محمد كامل

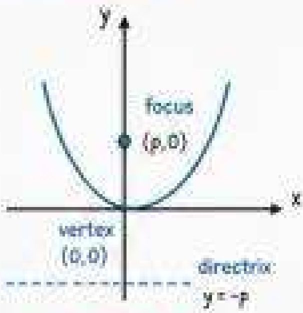
الملف قوانين علي 12
موقع المناهج ⇐ ملفات الكويت التعليمية ⇐ الصف الثاني عشر العلمي ⇐ رياضيات ⇐ الفصل الثاني

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

قوانين
12 علي

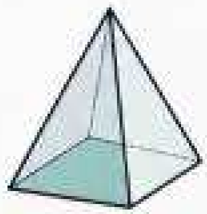
ببساطة • فهم • تطبيق

أ/ محمد كامل
مادة الرياضيات

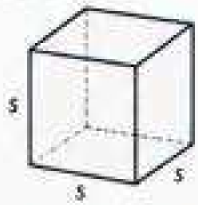


قطع مكافئ

$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$

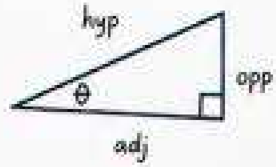


الهندسة الفراغية



المجسمات

$V = s^3$



المثلثات

$\sin(\theta) = \frac{opp}{hyp}$

" الرياضيات ليست عن الأرقام فقط،
بل عن فهم العالم من حولنا .

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\int x$ تكاملات الدوال

- التكامل غير المحدد للدالة f بالنسبة إلى يكتب $\int f(x)\,dx$ ويساوي $F(x)+C$ حيث $F(x)$ هي المشتقة العكسية و C ثابت التكامل.

جدول صيغ التكامل

	التكامل غير المحدد	قاعدة المشتقة
1	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad , \; n \neq -1$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n \quad , \; n \neq -1$
2	$\int \sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{k}+C$	$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) = \sin kx$
3	$\int \cos kx\,dx = \frac{\sin kx}{k}+C$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right) = \cos kx$
4	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
5	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$	$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$
6	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
7	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$	$\frac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$

قاعدة التكامل بالتعويض $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x))+C$

خواص التكامل غير المحدد

a) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

b) $\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

c) $\int -f(x)\,dx = -\int f(x)\,dx$

d) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C$

e) $\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)}+C$

جدول تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

	التكامل غير المحدد	قاعدة المشتقة
e^x	$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\frac{d}{dx}\,e^x = e^x$
e^u	$\int u'e^u\,dx = e^u + C$	$\frac{d}{dx}\,e^u = e^u\,\frac{du}{dx} = u'e^u$
$\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{d}{dx}\,\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$
$\frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln\lvert u\rvert + C$	$\frac{d}{dx}\,\ln\lvert u\rvert = \frac{1}{u}\,\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$

خواص التكامل المحدد

- التكامل بالتجزئة: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ حيث u ، v دالتين في x قابلتين للتفاضل.
- الكسور الجزئية

تفكيك $\frac{r(x)}{h(x)}$ إلى كسور جزئية:

لكل عامل من $h(x)$ على الصورة $(mx+n)^k$، يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها k :

$$\frac{A_1}{mx+n} + \frac{A_2}{(mx+n)^2} + \dots + \frac{A_k}{(mx+n)^k}$$

لاحظ أنه في حالة $k=1$ ، فإنه يوجد حد واحد فقط في المجموع.

- تفكيك $\frac{r(x)}{h(x)}$ إلى كسور جزئية

حلِّل المقام وحدد العوامل الخطية لـ $h(x)$.

- التكامل المحدد

- $\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- $\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \quad (u = g(x) \;;\; du = g'(x)\,dx)$

1. إذا f دالة متصلة وموجبة على $[a,b]$، $a<b$، فإن $\int_a^b f(x)\,dx$ يمثل المساحة المحددة بمنحنى الدالة f، السينات، والمستقيمين ذات المعادلتين $x=a$ ، $x=b$.
2. إذا f دالة متصلة وسالبة على $[a,b]$، $a<b$، فإن $-\int_a^b f(x)\,dx$ يمثل المساحة المحددة بمنحنى الدالة f، السينات، والمستقيمين ذات المعادلتين $x=a$ ، $x=b$.

خواص التكامل المحدد

f دالة متصلة على $[a,b]$

1	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2	$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
3	$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$
4	$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
5	$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \;;\; c\in[a,b]$
6	$f(x)\geqslant 0 \;\forall\; x\in[a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$
7	$f(x)\leqslant 0 \;\forall\; x\in[a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$
8	f ، و دالتان متصلتان على $[a,b]$ وإذا كان: $f,g) \leqslant g(x) \;\forall\; x\in[a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

مساحة منطقة محددة بمنحنى دالة

- مسلطقة محددة بمنحنى دالة f متصلة في فترة $[a,b]$ ومحور السينات والمستقيمين: $x=b$, $x=a$ هي:

$$A=\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{حيث}\quad f(x)\ge 0$$

$$A=-\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{حيث}\quad f(x)\le 0$$

- إذا كان $f(x)\le 0$ على الفترة $[a,c]$ و $f(x)\ge 0$ على الفترة $[c,b]$ فإن:

$$A=\left|\int_a^c f(x)\,dx\right|+\left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

- إذا كانت كل من f,g متصلتين في الفترة $[a,b]$ وكانت $f(x)\ge g(x)$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين والمستقيمين $x=b$, $x=a$ هي:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

عندما تكون المساحة بين منحنيين

- إذا تحددت منطقة بين منحنيين متقاطعين فإن نقاط التقاطع هي حدود التكامل.
- إذا تحددت منطقة بأكثر من دالة ولا يوجد تكامل مفرد يعطي المساحة فيمكن تجزيء هذه المنطقة إلى مناطق تغيرات كل دالة وتتابع العمل.
- إذا نتج جسم عن دوران منطقة مستوية محددة بمنحنيي الدالتين f, g دورة كاملة حول محور السينات بحيث $f\ge g$ في الفترة $[a,b]$ فإن حجم هذا الجسم يعطى بالقاعدة:

$$V(x)=\pi\int_a^b \left([f(x)]^2-[g(x)]^2\right)dx$$

وذلك في الحالتين: $f(x)\ge g(x)\ge 0$ أو $f(x)\le g(x)\ge 0$.

- إذا نتج جسم عن دوران منطقة مستوية محددة بمنحنى دالة واحدة دورة كاملة حول محور السينات في الفترة $[a,b]$ فإن حجم الجسم يعطى بالقاعدة:

$$V(x)=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

- كل نقطة على منحنى دالة ينتج عنها مقطع دائري في دورة كاملة حول محور السينات.

معـادلات تفاضليـة

- يمكن إيجاد معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل المماس على المنحنى ومعلومية نقطة محددة يمر بها هذا المنحنى.
- تستخدم المشتقة الثانية للدالة f لدراسة القيم القصوى والقيم العظمى لمنحنى الدالة.
- تستخدم المشتقة الثانية للدالة f لإيجاد نقطة انعطاف منحنى الدالة.
- تساعدنا القاعدة: $L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ على إيجاد طول قوس على منحنى دالة في الفترة $[a,b]$.
- رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.
- درجة المعادلة التفاضلية هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.
- يمكن حل المعادلات التفاضلية بفصل المتغيرات: $\frac{1}{h(y)}dy=g(x)dx$ ثم تكامل.
- حل المعادلة التفاضلية: $y'=ay$ هو $y=ke^{ax}$.
- حل المعادلة التفاضلية: $y'=ay+b$ هو $y=ke^{ax}-\frac{b}{a}$.

تصميم وإعداد : أ. محمد كامل

القطـع المكافئ

نقطة الأصل

إذا كانت البؤرة والدليل معطيين بحيث نقطة الأصل $(0\,,0)$ نحصل على حالتين أساسيتين:

تعريف.

القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى المتساوية البعد عن نقطة ثابتة معطاة (البؤرة) وعن مستقيم ثابت معطى (الدليل).

الصورة العامة	$x^2 = 4py$	$y^2 = 4px$
الفتحة	إلى أعلى أو إلى أسفل	إلى اليمين أو إلى اليسار
إشارة p	(إلى أسفل) $p < 0$ (إلى أعلى) $p > 0$	(إلى اليسار) $p < 0$ (إلى اليمين) $p > 0$
البؤرة	$(0\,,p)$	$(p\,,0)$
الدليل	$y = -p$	$x = -p$
محور التناظر	محور الصادات $(y - axis)$	محور السينات $(x - axis)$
المسافة من الرأس إلى البؤرة	$\lvert p \rvert$	
المسافة من الرأس إلى الدليل		

تصميم و اعداد : أ. محمد كامل

القطع الناقص

تعريف : القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتاً.

معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل (0 , 0) كالتالي:

العنصر	$a > b > 0$	$a > b > 0$
المعادلة	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a, 0) \;,\; A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a) \;,\; A_2(0, a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	$2a$
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0, -b) \;,\; B_2(0, b)$	$B_1(-b, 0) \;,\; B_2(b, 0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	$2b$
البؤرتان	$F_1(-c, 0) \;,\; F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c) \;,\; F_2(0, c)$
العلاقة الأساسية	$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 = b^2 + c^2$
معادلات الدليلين	$x = -\frac{a^2}{c} \;,\; x = \frac{a^2}{c}$	$y = -\frac{a^2}{c} \;,\; y = \frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه

اعداد و تصميم : أ. محمد كامل

القطع الزائـد

تعريف: القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتًا.

معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل $(0\ ,\ 0)$ كالتالي:

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
طرفا المحور القاطع (الرأسان)	$A_1(-a,0)\ ,\ A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)\ ,\ A_2(0,a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b)\ ,\ B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)\ ,\ B_2(b,0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0)\ ,\ F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)\ ,\ F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$c^2 = a^2 + b^2$	
معادلة التخطين المقاربين	$y = \pm \frac{b}{a} x$	$y = \pm \frac{a}{b} x$
معادلة الدليلين	$x = \pm \frac{a^2}{c}$	$y = \pm \frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه ومركزه	

تصميم و اعداد :أ. محمد كامل

الاختلاف المركزي

تعريف: القطع المخروطي هو مجموعة كل النقاط في المستوى الإحداثي حيث تكون نسبة بعد كل منها من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) في نفس المستوى تساوي مقدارًا ثابتا.

هذا المقدار الثابت يسمى الاختلاف المركزي للقطع المخروطي ويرمز إليه بالرمز e.

- في القطع المكافئ: $e = 1$
- في القطع الناقص: $e = \frac{c}{a} < 1$
- في القطع الزائد: $e = \frac{c}{a} > 1$

تصميم و اعداد :أ. محمد كامل