.com

∴ مدى التغير العشوائي س ={ ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ }

www.kwedufiles.com

جـ - نوع المتغير العشوائي س :

متقـــــطع .

# دالة التوزيع الاحتمالي

## مثال ٢

عند إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين وبفرض أن المتغير العشوائي س يعبر عن «عدد الكتابات» أوجد دالة التوزيع الاحتمالي ( د ) للمتغير العشوائي س .

www.kweduflies.com

**الحل:** ١ـ فضاء العينة (ف) = {(ص،ص)،(ص،ك)،(ك،ص)،(ك،ك)}

عدد عناصر فضاء العينة ن(ف) = ٤

| عناصر (ف) | عناصر مدى (س) |
|---|---|
| ( ص، ص) | ٠ |
| (ص ، ك ) | ١ |
| ( ك ، ص ) | ١ |
| ( ك ، ك ) | ٢ |

www.kwedufiles.com

∴ مدى التغير العشوائي س = { ٠ ، ١ ، ٢ }

| عناصر (ف) | عناصر مدى (س) |
| --- | --- |
| ( ص، ص) | ٠ |
| (ص ، ك ) | ١ |
| ( ك ، ص ) | ١ |
| ( ك ، ك ) | ٢ |

www.kwedufiles.com

٣- د(٠) = ل ( س=٠) = $\frac{١}{٤}$

د(١) = ل ( س=١) = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

د(٢) = ل ( س=٢) = $\frac{١}{٤}$

٤- دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س هي :

| س | ٠ | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|
| د (س) | $\frac{١}{٤}$ | $\frac{١}{٢}$ | $\frac{١}{٤}$ |

www.kwedufiles.com

لاحظ أن $\sum$ د(س) = $\frac{١}{٤} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤}$ = ١

# مثال ٣

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س هي

www.kwedufiles.com

| س | ٤ | ٣ | ٢ | ١ | ٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| د (س) | ك | ٠,٢ | ٠,١ | ٠,١٥ | ٠,٣٥ |

أوجد : قيمة ك .

**الحل:** مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي د تساوي الواحد الصحيح

$$د(٤) + د(٣) + د(٢) + د(١) + د(٠) = ١$$

$$ك + ٠,٢ + ٠,١ + ٠,١٥ + ٠,٣٥ = ١$$

www.kwedufiles.com

$$ك + ٠,٨ = ١$$

$$ك = ١ - ٠,٨$$

$$ك = ١ - ٠,٨$$

$$\therefore ك = ٠,٢$$

# التوقع ( الوسط ) التباين للمتغيرات العشوائية المتقطعة

## مثال ٤

الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي د لمتغير عشوائي متقطع س

| س | ٠ | ١ | ٢ | ٢ |
|---|---|---|---|---|
| د (س) | $\frac{١}{٩}$ | $\frac{٤}{٩}$ | $\frac{١}{٣}$ | $\frac{١}{٩}$ |

www.kwedufiles.com

أوجد :

أ) التوقع ( $\mu$ )

ب) التباين ( $\sigma^{٢}$ )

جـ ) الانحراف المعياري ( $\sigma$ )

(أ) التوقع $(\mu) = \sum س_ر \, د(س_ر)$

$$= ٠ \times \frac{١}{٩} + ١ \times \frac{٤}{٩} + ٢ \times \frac{١}{٣} + ٣ \times \frac{١}{٩} = \frac{١٣}{٩}$$

(ب) التباين $(\sigma^٢) = \sum س_ر^٢ \, د(س_ر) - \mu^٢$

www.kwedufiles.com

$$= (٠)^٢ \times \frac{١}{٩} + (١)^٢ \times \frac{٤}{٩} + (٢)^٢ \times \frac{١}{٣} + (٣)^٢ \times \frac{١}{٩} - (\frac{١٣}{٩})^٢ = \frac{٥٦}{٨١}$$

(جـ) الانحراف المعياري $(\sigma) = \sqrt{\text{التباين}} = \sqrt{\frac{٥٦}{٨١}} = \frac{\sqrt{١٤ \times ٤}}{٩}$

# دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي س

## مثال ٥

الجدول التالي يبين دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع س

www.kwedufiles.com

| س | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|
| د (س) | ٠,٢ | ٠,٤ | ٠,١ | ٠,٣ |

أوجد : ت(٠) ، ت(٣) ، ت(٣,٥) ، ت(٥)

حيث ت دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي س

**الحل:**

ت(٠) = ل ( س ≤ ٠ ) = ٠

ت(٣) = ل ( س ≤ ٣ ) = د(٣) + د(٢) + د(١)

= ٠,١ + ٠,٤ + ٠,٢ = ٠,٧

www.kwedufiles.com

ت(٣,٥) = ل ( س ≤ ٣,٥ ) = د(٣) + د(٢) + د (١) = ٠,٧

ت(٥) = ل ( س ≤ ٥ ) = د(٤) + د(٣) + د(٢) + د(١)

= ٠,٣ + ٠,١ + ٠,٤ + ٠,٢ = ١

# مثال ٦

الجدول التالي يبين بعض قيم دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المتقطع س

| س | ١ | ٢ | ٣ | ٥ |
|---|---|---|---|---|
| ت (س) | ٠,١٥ | ٠,٢ | ٠,٦ | ١ |

www.kwedufiles.com

أوجد أ - ل ( ١ < س ≤ ٣ )

ب - ل ( ٢ < س ≤ ٥ )

جـ - ل (س > ٢ )

أ - ل ( ١ < س ≤ ٣ ) = ت(٣) – ت(١)= ٠,٦ – ٠,١٥ = ٠,٤٥

ب - ل ( ٢ < س ≤ ٥ ) = ت(٥) – ت(٢) = ١ – ٠,٢ = ٠,٨

www.kwedufiles.com

جـ - ل (س > ٢ ) = ١ - ل ( س ≤ ٢ )

= ١ – ت(٢)

= ١ – ٠.٢

= ٠,٨

# توزيع ذات الحدين

## مثال ٧

إذا كان س متغير عشوائي ذو حدين معلمتيه هما

ن = ٨ ، ل = ٠,٢

www.kwedufiles.com

أوجد

أ - ل ( س = ٢ )

ب - ل ( ٢ ≤ س < ٤ )

**الحل :** أ - ل ( س = ٢ ) = د(٢) = ؟

لدينا ن = ٨ ، ل = ٠,٢ ، س = ٢

∴ نبحث في جدول الاحتمالات في توزيع ذات الحدين عن قيمة د(٢) فنجد أن

| | ل | | | |
|---|---|---|---|---|
| ن | س | ٠,٥ | ٠,١ | ٠,٢ |
| ٨ | ٠ | | | |
| | ١ | | | |
| | ٢ | | | ٠,٢٩٤ |
| | ٣ | | | ٠,١٤٧ |

د(٢) = ٠,٢٩٤

ب - ل ( ٢ ≤ س < ٤ )

= ل ( س=٢ ) + ل (س=٣ )

= ٠,٢٩٤ + ٠,١٤٧

= ٠,٤٤١

www.kwedufiles.com

**مثال ٨** في تجربة القاء قطعة نقود متماثلة ٨ مرات أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري اذا كان المتغير العشوائي س هو ظهور صورة

**الحل:** ن = ٨ ، س = ظهور الصورة ل : هو احتمال ظهور صورة

$$ل = \frac{١}{٢} \quad ، \quad ١ - ل = \frac{١}{٢}$$

www.kwedufiles.com

التوقع $\mu = ن ل = ٨ \times \frac{١}{٢} = ٤$

التباين $\sigma^{٢} = ن ل (١ - ل)$

$$= ٨ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = ٢$$

الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}} = \sqrt{٢}$

# المتغيرات العشوائية المتصلة

**مثال ٩** إذا كان س متغير عشوائيا متصلا ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٤} & : \text{عندما } ١ \leq س \leq ٥ \\ \text{صفر} & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

www.kwedufiles.com

أوجد

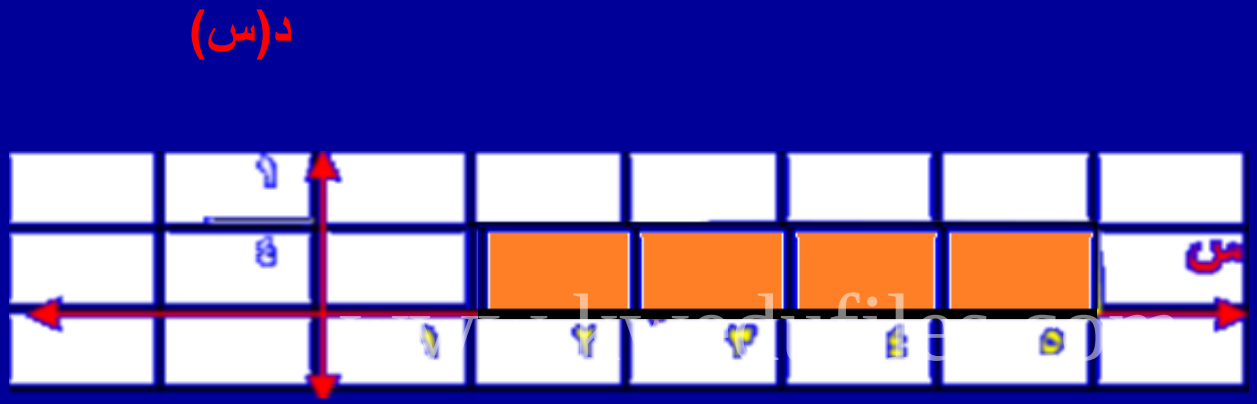
أ - ل ( ١ < س ≤ ٥ )

ب - ل ( س < ٢ )

ج - ل ( س ≤ ١,٥ )

د - ل ( س = ٢ )

**الحل :** أ - نرسم بيان الدالة د (س)

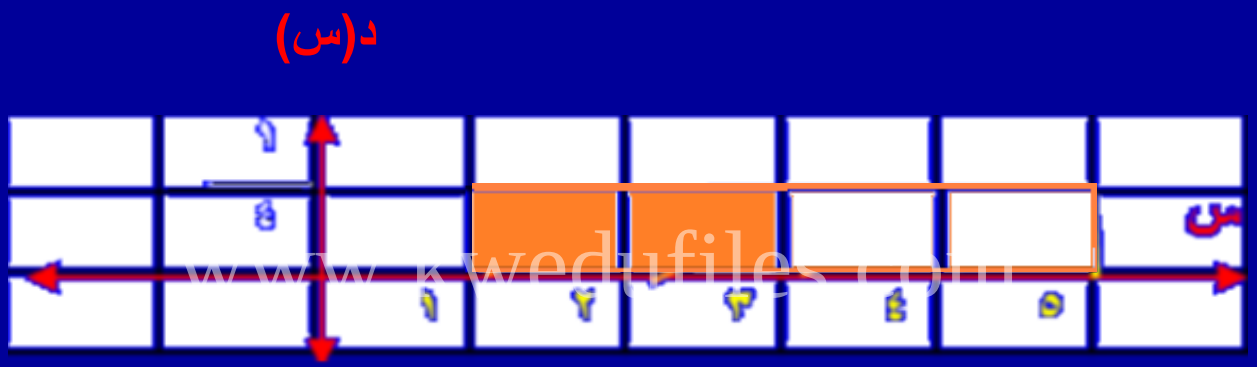



ل ( ١ < س ≤ ٥ ) = مساحة المنطقة المظللة (مستطيل)

= الطول × العرض

= ٤ × $\frac{١}{٤}$ = ١

ب- ل ( س < ٣ ) = مساحة المنطقة المظللة




$$= ( ٣ - ١ ) \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$$

جـ ل ( س ≤ ١,٥ ) = مساحة المنطقة المظللة

www.kwedufiles.com

$$= \frac{١}{٤} \times ( ٥ - ١,٥ ) = \frac{٧}{٨}$$

د- ل ( س = ٢ ) = صفر

## مثال ١٠

إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلا دالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢} & \text{عندما } ٠ \leq س \leq ٢ \\ \text{صفر} & \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

www.kwedufiles.com

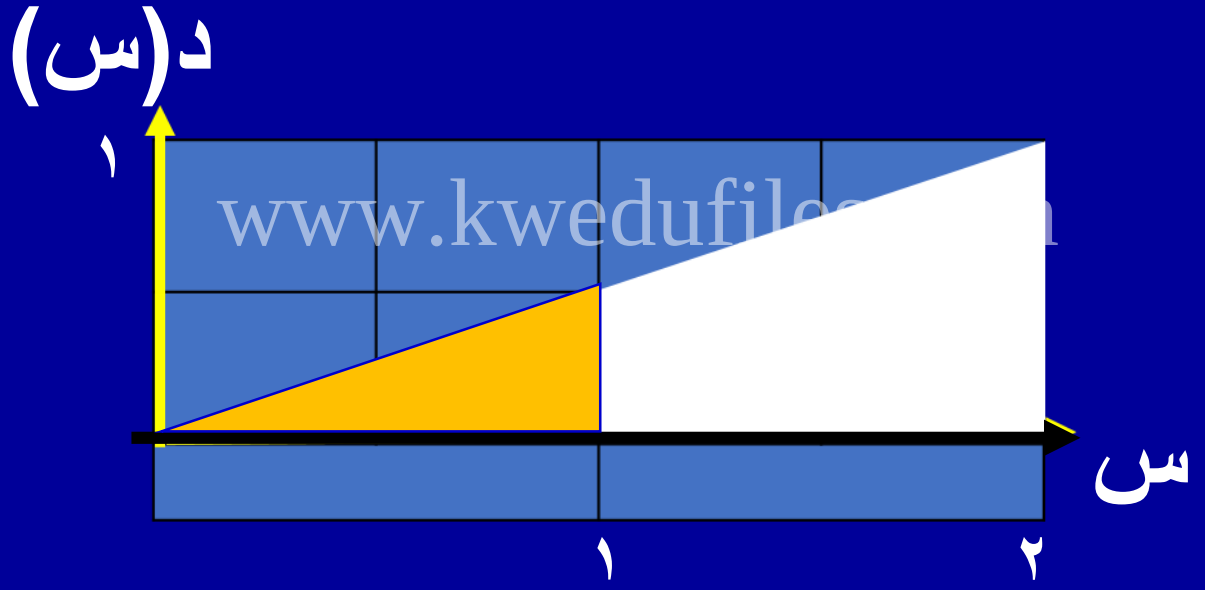
أوجد :أ - ل (س < ١ )

ب - ل (س ≤ ١)

جـ - ل (س = ١ )

**الحل :**

| س | ٠ | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|
| د (س) | ٠ | $\frac{١}{٢}$ | ١ |




www.kwedufiles.com

أ- ل ( س > ١ ) = مساحة المنطقة المظللة (المثلثة)

$$= \frac{1}{2} \times \text{ق} \times \text{ع}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

www.kwedufiles.com

ب - ل ( س ≤ ١ ) = ١ – ل ( س > ١ )

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

جـ - ل ( س = ١ ) = صفر

## مثال ١١

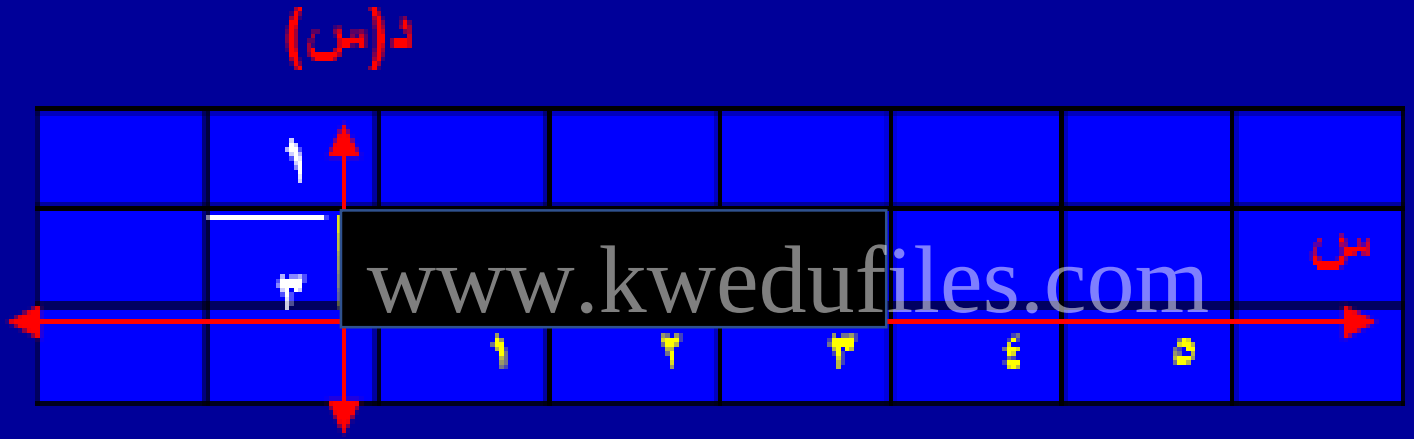
لتكن الدالة د : د (س) = 
- $\frac{١}{٣}$ : عندما ٠ ≤ س ≤ ٣
- صفر : في ما عدا ذلك

www.kwedufiles.com

١ ) أثبت أن هذه الدالة هي دالة كثافة احتمال .

٢ ) أوجد التوقع والتباين .

**الحل :** ١) د هي دالة كثافة احتمال إذا كانت المساحة تحت المنحنى تساوي ١




www.kwedufiles.com

المساحة تحت المنحنى تساوي مساحة المنطقة المستطيلة.

$$= ٣ \times \frac{١}{٣} = ١$$

**الحل :** ١) د هي دالة كثافة احتمال إذا كانت المساحة تحت المنحنى تساوي ١

المساحة تحت المنحنى تساوي مساحة المنطقة المستطيلة.

$$= ٣ \times \frac{١}{٣} = ١$$

www.kwedufiles.com

٢) التوقع : $\mu = \frac{أ + ب}{٢} = \frac{٣ + ٠}{٢} = \frac{٣}{٢}$

التباين : $\sigma^{٢} = \frac{(ب - أ)^{٢}}{١٢} = \frac{(٣ - ٠)^{٢}}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

# التوزيع الطبيعي المعياري

**مثال ١٢**

متغير عشوائي متصل س يتبع توزيعاً طبيعياً

التوقع $\mu = ٣٧$ ، التباين $\sigma^{٢} = ١٦$

www.kwedufiles.com

أوجد أ - ل ( ٣٥ < س < ٤٠ )

ب - ل ( س < ٣٥ )

**الحل :** أ )  $\mu = ٣٧$  $\sigma^{٢} = ١٦$ ⟵ $\sigma = ٤$

بوضع $س_{١} = ٣٥$ ⟵ $ق_{١} = \frac{س_{١} - \mu}{\sigma} = \frac{٣٥ - ٣٧}{٤} = -٠,٥$

www.kwedufiles.com

$س_{٢} = ٤٠$ ⟵ $ق_{٢} = \frac{س_{٢} - \mu}{\sigma} = \frac{٤٠ - ٣٧}{٤} = ٠,٧٥$

ل ( ٣٥ < س < ٤٠ ) = ل ( -٠,٥ < ق < ٠,٧٥ )

= ل ( ق < ٠,٧٥ ) - ل ( ق< -٠,٥)

من جدول ق رقم (٤) رقم (٥)

www.kwedufiles.com

= ٠,٧٧٣٣٧ – ٠,٣٠٨٥٤ = ٠,٧٣٤٨٣

ب - ل (س < ٣٥ ) = ل( ق > -٠,٥) = ١ - ل( ق< -٠,٥)

= ١ – ٠,٣٠٨٥٤

= ٠,٩٦١٤٦

**مثال ١٣** مثل بيانياً منطقة الحل المشترك للمتباينتين

س – ص ≥ ٢ ، س + ص < ٢

**الحل :**

نرسم خط الحدود للمتباينة س – ص ≥ ٢

من المعادلة المناظرة ل١ : س – ص = ٢

www.kwedufiles.com

| س | ٠ | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|
| د(س) | - ٢ | - ١ | ٠ |

نعوض بنقطة الأصل ( ٠ ، ٠ ) في المتباينة

فنجد: ٠ – ٠ ≤ ٢ ، ٠ ≤ ٢ عبارة صحيحة

اذن تظلل المنطقة التي تحوي نقطة الأصل

www.kwedufiles.com

٢- نرسم خط حدود المتباينة س + ص > ٢

من المعادلة المناظرة س + ص = ٢

www.kwedufiles.com

| س | ٠ | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|
| د(س) | ٢ | ١ | ٠ |

نعوض نقطة الأصل ( ٠،٠ ) في المتباينة

س + ص > ٢

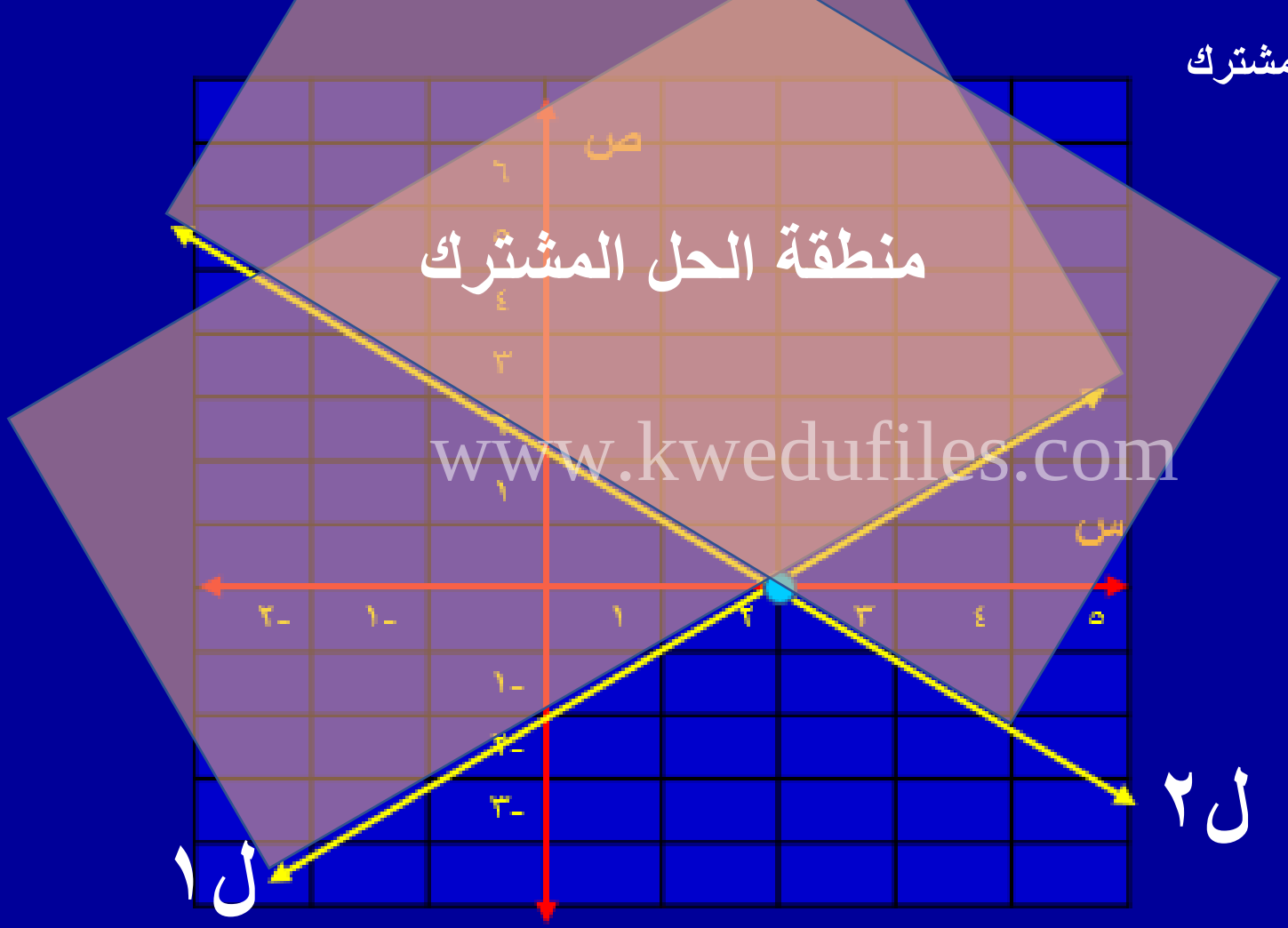
فنجد ٠ + ٠ > ٢

٠ > ٢ عبارة غير صحيحة

www.kwedufiles.com

إذن نظلل المنطقة التي لا تحوي نقطة الأصل

٣- نظلل منطقة الحل المشترك



www.kwedufiles.com