التكامل المحدد

إذا كانت f متصله $[a,b]$ وكانت f مشتقه عكسيه لها فأن

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int_a^b f(x)dx\right]_a^b = [f(x)dx]_a^b = f(b) - f(a)$$

خواص التكامل المحدد

(1) $\int_a^b f(x)dx = 0$

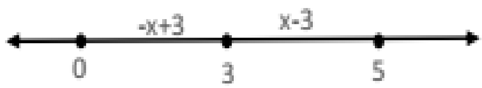
(2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \quad C \in [a,b]$

تمرين

أوجد $\int_0^5 |x-3|dx$

الحل



$\int_0^5 |x-3|dx = \int_0^3 |x-3|dx \int_3^5 |x-3|dx$

$\int_0^3 (-x+3)dx = \int_3^5 (x-3)dx$

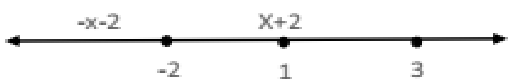
$= \left[\frac{-x^2}{2} + 3x\right]_0^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^5$

$= \frac{13}{2}$

حاول أن تحل

أوجد $\int_1^3 |x+2|dx$

الحل



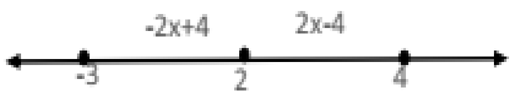
$\int_1^3 |x+2|dx = \int_1^3 |x+2|dx$

$= \left[\frac{-x^2}{2} + 2x\right]_1^3$ عوض

حاول أن تحل

أوجد $\int_{-3}^4 |2x-4|dx$

الحل



$\int_{-3}^4 |2x-4|dx$

$\int_{-3}^{2}(2x-4)dx+\int_{2}^{4}(2x-4)dx$

$=[-x^2+4x]_{-3}^{2}+[-x^2-4x]_{2}^{4}$ عوض

قاعدة

إذا كانت f دالة متصله على $[a,b]$

إذا كانت $f(x)\ge 0\ \forall x\in[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx\ge 0$

إذا كانت $f(x)\le 0\ \forall x\in[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx\le 0$

تمرين

دون حساب قيمة التكامل اثبت أن

$$\int_3^5 (x^2+x)\,dx\ \ge\ 0$$

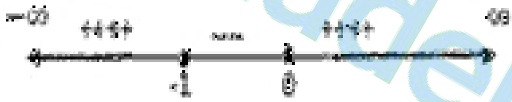
الحل

نفرض أن $f(x)=x^2+x$

وهي دالة متصلة عند $[3,5]$

$x^2+x=0$ $\quad x(x+1)=0$

$x=0$ or $x=-1$



$f(x)\ge 0\ \forall x\in(-\infty,-1]\cup(0,\infty]$

$\because [3,5]\subseteq[0,\infty)$

$\therefore x^2+x\ge 0\quad \forall x\in[3,5]$

$\therefore \int_3^5 (x^2+x)\,dx\ \ge\ 0$

تمرين

دون حساب قيمة التكامل اثبت أن $\int_{-1}^{0}(x^2+x)\,dx\ \le\ 0$

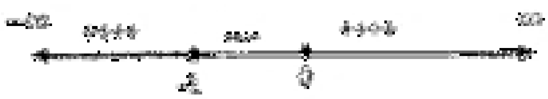
الحل

نفرض أن $f(x)=x^2+x$

وهي دالة متصلة عند $[-1,0]$

$x^2+x=0$ $\quad x(x+1)=0$

$x=0$ or $x=-1$



$f(x)\le 0\quad \forall x\in[-1,0]$

$x^2+x\le 0\quad \forall x\in[-1,0]$

$\int_{-1}^{0}(x^2+x)\,dx\ \le\ 0$

قاعدة

إذا كانت f, g دالتين متصلتين على $[a, b]$

وكانت $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

تمرين

دون حساب قيمة التكامل اثبت أن

$$\int_1^3 (2x-3)\, dx \leq \int_3^5 (x^2+2)\, dx$$

الحل

نفرض أن $g(x) = x^2 + 2$ $\quad f(x) = 2x - 3$

دالتين متصلتين على R

$$f(x) - g(x) = (2x-3) - (x^2+2)$$
$$= 2x - 3 - x^2 - 2$$
$$= x^2 + 2x - 5$$

نضع $-x^2 + 2x - 5 = 0$

المميز $\Delta = x^2 - 4aC$

$= 4 - 4(-1)(-5) = -16$

المميز سالب $\therefore$ لا توجد للمعادلة جذور حقيقية

$f(x) - g(x)$ وحيدة الاشارة بأخذ قيمة اختبارية تكون سالبة دائماً

$$f(x) - g(x) \leq 0 \qquad \forall x \in R$$
$$f(x) - g(x) \leq 0 \qquad \forall x \in [1, 3]$$
$$(2x-3) - (x^2+2) \leq 0 \qquad \forall x \in [1, 3]$$
$$(2x-3) \leq (x^2+2)$$
$$\int_1^3 (2x-3)\, dx \leq \int_3^5 (x^2+2)\, dx$$

حاول ان تحل

دون حساب قيمة التكامل اثبت أن

$$\int_1^2 (x^2+1)\, dx \geq \int_{-1}^2 (x-1)\, dx$$

الحل

نفرض أن $g(x) = x - 1$ $\quad f(x) = x^2 + 1$

دالتين متصلتين على R

$$f(x) - g(x) = x^2 + 1 - (x-1)$$
$$= x^2 - x + 2$$
$$= x^2 + 2x - 5$$

نضع $x^2 - x + 2 = 0$

المميز $\Delta = x^2 - 4aC$

$= (-1)^2 - 4(1)(2) = -7$

المميز سالب $\therefore$ لا توجد للمعادلة جذور حقيقية

$f(x) - g(x)$ وحيدة الاشارة بأخذ قيمة اختبارية تكون موجبة دائماً

$f(x) - g(x) \leq 0 \qquad \forall x \in R$

$f(x) - g(x) \leq 0 \qquad \forall x \in [1, 2]$

$(x^2 + 1) - (x - 1) \geq 0 \qquad \forall x \in [1, 2]$

$(x^2 + 1) \geq (x - 1) \qquad \forall x \in [1, 2]$

$\int_1^2 (x^2 + 1)\, dx \geq \int_{-1}^2 (x - 1)\, dx$

امتحان 2016

دون حساب قيمة التكامل اثبت أن

$$\int_0^1 (x^2 - 3x + 7)\, dx \geq \int_0^1 (4x - 5)\, dx$$

الحل

نفرض أن $g(x) = 4x - 5 \qquad f(x) = x^2 - 3x + 7$

دالتين متصلتين على R

$f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 7 - (4x - 5)$

$= x^2 - 7x + 12$

$= x^2 - 7x + 12$ نضع

$x = 3 \qquad x = 4$ بالالة

$f(x) - g(x) \geq 0 \forall x \in (-\infty, 3] \cup [4, \infty)$

$\because [0, 1] \subseteq (-\infty, 3]$

$f(x) - g(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [0, 1]$

$f(x) \geq g(x) \qquad \forall x \in [0, 1]$

$x^2 - 3x + 7 \geq 4x - 5 \qquad \forall x \in [0, 1]$

$\int_0^1 (x^2 - 3x + 7)\, dx \geq \int_0^1 (4x - 5)\, dx$

التفسير البياني للتكامل المحدد

إذا كانت f متصله $[a, b]$

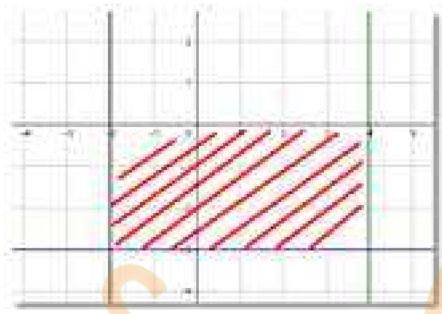
فإن $\int_a^b f(x)dx$ بيانياً هو مساحة المنطقة المحددة بمحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = a$,
$x = b$

****

تمرين

أوجد $\int_{-2}^{4} -3\ dx$ بيانياً

الحل



$f(x) = -3$ والمستقيمين $x = -2 , x = 4$

نرسم بيان الدالة $f(x) = -3$

نرسم المستقيمين $x = -2 , x = 4$

مساحة المنطقة تساوي مساحة المستطيل الذي بعدية 3,6 (وحدة طول)

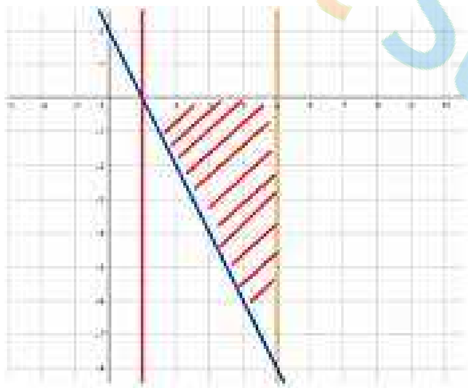
$$A = 3 \times 6 = 12\ units^2$$

****

حاول أن تحل

أوجد $\int_1^5 2 - 2x\ \ dx$ بيانياً

الحل



$f(x) = 2 - 2x$ والمستقيمين $x = 1 , x = 5$

نرسم بيان الدالة $f(x) = 2 - 2x$

نرسم المستقيمين $x = 1 , x = 5$

مساحة المنطقة تساوي مساحة المثلث

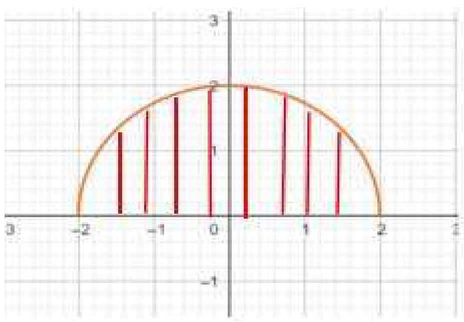
$$A = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16\ units^2$$

****

مثال (1)

أوجد $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\ \ dx$ بيانياً

الحل



$$y = \sqrt{4 - x^2}$$
$$y^2 = 4 - x^2$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

هي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2 وحدة طول

$y = \sqrt{4 - x^2}$ تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة

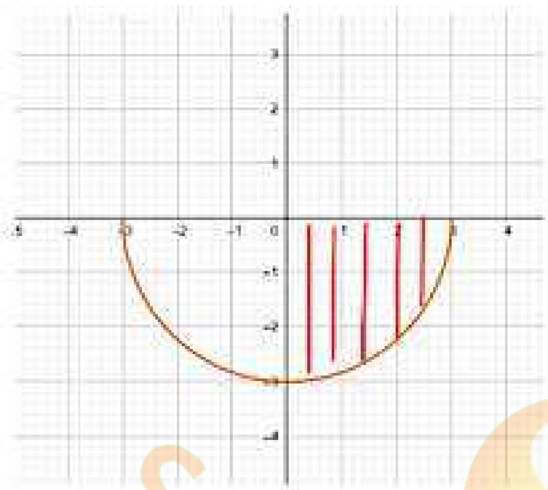
مساحة المنطقة المظللة = $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\ \ dx$

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\ \ dx = \frac{1}{2}\pi\ (2)^2 = 2\pi$$

مثال

أوجد $\int_0^3 -\sqrt{9-x^2}\ dx$ بيانياً

الحل



$$y = \sqrt{9-x^2}$$
$$y^2 = 9 - x^2$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

هي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها وحدة طول

$y = -\sqrt{9-x^2}$ تمثل معادلة النصف السفلي للدائرة

مساحة المنطقة المظللة = $\int_0^3 -\sqrt{9-x^2}\ dx$

$$\int_0^3 -\sqrt{9-x^2}\ dx = \frac{1}{2}\pi\,(2)^2 = 2\pi$$