

هنا جميع روابط وقنوات صفوف الكويت التعليمية

<https://t.me/joinchat/AAAAAE040LBCM5TO6wNB2w>

إليك التطبيق الرسمي لموقع المناهج الكويتية على متجر جوجل بلاي

<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.almanahj.myapplication>

لتنضم الينا اضغط على اسم الصف المطلوب

[قناة المناهج الكويتية / قروب مدرسون في الكويت](#)

[الصف الأول](#)

[الصف الثاني](#)

[الصف الثالث](#)

[الصف الرابع](#)

[الصف الخامس](#)

[الصف السادس](#)

[الصف السابع](#)

[الصف الثامن](#)

[الصف التاسع](#)

[الصف العاشر](#)

[الصف الحادي عشر العلمي / الصف الحادي عشر الأدبي](#)

[الصف الثاني عشر العلمي / الصف الثاني عشر الأدبي](#)



وزارة التربية  
الإدارة العامة لمنطقة الفروانية التعليمية  
مدرسة مرشد سعد البذال ثانوي بنين

**الصف الثاني عشر علمي**

**مادة الرياضيات**

**المراجعة النهائية لكتاب الطالب**

**الوحدة الخامسة : التكامل**



## الوحدة الخامسة : التكامل

### البند الأول : التكامل غير المحدد .

تعريف : المشتقة العكسية : تسمى الدالة  $F$  مشتقة عكسية للدالة  $f$  المعرفة على مجالها  $I$ .

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I \quad \text{إذا كان:}$$

#### نظرية (1)

إذا كانت  $F$  مشتقة عكسية للدالة  $f$  على الفترة  $I$ ،  $G$  مشتقة عكسية أيضاً للدالة  $f$  على الفترة  $I$  فإن:

$$G(x) = F(x) + C \quad \forall x \in I$$

حيث  $C$  ثابت.

#### نظرية (2)

إذا كانت  $F$  مشتقة عكسية لـ  $f$  على الفترة  $I$  فإن الصورة العامة للمشتقة العكسية لـ  $f$  على الفترة  $I$  هي:

$$F(x) + C$$

حيث  $C$  ثابت اختياري

تعريف : التكامل غير المحدد للدالة  $f$  بالنسبة إلى  $x$  هو مجموعة كل المشتقات العكسية لـ  $f$ ، ويكتب على الصورة:

$$\int f(x) dx$$

قواعد التكامل غير المحدد :

$$1 \quad \int k dx = kx + C \quad k \text{ عدد ثابت}$$

$$2 \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$$

خواص التكامل غير المحدد :

$$1 \quad \int k f(x) dx = k \int f(x) dx, \quad k \neq 0$$

$$2 \quad \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

ملاحظات :

$$a \quad \int -f(x) dx = - \int f(x) dx$$

$$b \quad \int (f(x) + k) dx = \int f(x) dx + \int k dx$$

تمرين : إذا كان:  $F(x) = \int (2x + 5) dx$  ،  $F(-1) = 0$  فأوجد  $F(x)$

الحل :



تمرين : أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a  $\int (2x - 3)(x + 4) dx$

b  $\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} dx$

c  $\int \left( \frac{3x^2 - x}{x} \right)^2 dx$

WWW.KweduFiles.Com

---

$$\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x} dx$$

---

تمرين : إذا كان  $F(x) = \int (3x^2 - 5) dx$  وكان  $F(2) = 3$ ، فأوجد  $F(x)$ .

الحل :



### البند الثاني : التكامل بالتعويض .

ولإيجاد هذا التكامل نتعامل مع متغير جديد. نستبدل المتغير  $x$  بالمتغير  $u$  بهدف استخدام القواعد الأساسية للتكامل غير المحدد

قاعدة التكامل بالتعويض : إذا كانت  $F$  هي مشتقة عكسية للدالة  $f$  فإن:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

وإذا كان  $du = g'(x)dx$  ،  $u = g(x)$  فإن:

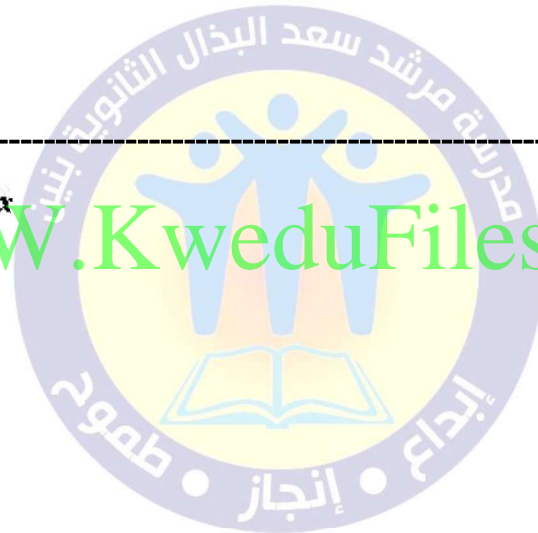
$$\int f(u)du = F(u) + C$$

تمرين : استخدم التعويض المناسب لإيجاد التكامل :

$$\int (4x - 5)^8 dx$$

$$\int (x^2 + 2x + 5)^3 (2x + 2) dx$$

www.KweduFiles.Com



$$\int (2x - 3)\sqrt{x^2 - 3x + 5} dx$$



تمكننا قاعدة التكامل بالتعويض من تعميم قاعدة القوى في التكامل غير المحدد كالتالي:

$$\int (g(x))^n g'(x) dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \in \mathbb{Q} - \{-1\}, \quad C \text{ ثابت}$$

تمرين : أوجد كلا من التكاملات الآتية :

a  $\int \sqrt[5]{(3x+7)} dx$

b  $\int \frac{3(\sqrt[3]{x} - 5) dx}{\sqrt[3]{x^2}}$



WWW.KweduFiles.Com



$$\int (x^2 - 2x)(x^3 - 3x^2 + 4)^5 dx$$

تمرين : أوجد .

$$\int (x^2 - 1)\sqrt{x^3 - 3x + 5} dx$$

WWW.KweduFiles.Com



$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4 + x^3}} dx$$



تمرين : أوجد

$$\int x(3x + 2)^6 dx$$

$$\int x^2 \sqrt{x-1} dx$$

WWW.KweduFiles.Com



$$\int x^3 \sqrt{x^2 - 2} dx$$





**البند الثالث : تكامل الدوال المثلثية.**

يمكن تطبيق قواعد التكامل التي تم دراستها عند تكامل الدوال المثلثية.

التكامل غير المحدد	
1	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
2	$\int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$
3	$\int \cos x dx = \sin x + C$
4	$\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
5	$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
6	$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
7	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
8	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

تمرين : أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a  $\int (\sin x + \sec^2 x) dx$

$\int (\cos x + \csc^2 x) dx$

b  $\int \csc x (\cot x + \csc x) dx$

$\int \sec x (\tan x + \sec x) dx$

c  $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

تمرين : أوجد .

a  $\int \sin 5x dx$

$$\int \cos 4x dx$$

b  $\int (x^2 + \cos 2x) dx$

$$\int (2x - \sin 3x) dx$$

c  $\int x \sec^2(x^2 + 2) dx$

$$\int x \csc^2(x^2 - 1) dx$$



WWW.KweduFiles.Com

a  $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$

تمرين : أوجد



تمرين : أوجد

b  $\int \sec^2 x \cdot \tan x \, dx$

---

$$\int \cos^4 t \cdot \sin t \, dt$$

WWW.KweduFiles.Com

---

$$\int \csc^2 x \cdot \cot x \, dx$$

---

a  $\int \sin^5(x+1) \cdot \cos(x+1) \, dx$

تمرين : أوجد



b  $\int x^3 \cdot \cos(x^4 + 5) dx$

c  $\int (1 + \cos x)^6 \sin x dx$

WWW.KweduFiles.Com



a  $\int \cos^3(2x - 3) \cdot \sin(2x - 3) dx$

b  $\int x^2 \cdot \sin(x^3 - 1) dx$

c  $\int (3 + \sin 2x)^5 \cos 2x dx$

تمرين : أوجد



تمرين : أوجد

$$\int \sec^4 x \tan x \, dx$$

$$\int \csc^5 x \cot x \, dx$$

WWW.KweduFiles.Com



$$\int (\sec x \tan x + \sin x) \, dx$$



تمرين : أوجد .

$$\int \sqrt{1 + \sin x} \cos x \, dx$$

$$\int \sqrt{\tan x} \sec^2 x \, dx$$

WWW.KweduFiles.Com

$$\int \frac{dx}{(\cos^2 x) \sqrt{1 + \tan x}}$$



البند الرابع : الدوال الأسية واللوغاريتمية.

اشتقاق الدوال الأسية

قاعدة (1)

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

إذا كانت  $u$  دالة في  $x$  قابلة للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

قاعدة (2)

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

وفي حالة  $u$  دالة في  $x$  قابلة للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx} (e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

اشتقاق دوال اللوغاريتمات الطبيعية

قاعدة (3)

$$\frac{d}{dx} (\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

قاعدة (4)

$$\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}$$

إذا كانت  $u$  دالة في  $x$  قابلة للاشتقاق:

$$\frac{d}{dx} (\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

تمرين : أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية :

$$y = 8^{\tan x}$$

$$y = e^{x^2-x+1}$$

$$y = \ln(x+2)$$

$$y = \ln(2 - \cos x)$$



تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتمية :

الجدول التالي يبين تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتمية حيث

القاعدة المشتقة	التكامل غير المحدد
$\frac{d}{dx} e^x = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx} = u' e^u$	$\int u' e^u dx = e^u + C$
$\frac{d}{dx} \ln  x  = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln  x  + C$
$\frac{d}{dx} \ln  u  = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u} dx = \ln  u  + C$

لاحظ أن:  $\int \frac{g'(x)dx}{g(x)} = \ln |g(x)| + C$

تمرين : أوجد التكامل غير المحدد في كل مما يلي:

$$\int (2x+1)e^{x^2+x+4} dx$$

WWW.KweduFiles.Com

$$\int (x^2-2)e^{x^3-6x} dx$$

$$\int \left( e^{0.5x} + \frac{0.5}{x} \right) dx$$





تمرين : أوجد التكامل غير المحدد في كل مما يلي:

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 5} dx$$

WWW.KweduFiles.Com

$$\int \frac{x^2 + 1}{x} dx$$

$$\int \frac{2}{3x + 1} dx$$



تمرين : أوجد التكامل غير المحدد في كل مما يلي:

$$\int (\cot x + x^2) dx$$

$$\int (2 \tan x - \csc^2 x) dx$$



WWW.KweduFiles.Com



**البند الخامس : التكامل بالتجزئ.**

أولوية اختيار الدالة  $u$  اللوغاريتمية أولا ، يليها الدالة الحدودية ثم الدالة المثلثية وأخيرا الدالة الأسية .

**Integration by Parts Formula**

**قاعدة التكامل بالتجزئ**

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x \cos(3x) dx$$

تمرين : أوجد

[WWW.KweduFiles.Com](http://WWW.KweduFiles.Com)

$$\int (x-3)e^{x-3} dx$$



تمرين : أوجد

$$\int \ln(2x - 1) dx$$

$$\int (2x + 1) \ln(x + 1) dx$$

WWW.KweduFiles.Com



تمرين : أوجد

$$\int x^2 e^{2x-3} dx$$

$$\int (x^2 + 3x) \sin x dx$$



WWW.KweduFiles.Com



تمرين : أوجد

$$\int e^{2x} \sin x dx$$



البند السادس : التكامل باستخدام الكسور الجزئية.

أولاً: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى) غير مكررة

تمرين : أوجد الكسور الجزئية لكل دالة  $f$  مما يلي ثم أوجد  $\int f(x) dx$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x}$$



تمرين : أوجد

$$f(x) = \frac{-x + 10}{x^2 + x - 12}$$





ثانيًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر.

تمرين : أوجد

$$\int \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$$



تمرين : أوجد الكسور الجزئية لكل دالة  $f$  مما يلي ثم أوجد  $\int f(x) dx$

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 4x^2} dx$$



$$\int \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 1} dx$$

تمرين : أوجد



تمرين : أوجد

$$\int \frac{x^3 - 2}{x^2 + x} dx$$



تمرين : أوجد

$$\int_1^4 \frac{8 - x^4}{2x^2} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x dx$$

WWW.KweduFiles.Com

$$\int_1^2 \left( 3e^x + \frac{5}{x} \right) dx$$

خواص التكامل المحدد :

إذا كانت  $f$  دالة متصلة على الفترة  $I$  ,  $k \in \mathbb{R}$  ,  $a, b, c \in I$  فإن:

1  $\int_a^a f(x) dx = 0$

2  $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

3  $\int_a^b k dx = k(b - a)$

4  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

5  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

لاحظ في خاصية 3 أنه: إذا كان  $k = 1$  فإن:  $\int_a^b dx = b - a$



a  $\int_{-8}^{-4} dx$

تمرين : أوجد :

b  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x) dx :$

c  $\int_2^{-1} (\sqrt{x+1} - 3) dx :$

d  $\int_1^2 (3e^x + \frac{e}{x}) dx$

WWW.KweduFiles.Com

$\int_{-1}^3 |x - 2| dx$

تمرين : أوجد

$\int_{-2}^3 (x|x| + 3) dx$



لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a, b]$

6 إذا كانت:  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

فإن:  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

7 إذا كانت:  $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

فإن:  $\int_a^b f(x) dx \leq 0$

$$\int_{-4}^2 (x^2 + 2x - 8) dx \leq 0$$

تمرين : دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

WWW.KweduFiles.Com

$$\int_3^5 (x^2 + x) dx \geq 0$$



8) لتكن الدالتين  $f, g$  متصلتين على  $[a, b]$  وكانت:  $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$   
فإن:  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

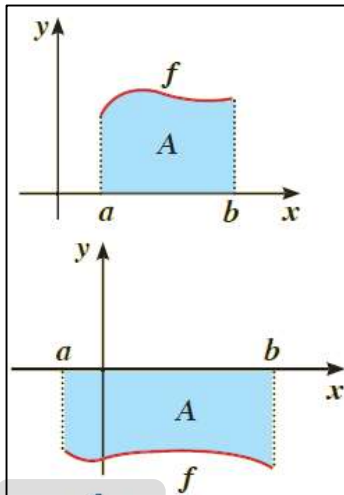
تمرين : دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

$$\int_0^1 (x^2 - 3x + 7) dx \geq \int_0^1 (4x - 5) dx$$

WWW.KweduFiles.Com



التفسير البياني للتكامل المحدد



في المستوى الإحداثي لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a, b]$ ،  
 $A$  تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة  $f$  ومحور السينات  
والمستقيمين  $x = a$  ،  $x = b$

1) إذا كانت:  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

فإن:  $\int_a^b f(x) dx = A$

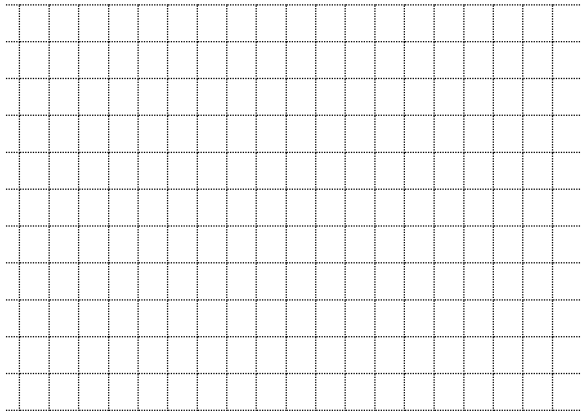
2) إذا كانت:  $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

فإن:  $\int_a^b f(x) dx = -A$





تمرين : أوجد قيمة  $\int_1^5 (2 - 2x) dx$  بيانياً.

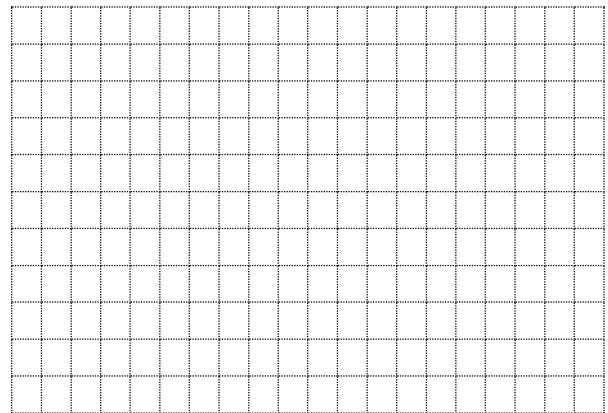


تمرين : استعن برسم بيان الدوال لإيجاد:

$$\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$$



$$\int_{-5}^0 -\sqrt{25 - x^2} dx$$



تمرين : استخدم التعويض المناسب لحساب التكامل.

$$\int_0^3 \frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$\int_e^6 \frac{dx}{x \ln x}$$

WWW.KweduFiles.Com



$$\int_{-1}^3 \frac{x dx}{x^2 + 1}$$



ويجب مراعاة ما يلي عند استخدام طريقة التعويض في إيجاد التكامل المحدد:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

$$u = g(x) \quad , \quad du = g'(x) dx \quad \text{بفرض}$$

ثم كامل بالنسبة لـ  $u$  من  $u = g(a)$  إلى  $u = g(b)$  بحيث يكون:

$$\int_c^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \cdot du$$

$$\int_0^\pi x \cos 3x dx$$

تمرين : أوجد

WWW.KweduFiles.Com

$$\int_1^3 x^3 \ln x dx$$



$$\int_1^3 \frac{x^2}{(x+1)^2} dx$$

تمرين : أوجد



(1) أوجد :  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x dx$

(2) أوجد :  $\int_{-1}^1 (x^2 + 2x - 3)^2 (x + 1) dx$

(3) أوجد :  $\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx$

(4) أوجد :  $\int_{-1}^1 ((x+1)\sqrt{x^2+2x+5}) dx$

(5) أوجد :  $\int_{-2}^0 x e^{-x} dx$

(6) أوجد :  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 x dx$

(7) أوجد :  $\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3} dx$

انتهت الوحدة الخامسة وتبقى حل بنود الموضوعي لهذه الوحدة

أسئلة البند الأول :

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
رمز الإجابة														

أسئلة البند الثاني :

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
رمز الإجابة														

أسئلة البند الثالث :

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
رمز الإجابة														

أسئلة البند الرابع :

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
رمز الإجابة														

أسئلة البند الخامس :

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
رمز الإجابة														

أسئلة البند السادس :

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
رمز الإجابة														

أسئلة البند السابع :

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
رمز الإجابة														

