مناقشة دعنا نفكر ونناقش

لتكن الدوال التالية

$f(x) = 3x^2 + 1$

$g(x) = x^2$

$h(x) = x^3$

$q(x) = x^{10}$

أكمل ما يلي

a

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$= g(3x^2 + 1)$

$= (3x^2 + 1)^2$

$= 9x^4 + 6x^2 + 1$

$\frac{d}{dx}((g \circ f)(x))$

$= 36x^3 + 12x$

b

$(h \circ f)(x) = h(f(x))$

$= h(3x^2 + 1)$

$= (3x^2 + 1)^3$

$(h \circ f)(x) = 27x^6 + 27x^4 + 9x^2 + 1$

$(h \circ f)'(x) = 162x^5 + 108x^3 + 18x$

c $(q \circ f)(x) . q(f(x))$

هل من السهل ايجاد (q o F) بنفس الاسلوب السابق

$= (3x^2 + 1)^{10}$

$(q \circ f)(x) = [f(x)]^{10}$

$= (3x^2 + 1)^{10}$

من فقرة دعنا نفكر ونناقش لاحظنا انه عند إيجاد مشتقة

سنجد صعوبة في فك هذا المقدار وتساعدنا القواعد التالية علي ايجاد مشتقة مثل هذه الدوال

قاعدة السلسلة (التسلسل)

اذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$ والدالة g قابلة للاشتقاق عند x فإن الدالة المركبة

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

تكون قابلة للاشتقاق عند x ، ويكون

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

أي يمكننا القول أن مشتقة الدالة المركبة $(f \circ g)(x)$ عند x هي مشتقة $g(x)$ مضروبة في مشتقة الدالة g عند x

مثال (1)
صـ 104

إذا كانت $g(x) = x^{10}$ وكانت $f(x) = 3x^2 + 1$
فأوجد بإستخدام قاعدة السلسلة

الحــــل

a $(f \circ g)'(x)$

$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$f'(x) = 6x$

$g'(x) = 10x^9$

$f'(g(x)) = 6x^{10}$

$(f \circ g)'(x) = 6x^{10} \cdot 10x^9$

$(f \circ g)'(x) = 60x^{19}$

حل آخــــر

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= 3(x^{10})^2 + 1$

$= 3x^{20} + 1$

$(f \circ g)'(x) = 60x^{19}$

b $(g \circ f)'(-1)$

$= g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$f'(x) = 6x$

$g'(x) = 10x^9$

$(g \circ f)'(x) = 10(f(x))^9 . 6x$

$(g \circ f)'(x) = 10(3x^2+1))^9 . 6x$

$= -(60)(4)^9$

$(g \circ f)'(-1) = -15728640$

حاول ان تحل رقم 1(b)

وكانت $g(x) = x^{13}$ إذا كانت $f(x) = -2x^3 + 4$
فأوجد بإستخدام قاعدة السلسلة

الحـــل

a $(f \circ g)'(x)$

$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$f(x) = -2x^3 + 4$

$f'(x) = -6x^2$

$g(x) = x^{13}$

$g'(x) = 13x^{12}$

$f'(g(x)) = -6(x^{13})^2 = -6x^{26}$

$(f \circ g)'(x) = -6x^{26} \cdot 13x^{12} = -78x^{38}$

b $(g \circ f)'(0)$

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$g'(x) = 13x^{12}$

$f'(x) = -6x^2$

$(g \circ f)'(x) = 13[(-2x^3 + 4)]^{12} \cdot -6x^2$

$(g \circ f)'(0) = 0$

مثال (2)
صـ 104

إذا كانت $g(x) = x^2 + 1$ وكانت $f(x) = \frac{2x+1}{x}$

فأوجد بإستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$

الحـــل

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = \frac{2x - (2x+1)}{X^2} = \frac{-1}{X^2}$$

$$g'(x) = 2x$$

$$f'(g(x)) = f'(X^2 + 1) = \frac{-1}{(X^2+1)^2}$$

المتغير $g(x)$

قاعدة السلسلة

$$(f \circ g)'(x) = \frac{-1}{(X^2+1)^2} \cdot 2x = \frac{-2X}{(X^2+1)^2}$$

لتكن $f(x) = \dfrac{X^2 - 4}{X^2 + 4}$ ، $g(x) = \sqrt{x}$

أوجدي بإستخدام قاعدة السلسلة $(f o g)'(1)$

حاول ان تحل رقم 2 صـ 105

الحـــل

$$(f o g)'(x) = f'(g(x)) \,.\, g'(x)$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+4).(2x) - (x^2-4).(2x)}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 8x - 2x^3 + 8x}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{16x}{(x^2+4)^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

$$f'(g(x)) = \frac{16\sqrt{X}}{((\sqrt{X})^2 + 4)^2}$$

$$(f o g)'(x) = \frac{16\sqrt{X}}{(x^2+4)^2} \quad \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

$$= \frac{8}{(x+4)^2}$$

$$(f o g)'(1) = \frac{8}{25}$$

صور اخري لقاعدة السلسلة

اذا كانت $u = g(x)$, $y = F(u)$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

يتم حسابها عند $u = g(x)$

مثال (3)
صـ 105

إذا كانت $y = u^3 - 3u + 1$, $u = 5x^2 + 2$

فأوجد $\frac{dy}{dx}$ بإستخدام قاعدة التسلسل

الحـــل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مشتقة بدلالة u

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 - 3$$

مشتقة بدلالة X

$$\frac{du}{dx} = 10x$$

قـــاعدة التسلسل

$$\frac{dy}{dx} = (3u^2 - 3) . (10x)$$

خطأ مطبعي بالكتاب

تعـــــــويــــض

$$\frac{dy}{dx} = (3(5x^2 + 2)^2 - 3) . (10x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 750x^5 + 600x^3 + 90x$$

حاول ان تحل
(3) صـ
105

إذا كانت $y = u^2 + 4u - 3$, $u = 2x^3 + x$

فأوجد $\frac{dy}{dx}$ بإستخدام قاعدة التسلسل

الحـــل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = 2u + 4$$

$$\frac{du}{dx} = 6x^2 + 1$$ مشتقة بدلالة x

$$\frac{dy}{dx} = (2u + 4).(6x^2 + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = (2(2x^3 + x) + 4).((6x^2 + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = (4x^3 + 2x + 4)(6x^2 + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 24x^5 + 4x^3 + 12x^3 + 2x + 24x^2 + 4)$$

$$\frac{dy}{dx} = 24x^5 + 16x^3 + 24x^2 + 2x + 4)$$

مثال (4)
صـ 106

يتحرك جسيم علي محور السينات بحيث ان موضعه عند أي لحظه $t \geqslant 0$
يعطي بالداله $S = \cos(t^2 + 1)$
اوجد السرعه الحظيه للجسيم كداله في t

الحـــل

نعلــــــــم أن

$$V = \frac{ds}{dt}$$

V هي السرعه الحظية

وفي هذه الحالة S داله مركبه حيث أن $u = t^2 + 1$, $S = \cos(u)$

لدينـــــــا

$$\frac{ds}{du} = -\sin(u)$$

$$\frac{du}{dt} = 2t$$

$S = \cos(u)$

$u = t^2 + 1$

باستخدام قاعدة السلسله

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$

$$= -(\sin(u)) \cdot 2t$$

$$= -(\sin(t^2+1)) \cdot 2t$$

$$= -2t \sin(t^2+1)$$

ملحوظه

من مثال (4) يمكن ايجاد المشتقة باستخدام القاعده التاليه

$$\frac{d}{dx}(\cos f(x)) = (-\sin f(x)) \cdot f'(X)$$

$$\frac{d}{dx}(\cos(t^2+1) = -\sin(t^2+1) \cdot 2t$$

تذكـــــــــــر

اقتصرت دراستنا علي دوال قابله للتركيب

حاول ان تحل
صـ 106
(4)

اوجد مشتقة $y = \sin (x^2 + x)$ بالنسبة للمتغير X

الحـــل

نفـــــــــــرض أن

$u = x^2 + x$

$y = \sin u$

$$\frac{dy}{du} = \cos u$$

$$\frac{du}{dx} = (2x + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot (2x + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 1) \cos (x^2 + x)$$

حل آخر

$$\frac{d}{dx} (\sin (x^2 + x)) =$$

$$= \cos f(x) \cdot f'(X)$$

$$= \cos (x^2 + x) \cdot (2x + 1)$$

مثال (5)
ص106

اوجد مشتقة $f(x) = \sin^3 x$ باستخدام قاعدة السلسلة

الحل

نفـــــــــرض أن

$f(x) = (\sin x)^3$

$g(x) = \sin x$

$h(x) = x^3$

$f(x) = (h \circ g)(x)$

$f'(x) = (h \circ g)'(x)$

$= h'(g(x)) \cdot g'(x)$

$h'(x) = 3x^2$

$g'(x) = \cos x$

$= 3(g(x))^2 \cdot \cos x$

$= 3\sin^2 x \cdot \cos x$

حـــــــــل آ
خر

بالصوره الأخري لقاعده السلسلة

$f(x) = \sin^3 x$

$y = (\sin x)^3$

نفـــــــــرض أن

$y = (u)^3$

$u = \sin x$

$$\frac{dy}{du} = 3u^2$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\sin^2 x).(\cos x)$$

قاعدة سلسلة القوي

في كثير من الأحيان نحتاج الي ايجاد مشتقة داله ما علي الصوره $y = [f(x)]$
حيث n عدد نسبي

لذلك نستخدم القاعدة التالية والمسماه بقاعدة سلسلة القوي

قاعدة سلسلة القوي

اذا كانت $f(x)$ قابله للاشتقاق علي مجالها وكان n عدداً نسبياً فإن

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(X))^{n-1} \cdot f'(x)$$

مثـــال
(6) صـ 107

لتكن $y = \sqrt[5]{(x^2+3x+5)^3}$ أوجد y'

خطأ مطبعي بالكتاب

الحـــل

$$y = \sqrt[5]{(x^2+3x+5)^3}$$

$$y = (x^2+3x+5)^{\frac{3}{5}}$$

$$y' = \frac{3}{5}(x^2+3x+5)^{\frac{3}{5}-1}\cdot(2x+3)$$

$$y' = \frac{3}{5}(x^2+3x+5)^{\frac{-2}{5}}\cdot(2x+3)$$

$$y' = \frac{3(2x+3)}{5\sqrt[5]{(x^2+3x+5)^2}}$$

حل آخر (2)

$$y = (x^2 + 3x + 5)^{\frac{3}{5}}$$

$$g(x) = (x^2 + 3x + 5)$$

$$g'(x) = 2x + 3$$

$$h(x) = x^{\frac{3}{5}}$$

$$h'(x) = \frac{3}{5} x^{\frac{-2}{5}}$$

$$f(x) = (h \circ g)(x)$$

$$f'(x) = (h \circ g)'(x)$$

$$= h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= \frac{3}{5} (g(x))^{\frac{-2}{5}} \cdot (2x + 3)$$

$$= \frac{3}{5} (x^2 + 3x + 5)^{\frac{-2}{5}} (2x + 3)$$

حل آخر

بإستخدام قاعدة السلسلة

$$y = (u)^{\frac{3}{5}}$$

$$u = x^2 + 3x + 5$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{3}{5} u^{\frac{-2}{5}}$$

$$\frac{du}{dx} = 2x + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5} u (2x + 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5} (x^2 + 3x + 5)^{\frac{-2}{5}} (2x + 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(2x + 3)}{5 \sqrt[5]{(x^2 + 3x + 5)^2}}$$

مثال 7
صـ107

اوجد ميل مماس المنحني $y = \sin^5 x$ عند $x = \frac{\pi}{3}$

الحـــل

$$\frac{dy}{dx} = 5\sin^4 x\,(\sin x)'$$

$$= 5\sin^4 x\,(\cos x)$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{45}{32}$$

ميل المماس هو :

حاول ان تحل
صـ107 (7)

بين ان ميل اي مماس للمنحني $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$

دائما يكون موجب حيث $x \neq \frac{-1}{2}$

الحـــل

$$y = (-2x-1)^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = -3(-2x-1)^{-4}(-2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6(-2x-1)^{-4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{(-2x-1)^4}$$

ميل المماس دائماً موجب $y' > 0$