بند (1 – 2)
معدلات التغير و خطوط المماس

دعنا نفكر ونتناقش

أظهرت التجارب أن المسافة التي يقطعها جسيم سقط سقوطاً حراً من السكون نحو سطح الأرض تعطى بالعلاقة : $d\ (t) = 4.9\ t^2$
حيث d المسافة بالمتر (m) ، t الزمن بالثواني (s) (قانون جاليليو) .
فإذا سقط جسيمًا سقوطاً حراً من مرتفع ، أوجد بعد مرور ثانيتين من السقوط :

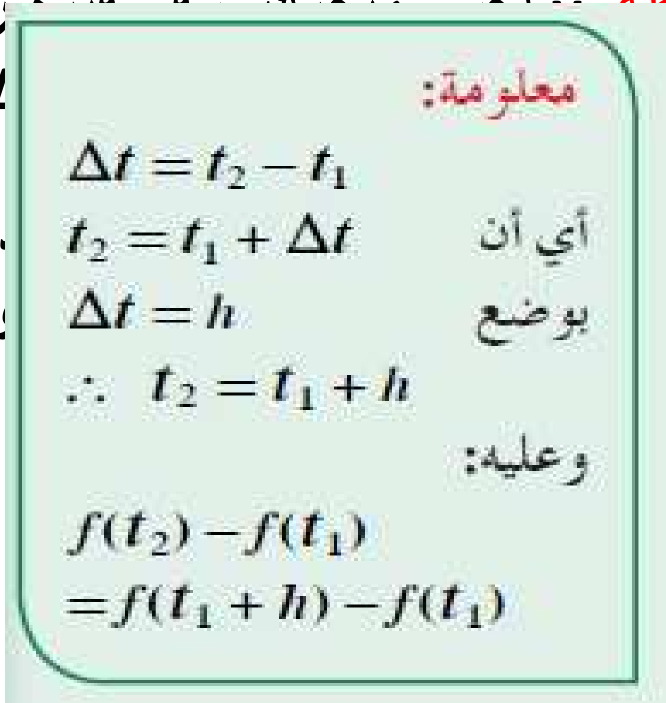
(a) التغير في الزمن: $t_2 - t_1 = 2 - 0 = 2$

(b) التغير في المسافة : $d(t_2) - d(t_1) = 19.6 - 0 = 19.6$

(c) السرعة المتوسطة $\bar{v}$: $9.8 = \dfrac{19.6}{2} = \dfrac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}} = \bar{v}$

السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية
Average and Instantaneous Velocity

نوجد السرعة المتوسطة ... فترة زمنيّة ما ، بقسمة التغير في المسافة (d ... (.



وعليه تكون وحدة ال... المسافة مقسومة على وحدة الزمن ، ... متر/ثانية (m/s) أو أيّ وحدات أخرى مو...

مثال توضيحي

تسقط كرة من علو 50 m ، وفق المعادلة $d(t) = 4.9t^2$ ، حيث d المسافة التي تقطعها الكرة بالأمتار (m) ، t الزمن بالثواني (s)

(a) ما السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية من الثانية الآولى الى الثانية الثالثة ؟

(b) أوجد سرعة الكرة عند اللحظة $t = 3$

الحل :

$\because \quad d(t) = 4.9\,t^2$

ملاحظة:

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}$$

ف ... قطعتها الكرة هي : $d_1 = d(1) = 4.9(1)^2 = 4.9$

ف ... قطعتها الكرة هي: $d_2 = d(3) = 4.9(3)^2 = 44.1$

... والثالثة هي :

$$\bar{v} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$$

$$\bar{v} = \frac{44.1 - 4.9}{3 - 1} = \frac{39.2}{2} = 19.6$$

السرعة المتوسطة لسقوط الكرة هي : 19.6 m/s

(b) يمكننا حساب السرعة المتوسّطة للجسم على الفترة الزمنية من اللحظة $t_1 = 3$ إلى اللحظة $t_2 = 3 + h$ ، حيث $\Delta t = h$ هو الفارق الزمني بين اللحظتين

تمثل السرعة المتوسطة على الفترة الزمنية $[3 , 3 + h]$ التي مدتها $\Delta t = h$

ولا نستطيع استخدام تلك القاعدة لحساب السرعة بالضبط عند اللحظة $t = 3$ أي $h = 0$ لأنه لا يمكن القسمة على صفر .

مدة الفترة الزمنية $h(s)$ بالثانية	السرعة المتوسطة على الفترة $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ (m/s)
1	34.3
0.1	29.89
0.01	29.449
0.001	29.4049
0.0001	29.40049

وعلى ذلك فإنّه يمكننا أخذ فكرة جيّدة لما يحدث عند $t = 3$ وذلك بحساب قيمة الصيغة التي حصلنا عليها بجعل h تقترب من الصفر ، وإذا فعلنا ذلك فإنّنا نجد نمطًا واضحاً كما في الجدول ، يظهر هذا النمط أنّ السرعة المتوسّطة تقترب من القيمة 29.4 m/s عندما تقترب h من الصفر ، مما يسمح بالقول إن السرعة اللحظية للكرة عند $t = 3$ تساوي 29.4 m/s

تأكّد جبرياً :

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{4.9(3+h)^2 - 4.9(3)^2}{h}$$

نفك البسط في المعادلة ونبسّط :

$$= \frac{4.9\,(9 + 6h + h^2) - 44.1}{h}$$

$$= \frac{29.4\,h + 4.9\,h^2}{h}$$

$$= \frac{h\,(29.4 + 4.9\,h)}{h}$$

$$= 29.4 + 4.9\,h$$

لقيم h الموجبة الصغيرة جدًا السرعة المتوسّطة تساوي $29.4 + 4.9h(m/s)$
وتكون $4.9h$ صغيرة جدًا أي قريبة من الصفر.

ونعبر عن ذلك كالتالي :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta d}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} (29.4 + 4.9h)$$

$$= 29.4$$

وفي هذه الحالة نقول إنّ نهاية السرعة المتوسّطة هي 29.4 عندما تقترب h من الصفر ولا تساويه ونقول إنها السرعة اللحظية عند اللحظة $t=3$
ومنه تكون السرعة اللحظية $29.4\ m/s$

وعموماً لو فرضنا أن جسيم يتحرك في خط مستقيم خلال فترة زمنية صغيرة جداً مقدارها h

فإنه عندما $t = t_1$ يكون الجسيم عند الموقع $d(t_1)$

وعندما $t = t_1 + h$ يكون الموقع هو $d(t_1 + h)$

وعليه فإن السرعة المتوسطة الجسيم خلال تلك الفترة يكون :

$$\bar{v} = \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}$$

وعندما تؤول إلى h إلى الصفر نحصل على السرعة اللحظية

ويمكن ان نعرف السرعة اللحظية v عند الزمن t_1 كالتالي :

$$V = \lim_{h \to 0} \bar{v} = \lim_{h \to 0} \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}$$

بشرط أن تكون النهاية موجودة .

متوسّط معدّل التغيّر وميل المماس Average Rate of Change and Tangent Slope

متوسّط معدّل التغيّر وميل المماس Average Rate of Change and Tangent Slope

إذا كان لدينا دالة: $y = f(x)$

فإذا ط ... قيمة المتغيرالمستقل x

فإنه ي ... على قيمة المتغير التابع y

ويكون ... $_1$)

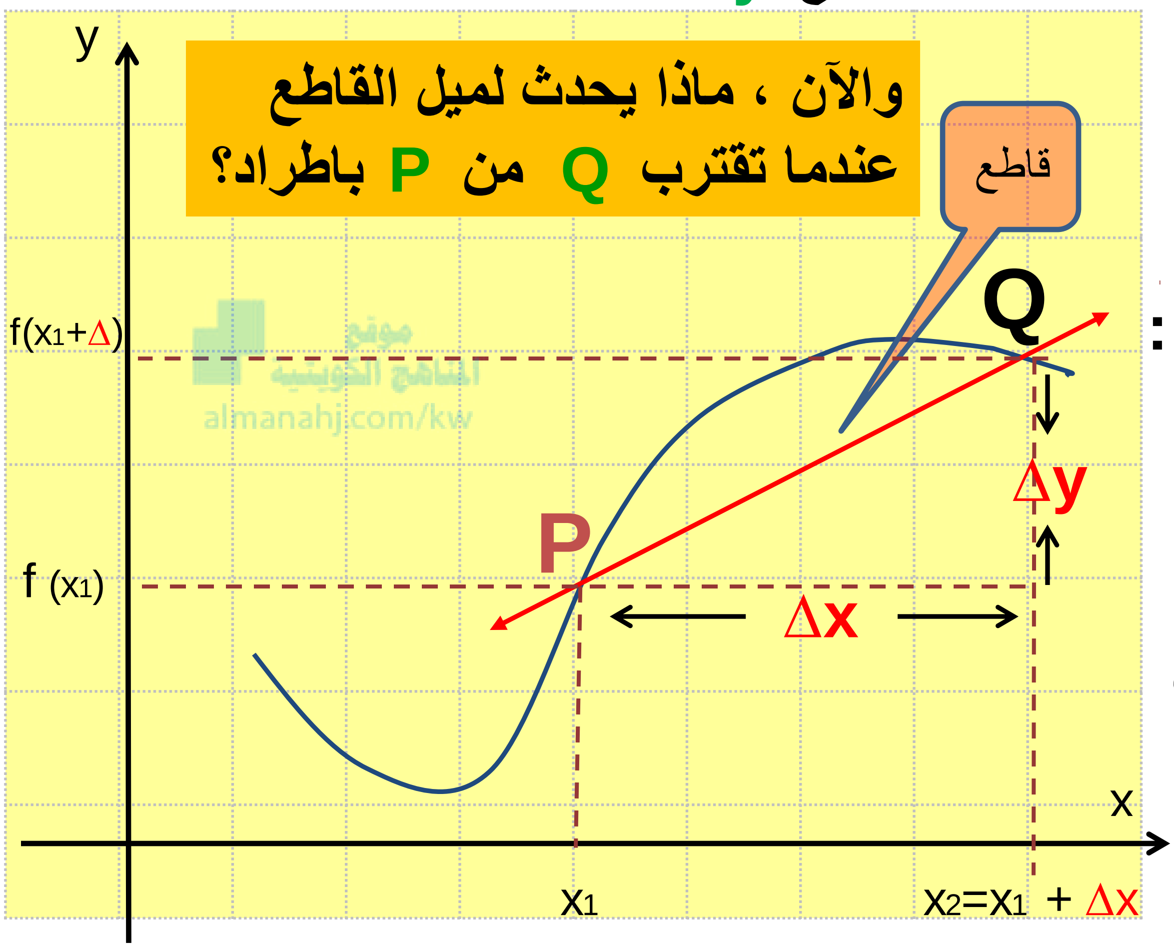
ويكون ... ة : y

... $x_1)$

... x_1

وفي ا ... حنى

ميل ال ...



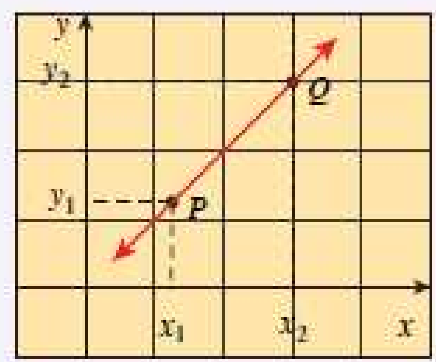
تذكر:

ميل المستقيم المار بالنقطتين: $P(x_1 , y_1)$ ، $Q(x_2 , y_2)$

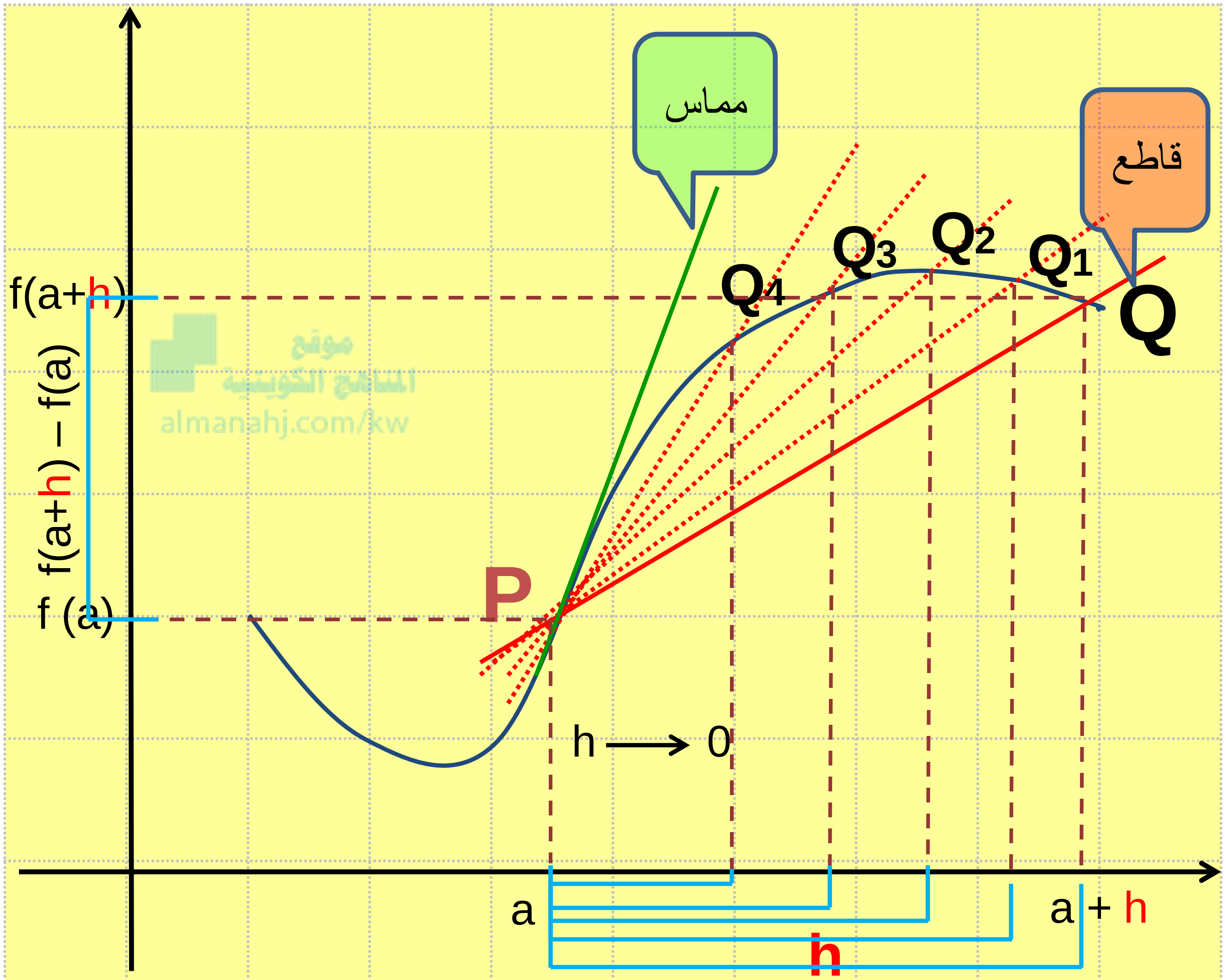
يساوي: $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

حيث $x_1 \neq x_2$

ويُمكن أن نعبر عنه بالصيغة $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.



1 يمكننا حساب ميل القاطع للمنحنى $y = f(x)$ المار بالنقطتين $P(a, f(a))$
$Q(a+h, f(a+h))$ الموجودتين على المنحنى حيث $h = \Delta a$



والميل يساوي:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2 نجد قيمة نهاية ميل القاطع إن وجدت عندما تقترب Q من P على المنحنى

أي أن

h تقترب من الصفر

3 نحدّد ميل المماس للمنحنى عند النقطة $P(a, f(a))$ بالقيمة m إن وجد :

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ (ان وجدت)

معدل التغير لدالة f عند النقطة $P(a, f(a))$ إن وجد هو:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a}{h \qquad)}$$

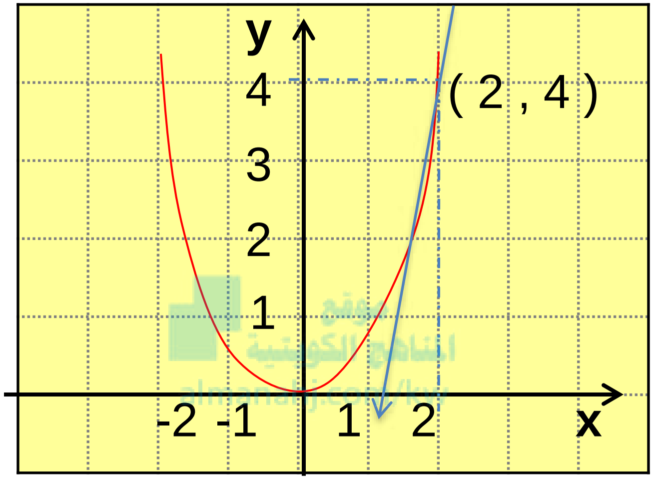
المستقيم العمودي على منحنى عند نقطة تنتمي إلى المنحنى هو
المستقيم العمودي على مماس المنحنى عند تلك النقطة ويسمى الناظم

مثال (1)

أوجد ميل المماس للقطع المكافئ $y = x^2$ عند النقطة $P (2 , 4)$.

الحل : نبدأ بميل القاطع للمنحنى بين النقطة $P (2 , 4)$ ونقطة قريبة منها $Q (2 + h , (2+ h)^2)$ على المنحنى .

نكتب ميل القاطع ونوجد النهاية للميل عندما تقترب Q من P على المنحنى .



$$Y = f (x)$$

ميل القاطع عند(2 , 4):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2 + h)^2 - 4}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 4h + 4 - 4}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 4h}{h}$$

$$= h + 4$$

ميل المماس للقطع المكافئ $y = x^2$ عند $p (2 , 4)$: هو 4

نهاية ميل القاطع عندما تقترب Q من P باطراد على المنحنى هي :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} (h + 4) = 4$$

على ذلك يكون ميل المماس للقطع المكافئ عند P يساوي 4

حاول أن تحل (1)

أوجد ميل المماس للقطع المكافئ $y = (x-2)^2 + 2$ عند النقطة $A(1, 3)$.

الحل : نبدأ بميل القاطع للمنحنى بين النقطة $A(1, 3)$ ونقطة قريبة منها $B(1+h, (1+h-2)^2+2)$ على المنحنى .

نكتب ميل القاطع ونوجد النهاية للميل عندما تقترب B من A على المنحنى .

$$Y = f(x)$$

ميل القاطع عند (1 , 3):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1+h-2)^2+2-3}{h}$$

$$= \frac{h^2 - 2h + 1 - 1}{h}$$

$$= \frac{h^2 - 2\,h}{h}$$

$$= h - 2$$

نهاية ميل القاطع عندما تقترب B من A على المنحنى هي :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} (h - 2) = -2$$

على ذلك يكون ميل المماس للقطع المكافئ عند A يساوي 2 -