حسام بيومي

الملف مراجعة مهمة للكورس الأول مرفقة بالإجابة

مراجعه الفصل الدراسي الأول

٢٠٢٤ـ ٢٠٢٥

رياضيات

الصف الثاني عشر علمي

اعداد
الاستاذ: حسام بيومي

أوجد إن أمكن:

$(a)\quad \lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

$(b)\quad \lim_{x \to 0} \dfrac{(x+2)^3 - 8}{x}$

$(c)\quad \lim_{x \to -2} \dfrac{|x+2|}{x^2 + 3x + 2}$

إضافي

$\lim_{x \to 5} \dfrac{|x+2| - 7}{x^2 - 25}$

$\lim_{t \to 2} \dfrac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 4}$

$\lim_{x \to -7} \dfrac{(x+4)^2 - 9}{x^2 + 7x}$

أوجد إن أمكن:

$(a)\quad \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

$(b)\quad \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

$(c)\quad \lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

إضافي

$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{9}}$

$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$$

إضافي

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2}$$

أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$$

إضافي

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$$

أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{4x^2+5x+6}}$$

إضافي

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$$

أوجد إن أمكن:

$(a)\quad \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$

$(b)\quad \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$

إضافي

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x \cos x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x^2 - x}$

أوجد إن أمكن:

$(a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{5\tan x - 3\sin x}{4x}$

$(b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \tan x - 2x\cos x}{3x}$

إضافي

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x - x^2}{3x^2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{5x + \sin x}{x}$

لتكن f :
$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x & : \quad x\geq 1 \\ 5x-1 & : \quad x<1 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f : عند $x=1$

إضافي

لتكن f :
$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & : \quad x>3 \\ 7 & : \quad x\leq 3 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f : عند $x=3$

لتكن f :
$$f(x)=\begin{cases} x^3+x & : \quad x\leq 0 \\ \frac{x^2}{x+1} & : \quad x>0 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f : عند $x=0$

ابحث اتصال الدالة f : $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x}{|x|} & : \quad x\neq 0\\ -3 & : \quad x=0\end{cases}$ عند $x=0$

ابحث اتصال الدالة f : $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$ عند $x = -2$

لتكن : $f(x)=x^2+5$, $g(x)=\sqrt{x}$ ابحث اتصال الدالة $go\,f$ عند $x=-2$

لتكن : $f(x)=\left|x^2-5x+6\right|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$

إضافي

لتكن : $g(x)=2x+3$, $f(x)=\frac{|x|}{x+2}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=1$

لتكن : $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=0$

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}-2 & : x=1\\ x^2-3 & : 1<x<3\\ 6 & : x=3\end{cases}$$

إضافي

ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : x \leq -1 \\ \frac{4}{x+3} & : x > -1 \end{cases}$$

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & : x < 0 \\ 2 & : x = 0 \\ ax + b & : x > 0 \end{cases}$ متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

أوجد قيمة الثابتين a , b

إضافي

لتكن الدالة f : $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6,10]$

إضافي

لتكن الدالة f : $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5,0]$

لتكن الدالة f: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$. ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$

إضافي

لتكن الدالة f: $f(x) = |3x^2 + 4x - 1|$. ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$

لتكن f :
$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x & : \ x\le 2 \\ 3x-2 & : \ x>2 \end{cases}$$

ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x=2$

لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} x+5 & : \ x\le 3 \\ x^2-1 & : \ x>3 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن $f'(3)$

إضافي

لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & : \ x\le -1 \\ x^2-x-2 & : \ x>-1 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1,0)$

إضافي

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x)=\frac{-4}{x^2+2x+5}$ عند النقطة $(1,0)$

لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & : \quad x\le 1 \\ 2x+1 & : \quad x>1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها

أوجد إن أمكن $f'(x)$

إضافي

لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & : \quad x< 1 \\ 2\sqrt{x} & : \quad x\ge 1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها

أوجد إن أمكن $f'(x)$

أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي لمنحنى الدالة $f(x) = \tan x$ عند النقطة $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

إضافي

أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي لمنحنى الدالة $f(x) = \sec x$ عند النقطة $F\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$

لتكن : $g(x) = x^{13}$, $f(x) = -2x^3 + 4$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(fog)(x)$, $(gof)'(0)$

لتكن : $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(fog)'(1)$

لتكن : $u = 2x^2 + x$, $f(x) = u^2 + 4u - 3$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

إذا كانت $y = \sin x$ بين أن $y^{(4)} = y$

إضافي

لتكن $y = \cos x$ بين أن $y^{(4)} + y'' = y$

أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته : $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1, 1)$

إضافي

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته : $2y = x^2 + \sin y$ عند $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$

للمنحنى الذي معادلته : $y^2+\sqrt{y}+x^2=3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1,1)$

إذا كانت $y=\sqrt{1-2x}$ فأثبت أن $yy''+(y')^2=0$

إضافي

للمنحنى الذي معادلته : $2\sqrt{y}+y=x$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3,1)$

إذا كانت $y=x\sin x$ فأثبت أن $y'''+y'+2\sin x=0$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2, 1]$

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة f : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1, 3]$

إضافي

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2, 3]$

بين أن الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0،4]$ ، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك.

إضافي

بين أن الدالة f : $f(x) = x^2 + 2x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3،1]$ ، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك.

لتكن الدالة f : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. أوجد كلاً مما يلي:

a) النقاط الحرجة للدالة

b) الفترات التي تكون فيها الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها

c) القيم القصوى المحلية

إضافي

لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 12x^2 - 5$. أوجد كلاً مما يلي:

a) النقاط الحرجة للدالة

b) الفترات التي تكون فيها الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها

c) القيم القصوى المحلية

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها

إضافي

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها

صفحة بيانية

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها

إضافي

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها

صفحة بيانية

تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h.

a) أوجد الارتفاع $h(cm)$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

b) ما قيمة هذا الحجم ؟

إضافي

أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر مايمكن.

أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها 8m ، واحدا منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعاً.

أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الاناث 25 والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $x = 18.4$. باستخدام مستوى ثقة 95 %

1- أوجد هامش الخطأ.

2- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3- فسّر فترة الثقة.

إضافي

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ وبمتوسط حسابي $\overline{x} = 50$

، و الانحراف المعياري $S = 9$ باستخدام مستوى الثقة 95% .

a) أوجد هامش الخطأ.

b) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ، علماً بأن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.

إذا كان لدينا $n = 13 \quad , \quad s = 0.3 \quad , \quad \overline{x} = 8.4$

بيّنت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو $\mu = 1800\ kg$ مع انحراف معياري $\sigma = 150\ kg$. ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الاسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك و تأكيدًا على ذلك تمّ اختبار عينة من 40 سلكًا. فتبيّن أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي $1840\ kg$

هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$؟

إضافي

متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\bar{x} = 1570$ بانحراف معياري $S = 120$. يقول صاحب المصنع إنّ متوسط العمر بالساعات المصنع للمصابيح المصنعة في $\mu = 1600$

اختبر صحة الفرض $\mu = 1600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1600$ وباختبار مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$

يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 دينارًا كويتيًّا. فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل تبيّن أن متوسطها الحسابي (دينار) $\bar{x}= 283$ و الانحراف المعياري $S = 32$ فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟

استخدم مستوى ثقة 95 % (علمًا بأن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًّا)

مراجعه الفصل الدراسي الأول

٢٠٢٤_٢٠٢٥

رياضيات

الصف الثاني عشر علمي

اعداد
الاستاذ: حسام بيومي

أوجد إن أمكن:

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

عند التعويض المباشر عن $x = 1$ نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{x\,\cancel{(x-1)}} \quad , \quad x \neq 1$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

شروط المقام؟

$$\lim_{x \to 1} x = 1 \neq 0$$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+2)^3 - 8}{x}$

بالتعويض المباشر عن $x = 0$ نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\cancel{x+2-2})\left((x+2)^2 + 2(x+2) + 4\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\,(x^2 + 4x + 4 + 2x + 4 + 4)}{\cancel{x}} \quad , x \neq 0$$

$$= \lim_{x \to 0} (x^2 + 6x + 12) = 0^2 + 6(0) + 12 = 12$$

(c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{|x+2|}{x^2 + 3x + 2}$

بالتعويض المباشر عن $x = -2$ نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

نعرف

$$f(x) = \frac{|x+2|}{x^2+3x+2} = \begin{cases} \dfrac{\cancel{x+2}}{\cancel{(x+2)}(x+1)} & : x > -2 \\ \dfrac{-\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x+1)} & : x < -2 \end{cases} \quad , x \neq -2$$

$\boxed{\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)}$ النهاية من جهه اليمين

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-1} = \boxed{-1} \rightarrow ①$$

شرط المقام؟

$$\lim_{x \to -2} (x+1) = -2+1 = -1 \neq 0$$

$\boxed{\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)}$ النهاية من جهه اليسار

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{-1}{x+1} = \frac{-1}{-1} = \boxed{1} \rightarrow ②$$

شرط المقام؟

$$\lim_{x \to -2^-} (x+1) = -2+1 = -1 \neq 0$$

من ① و ② نستنتج أن

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) \neq \lim_{x \to -2^-} f(x)$$

إذاً $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ غير موجودة

$\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{(x+4)^2 - 9}{x^2 + 7x}$ ، $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 4}$ ، $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{|x+2| - 7}{x^2 - 25}$

أوجد إن أمكن:

(a) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

بالتعويض المباشر عن $x = 2$ نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

بالضرب في مرافق البسط

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{2x-3}-1)}{x-2} \times \frac{(\sqrt{2x-3}+1)}{(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{2x-3}+1)} \quad , x \neq 2$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} = \frac{\lim_{x \to 2} 2}{\lim_{x \to 2}(\sqrt{2x-3}+1)} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

شرط المقام

$$\lim_{x \to 2}(\sqrt{2x-3}+1)$$

$$= \lim_{x \to 2} \sqrt{2x-3} + \lim_{x \to 2} 1$$

$$= 1 + 1 = 2 \neq 0$$

شرط الجذر

نهاية ما تحت الجذر > 0

$$\lim_{x \to 2}(2x-3) = 2(2)-3 = 1 > 0$$

نهاية الجذر

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{2x-3} = \sqrt{\lim_{x \to 2}(2x-3)} = \sqrt{1} = 1$$

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

عند التعويض المباشر عن $x = 1$ نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\cancel{\sqrt[3]{x}-1}} \quad , x \neq 1$$

$$= \lim_{x \to 1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1) = \lim_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2} + \lim_{x \to 1} \sqrt[3]{x} + \lim_{x \to 1} 1$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x \to 1} x^2} + \sqrt[3]{\lim_{x \to 1} x} + 1 = 1+1+1 = 3$$

(c) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

عند التعويض المباشر عن $x = -2$ نحصل على صيغة غير معينة

ملحوظة هامة مرافق $\sqrt[3]{a}$ هو $\sqrt[3]{a^2}$

بالضرب في مرافق المقام

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}} \times \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\cancel{x+2}} \quad , x \neq -2$$

$$= \lim_{x \to -2}(x-2)(\sqrt[3]{(x+2)^2}) = \lim_{x \to -2}(x-2) \cdot \lim_{x \to -2} \sqrt[3]{(x+2)^2} = (-2-2) \cdot \sqrt[3]{\lim_{x \to -2}(x+2)^2}$$

$$= -4 \times \sqrt[3]{(-2+2)^2} = 0$$

إضافي

$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{9}}$ $\qquad$ $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$$

عند التعويض المباشر عن $x = 3$ نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

نستخدم القسمة التركيبية

3	1	-2	-4	3
		3	3	-3
	1	1	-1	0

الناتج $x^2 + x - 1$ والباقي 0

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} (x^2 + x - 1)$$

$$= 3^2 + 3 - 1$$

$$= 11$$

إضافي

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2}$$

أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$\sqrt{x^2}=|x|$

عندما $x\to\infty$

يكون $|x|=x$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}\quad , \; x\neq 0$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\frac{1-0}{1}=\boxed{1}$$

شرط الجذر

نهاية ماتحت الجذر >0

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}$$

$$=1+0-0=1>0$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$=\sqrt{1}=1\neq 0$$

إضافي

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$$

أوجد إن أمكن:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{4x^2+5x+6}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(2-\frac{3}{x}\right)}{-\cancel{x}\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}\ ,\ x\neq 0$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{-\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}$$

$$=\frac{2-0}{-2}=\boxed{-1}$$

$\sqrt{x^2}=|x|$

عندما $x\to-\infty$

يكون $|x|=-x$

شرط الجذر

0 < نهاية ماتحت الجذر

$$\lim_{x\to-\infty}\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}4+\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x^2}$$

$$=4+0+0=4$$

شرط المقام

$$\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}$$

$$=-\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}$$

$$=-\sqrt{4}=-2\neq 0$$

إضافي

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$$

أوجد إن أمكن:

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$$

(بالضرب x مرافق المقام)

تذكرات

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 (1 + \cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot (1 + \cos x)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \lim_{x \to 0} (1 + \cos x) = \left(\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \left(\lim_{x \to 0} 1 + \lim_{x \to 0} \cos x\right)$$

$$= (1)^2 \cdot (1+1) = 1 \times 2 = \boxed{2}$$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1} \times \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}$$

تذكر

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x (\cos x + 1)}{\cos^2 x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \cancel{\sin x} (\cos x + 1)}{-\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} -\frac{x}{\sin x} \cdot (\cos x + 1)$$

$$= -\left(\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}\right) \cdot \left(\lim_{x \to 0} \cos x + \lim_{x \to 0} 1\right)$$

$$= -(1) \times (1+1) = 1 \times 2 = 2$$

إضافي

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x \cos x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x^2 - x}$

أوجد إن أمكن:

(a) $\lim_{x\to0}\frac{5\tan x-3\sin x}{4x}$

(فك توحيد المقامات)

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{5\tan x}{4x}-\frac{3\sin x}{4x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{5\tan x}{4x}-\lim_{x\to0}\frac{3\sin x}{4x}$$

$$=\frac{5}{4}\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}-\frac{3}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$$

$$=\frac{5}{4}\times(1)-\frac{3}{4}\times(1)=\frac{1}{2}$$

(b) $\lim_{x\to0}\frac{\cos x\tan x-2x\cos x}{3x}$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x\tan x}{3x}-\frac{2\cancel{x}\cos x}{3\cancel{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{3}\cdot\frac{\tan x}{x}-\frac{2}{3}\cos x\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}-\lim_{x\to0}\frac{2}{3}\cos x$$

$$=\frac{1}{3}\times1-\frac{2}{3}\times1$$

$$=-\frac{1}{3}$$

إضافي

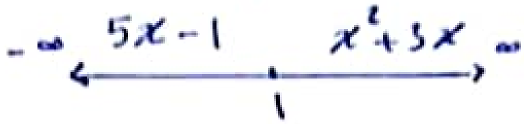
$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x+3x\cos 4x}{5x}$

$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x-x^2}{3x^2}$

$\lim_{x\to0}\frac{5x+\sin x}{x}$

لتكن f: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & : x \geq 1 \\ 5x - 1 & : x < 1 \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة f: عند $x = 1$



أ: خد اليمين

$f(1) = 1^2 + 3(1) = 4 \longrightarrow ①$

النهاية من جهة اليمين

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (x^2+3x)$$
$$= 1^2 + 3(1)$$
$$= \boxed{4}$$

النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} (5x-1)$$
$$= 5(1) - 1$$
$$= \boxed{4}$$

$$\because \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = 4$$

$$\therefore \lim_{x\to1} f(x) = 4 \longrightarrow ②$$

من ① و ② نستنتج أن

الدالة متصلة عند $x=1$

إضافي

لتكن f: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & : x > 3 \\ 7 & : x \leq 3 \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة f: عند $x = 3$

لتكن f: $f(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x+1} & : x > 0 \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة f: عند $x = 0$

ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{|x|} & : x \neq 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$ عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{x} & ; x > 0 \\ -3 & ; x = 0 \\ \frac{x^2-3x}{-x} & ; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\cancel{x}(x-3)}{\cancel{x}} & ; x > 0 \\ -3 & ; x = 0 \\ \frac{\cancel{x}(x-3)}{-\cancel{x}} & ; x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & ; x > 0 \\ -3 & ; x = 0 \\ -(x-3) & ; x < 0 \end{cases}$$

$-\infty \quad -(x-3) \quad \underset{0}{|} \quad (x-3) \quad \infty$

$f(0) = -3 \longrightarrow ①$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -(x-3) = -(0-3) = \boxed{3}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x-3) = 0-3 = \boxed{-3}$$

$\because \lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة

$\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x=2$

ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$ عند $x = -2$

نفرض أن $h(x) = x^2+4$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$

الدالة g دالة جذر تكعيبي (جذر فردى) متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=-2$

الدالة h كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore$ الدالة h متصلة عند $x=-2$

حيث أن

$h(-2) = (-2)^2 + 4$

$= 8 \neq 0$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = -2$

لتكن: $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt{x}$ ابحث اتصال الدالة $g o f$ عند $x = -2$

أولاً ندرس اتصال الدالة f عند $x = -2$

الدالة f كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

$\xleftarrow{}$ ① $\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = -2$

نوجد $f(-2) = (-2)^2 + 5 = 9$

ثانياً ندرس اتصال الدالة g عند $f(-2) = 9$

الدالة g دالة جذر x متصلة عند $x \in R^+$

$\therefore$ الدالة g متصلة عند $x = 9$

② $\leftarrow$ أي أن الدالة g متصلة عند $x = f(-2)$

من ①، ② نجد أن

$g o f$ متصلة عند $x = -2$

لتكن: $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

نفرض أن

$g(x) = |x|$, $h(x) = x^2 - 5x + 6$

$\therefore f(x) = (g o h)(x)$

أولاً ندرس اتصال الدالة h عند $x = 2$

الدالة h كثيرة حدود متصلة على R

① $\leftarrow$ $\therefore$ الدالة h متصلة عند $x = 2$

$h(2) = 2^2 - 5(2) + 6 = 0$

ثانياً ندرس اتصال الدالة g عند $h(2) = 0$

الدالة g دالة مطلق x متصلة على R

$\therefore$ الدالة g متصلة عند $x = 0$

② $\leftarrow$ $\therefore$ الدالة g متصلة عند $x = h(2)$

من ①، ② نجد أن $g o h$ متصلة عند $x = 2$

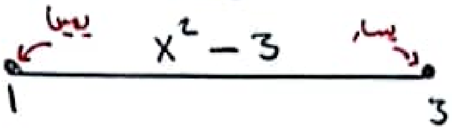
$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = 2$

إضافي

لتكن: $g(x) = 2x + 3$, $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$

لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$ حيث:
$$f(x)=\begin{cases}-2 & : x=1\\ x^2-3 & : 1<x<3\\ 6 & : x=3\end{cases}$$



أولاً ندرس اتصال الدالة f على $(1,3)$

الدالة f كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

∴ الدالة f متصلة على $(1,3)$ ← ①

ثانياً ندرس اتصال الدالة f عند $x=3$ من جهه اليسار

$f(3)=6$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x^2-3)$$
$$=3^2-3=6$$

$$\because f(3)=\lim_{x\to 3^-} f(x)$$

∴ الدالة f متصلة عند $x=3$ من جهه اليسار ← ②

ثالثاً ندرس اتصال الدالة f عند $x=1$ من جهه اليمين

$f(1)=-2$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2-3)$$
$$=1^2-3=-2$$

$$\because f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

∴ الدالة f متصلة عند $x=1$ من جهه اليمين ← ③

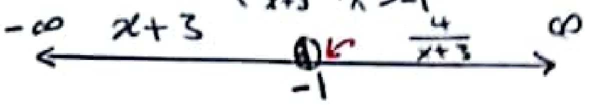
من ① ، ② ، ③ (أولاً وثانياً ، ثالثاً) نجد أن

الدالة f متصلة على $[1,3]$

إثرائي

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$ حيث:
$$f(x)=\begin{cases}-2 & : x=1\\ x^2-3 & : 1<x<3\\ 6 & : x=3\end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث: $f(x) = \begin{cases} x+3 & ; x \leq -1 \\ \frac{4}{x+3} & ; x > -1 \end{cases}$



مجال الدالة f: $D_f = (-\infty, -1] \cup (-1, \infty) = \mathbb{R}$

أولاً ندرس اتصال الدالة f على $(-\infty, -1]$

نفرض $g(x) = x+3$

g دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

∵ $f(x) = g(x) \quad \forall x \in (-\infty, -1]$

∴ f متصلة على $(-\infty, -1]$

ثانياً: ندرس اتصال الدالة f على $(-1, \infty)$

نفرض $h(x) = \frac{4}{x+3}$

h دالة حدودية نسبية متصلة لكل $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

∵ $f(x) = h(x) \quad \forall x \in (-1, \infty)$

∴ الدالة f متصلة على $(-1, \infty)$

ثالثاً ندرس اتصال الدالة f عند $x = -1$ من جهة اليمين

$$f(-1) = -1 + 3 = \boxed{2}$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(\frac{4}{x+3}\right)$$

$$= \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

$$f(-1) = \lim_{x \to -1^+} f(x)$$

شرط المقام

$$\lim_{x \to -1^+} (x+3)$$

$$= -1 + 3 = 2 \neq 0$$

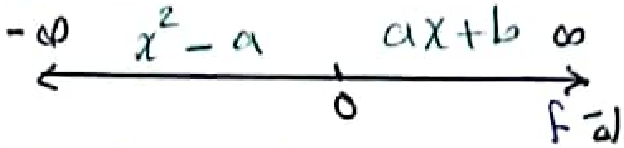
∴ الدالة f متصلة عند $x = -1$

من أولاً وثانياً وثالثاً نجد أن

الدالة f متصلة على R أي على مجالها

لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases} x^2-a & : x<0 \\ 2 & : x=0 \\ ax+b & : x>0 \end{cases}$ متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

أوجد قيمة الثابتين $a\,,b$



مجال الدالة f

$D_f = (-\infty,0)\cup\{0\}\cup(0,\infty)$

∵ الدالة f متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

∴ الدالة f متصلة عند $x=0$

$f(0)=2$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(ax+b)$

$= a(0)+b$

$= b$

$f(0)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

$\boxed{2=b}$

$f(a)=2$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2-a)$

$=0^2-a=-a$

$f(0)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

$2=-a$

$\boxed{a=-2}$

إضافي

لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases} x^2-a & : x<0 \\ 2 & : x=0 \\ ax+b & : x>0 \end{cases}$ متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

أوجد قيمة الثابتين $a\,,b$

لتكن الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6, 10]$

نفرض أن $f(x)=\sqrt{g(x)}$

$g(x)=x^2-7x+10$

أولاً المجال

$g(x)\geq 0$

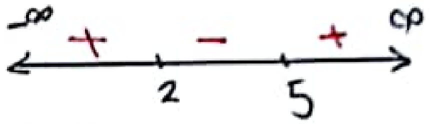
$x^2-7x+10\geq 0$

المعادلة المناظرة

$x^2-7x+10=0$

$(x-2)(x-5)=0$

$x=2$ و $x=5$



∴ مجال الدالة هو $(-\infty,2]\cup[5,\infty)$

ثانياً الاتصال

الدالة g كثيرة حدود متصلة على R

① ← الدالة g متصلة $[6,10]$

$g(x)\geq 0 \quad \forall x\in(-\infty,2]\cup[5,\infty)$

∵ $[6,10]$ مجموعة جزئية من D_f

∴ $g(x)\geq 0 \quad \forall x\in[6,10]$ ← ②

من ①، ② نجد أن

الدالة f متصلة على $[6,10]$

إضافي

لتكن الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5,0]$

لتكن الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$

ادرس اتصال الدالة f على $[-3, 3]$

لتكن الدالة f: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$. ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$

نفرض

$g(x) = \sqrt[3]{x}$ ، $h(x) = x^2 - 5x + 4$

$\therefore f(x) = (g \circ h)(x)$

$\because$ الدالة h كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

الدالة g جذر تكعيبي لـ x متصلة على $\mathbb{R}$

$\therefore$ الدالة $(g \circ h)(x)$ متصلة لأنها تركيب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

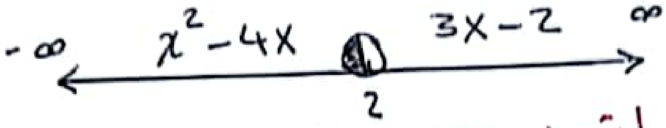
$\therefore$ الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$

إضافي

لتكن الدالة f: $f(x) = |3x^2 + 4x - 1|$. ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$

لتكن f: $f(x)=\begin{cases}x^2-4x & : x\le 2\\ 3x-2 & : x>2\end{cases}$

ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x=2$



نبحث اتصال الدالة f عند $x=2$

$$f(2)=2^2-4=0$$

النهاية من جهة اليمين

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(3x-2)$$

$$=3(2)-2=\boxed{4}$$

النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-4x)$$

$$=2^2-4(2)=\boxed{-4}$$

$$\because \lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة

∴ الدالة f غير متصلة عند $x=2$

∴ الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x+5 & : x \le 3 \\ x^2 - 1 & : x > 3 \end{cases}$

أوجد إن أمكن $f'(3)$

$$f(3) = 3 + 5 = \boxed{8}$$

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$ إن وجدت

المشتقة من جهة اليمين

$$f'_+(3) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 1 - 8}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} (x+3) = 3+3 = 6$$

$$f'_+(3) = 6$$

المشتقة من جهة اليسار

$$f'_-(3) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x + 5 - 8}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{x-3}} = 1$$

$$f'_-(3) = 1$$

$$\because f'_-(3) \neq f'_+(3)$$

$\therefore f'(3)$ غير موجودة

إضافي

لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : x \le -1 \\ x^2 - x - 2 & : x > -1 \end{cases}$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1,0)$

$(x-1)' = \boxed{1}$ البداية

$(x+2)' = 1$

$$f'(x) = \frac{(1)(x+2) - (1)(x-1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$$

الميل

$$m = f'(1) = \frac{3}{(1+2)^2} = \frac{1}{3}$$

معادلة الناظم	معادلة المماس
$\frac{-1}{m} = -3$	$m = \frac{1}{3}$
$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$	$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 0 = -3(x-1)$	$y - 0 = \frac{1}{3}(x-1)$
$y = -3x + 3$	$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

إضافي

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{-4}{x^2+2x+5}$ عند النقطة $(1,0)$

لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & : x \le 1 \\ 2x+1 & : x > 1 \end{cases}$ والمتصلة على مجالها

أوجد إن أمكن $f'(x)$

$$D_f = (-\infty, 1] \cup (1, \infty) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & ; x < 1 \\ \text{تبحث} & ; x = 1 \\ 2 & ; x > 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 1^2 + 2 = \boxed{3}$$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$ إن وجدت

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+2-3}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 1+1$$

$$= \boxed{2}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x+1-3}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{2x-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} 2 = \boxed{2}$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) = 2 \Rightarrow f'(1) = 2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & ; x < 1 \\ 2 & ; x = 1 \\ 2 & ; x > 1 \end{cases}$$

ومنه

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & ; x \le 1 \\ 2 & ; x > 1 \end{cases}$$

إضافي

لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : x < 1 \\ 2\sqrt{x} & : x \ge 1 \end{cases}$ والمتصلة على مجالها

أوجد إن أمكن $f'(x)$

أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي لمنحنى الدالة $f(x) = \tan x$ عند النقطة $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

ملحوظة هامة
$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

ممكن تحسب أولاً $\cos\frac{\pi}{4}$ ثم تقلبه وتربعه

$$f'(x) = \sec^2 x$$

$$m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$m = 2$$

معادلة المماس

$$m = 2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$$

معادلة العمودى

$$\frac{-1}{m} = \frac{-1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$$

إضافي

أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي لمنحنى الدالة $f(x) = \sec x$ عند النقطة $F\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$

لتكن: $g(x) = x^{13}$ ، $f(x) = -2x^3 + 4$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(fog)(x)$ ، $(gof)'(0)$

$$\boxed{(f\circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

$f'(x) = -6x^2$ | $g'(x) = 13x^{12}$

$f'(g(x)) = -6(x^{13})^2$

$= -6x^{26}$

$(f\circ g)'(x) = -6x^{26} \cdot 13x^{12}$

$= -78x^{38}$

$(g\circ f)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0)$

$f(0) = -2(0) + 4 = 4$

$\therefore (g\circ f)'(0) = g'(4) \cdot f'(0)$

$g'(x) = 13x^{12}$ | $f'(x) = -6x^2$

$g'(4) = 13(4)^{12}$ | $f'(0) = -6(0)^2$

$= 0$

$(g\circ f)'(0) = 13(4)^{12} \times 0$

$= 0$

لتكن: $g(x) = \sqrt{x}$ ، $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(fog)'(1)$

$(f\circ g)'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1)$

$g(1) = \sqrt{1} \pm 1$

$\therefore (f\circ g)'(1) = f'(1) \cdot g'(1)$

$(x^2-4) = \boxed{2x}$

$(x^2+4)' = 2x$

$f'(x) =$

$$= \frac{(2x)(x^2+4) - (2x)(x^2-4)}{(x^2+4)^2}$$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

$$f'(1) = \frac{2(1)(1^2+4) - 2(1)(1^2-4)}{(1^2+4)^2}$$

$= \frac{16}{25}$

$(f\circ g)'(1) = \frac{16}{25} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{25}$

لتكن: $u = 2x^2 + x$ ، $f(x) = u^2 + 4u - 3$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = 2u + 4$$

$$= 2(2x^2 + x) + 4$$

$$= 4x^2 + 2x + 4$$

,

$$\frac{du}{dx} = 4x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (4x^2 + 2x + 4) \cdot (4x + 1)$$

$$= \underline{16x^3} + \underline{8x^2} + 16x + \underline{4x^2} + 2x + 4 = 16x^3 + 12x^2 + 18x + 4$$

إذا كانت $y = \sin x$ بين أن $y^{(4)} = y$

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$y'' = -\sin x$$

$$y''' = -\cos x$$

$$y^{(4)} = \sin x$$

$$\therefore \quad y^{(4)} = y$$

إضافي

لتكن $y = \cos x$ بين أن $y^{(4)} + y'' = y$

أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + \underbrace{yx}_{\text{ضرب}} - 1 = 0$ عند $(1,1)$

باستخدام الاشتقاق الضمني

$$2x - 2yy' + y'x + y = 0$$

$$-2yy' + y'x = -2x - y$$

$$y'(-2y + x) = -2x - y$$

$$y' = \frac{-2x - y}{-2y + x}$$

لايجاد الميل فعوض بالنقطة $(1,1)$

$$m = y'\big|_{(1,1)} = \frac{-2(1) - (1)}{-2(1) + (1)} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$m = 3$$

∴ ميل المماس = 3

إضافي

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$

للمنحنى الذي معادلته: $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1,1)$

باستخدام الاشتقاق الضمني

$$2yy' + \frac{y'}{2\sqrt{y}} + 2x = 0$$

$$2yy' + y' \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = -2x$$

$$y'\left(2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right) = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2y + \frac{1}{2\sqrt{y}}}$$

لإيجاد الميل نعوض بالنقطة (١ و ١)

$$m = y'|_{(1,1)} = \frac{-2(1)}{2(1) + \frac{1}{2\sqrt{1}}} = \frac{-2}{\frac{5}{2}} = -\frac{4}{5}$$

ميل المماس $= -\frac{4}{5}$

إذا كانت $y = \sqrt{1-2x}$ فأثبت أن $yy'' + (y')^2 = 0$

$$y = \sqrt{1-2x}$$

بتربيع الطرفين

$$y^2 = 1 - 2x$$

$$\frac{2yy'}{2} = \frac{-2}{2}$$

$$\underbrace{yy'}_{\text{ضرب}} = -1$$

$$y'y' + yy'' = 0$$

$$yy'' + (y')^2 = 0$$

وهو المطلوب

إضافي

للمنحنى الذي معادلته: $2\sqrt{y} + y = x$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3,1)$

إذا كانت $y = x\sin x$ فأثبت أن $y'' + y' + 2\sin x = 0$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2, 1]$

∵ الدالـــة متصلة على ___ $[-2, 1]$

∴ الدالة لها قيم قصوى مطلقة في هذه الفترة

أولاً النقاط الطرفية

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = \boxed{-1}$$

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = \boxed{-1}$$

ثانياً النقاط الحرجة

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

بوضع $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \begin{cases} 1 \notin (-2, 1) \\ -1 \in (-2, 1) \end{cases}$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = \boxed{3}$$

من أولاً وثانياً نجد أن أكبر قيمة للدالة f هي ___ 3 ∴ 3 قيمة عظمى مطلقة

أصغر قيمة الدالة f هي ___ -1 ∴ -1 قيمة صغرى مطلقة

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة f : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1, 3]$

∵ الدالة f متصلة على ___ $[1, 3]$

∴ يوجد قيم عظمى وصغرى ___ مطلقة في الفترة $[1, 3]$

أولاً النقاط الطرفية

$$f(1) = \frac{1}{1^2} = \boxed{1}$$

$$f(3) = \frac{1}{3^2} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

ثانياً النقاط الحرجة

$f(x) = x^{-2}$

$f'(x) = -2x^{-3}$

$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$$

نلاحظ أن $f'(x) \neq 0$ لأنه البسط لا يساوي صفر

$f'(x)$ غير موجودة "عندما يكون المقام يساوي صفراً"

$$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0, \quad 0 \notin (1, 3)$$

∴ لا يوجد نقاط حرجة للدالة f في الفترة $(1, 3)$

من أولاً وثانياً أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[1, 3]$ هي $1 \Leftarrow$ ∴ 1 قيمة عظمى مطلقة

أصغر قيمة الدالة f " " " هي $\frac{1}{9} \Leftarrow$ ∴ $\frac{1}{9}$ قيمة صغرى مطلقة

إضافي

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2, 3]$

بين أن الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0.4]$، ثم أوجد c الذي تفي به النظرية وفسر إجابتك.

∵ الدالة f كثيرة حدود متصلة على R

∴ الدالة f متصلة على الفترة $[0,4]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0,4)$

∴ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[0,4]$

∴ يوجد على الأقل $c \in (0,4)$ بحيث

$$f(4) = 4^3 - 3(4) + 2 = \boxed{54}$$

$$f(0) = 0^3 - 3(0) + 2 = \boxed{2}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$$

$$f'(c) = \frac{54 - 2}{4} = 13 \rightarrow ②$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(c) = 3c^2 - 3 \rightarrow ①$$

بالتعويض من ① في ②

$$3c^2 - 3 = 13$$

$$3c^2 = 13 + 3 \Rightarrow \frac{\cancel{3}c^2}{\cancel{3}} = \frac{16}{3} \Rightarrow c = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3} \begin{cases} \frac{4\sqrt{3}}{3} \in (0,4) \\ \frac{-4\sqrt{3}}{3} \notin (0,4) \end{cases}$$

التفسير يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(4,54)$ و $(0,2)$

إضافي

بين أن الدالة f : $f(x) = x^2 + 2x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3.1]$، ثم أوجد c الذي تفي به النظرية وفسر إجابتك.

لتكن الدالة f : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. أوجد كلاً مما يلي:

a) النقاط الحرجة للدالة

b) الفترات التي تكون فيها الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها

c) القيم القصوى المحلية

الدالة f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق عند كل $x \in R$

نوجد أولاً النقاط الحرجة

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

بوضع $f'(x) = 0$

$$-3x^2 + 6x = 0$$

$$-3x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad , \quad x = 2$$

$$f(0) = -4$$

$$f(2) = 0$$

∴ النقاط الحرجة هي

$(0, -4)$, $(2, 0)$

نكون الجدول

الفترات	$-\infty$	0	2 $\quad \infty$
اشارة $f'(x)$	$-$	$+$	$-$
سلوك $f(x)$	↘ تناقص	↗ تزايد	↘ تناقص

* الدالة f متزايدة على الفترة $(0, 2)$

* الدالة f متناقصة على الفترات

$(-\infty, 0)$ و $(2, \infty)$

للدالة f قيمة عظمى محلية قيمتها 0 عند $x = 2$

للدالة f قيمة صغرى محلية قيمتها -4 عند $x = 0$

إضافي

لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 12x^2 - 5$. أوجد كلاً مما يلي:

a) النقاط الحرجة للدالة

b) الفترات التي تكون فيها الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها

c) القيم القصوى المحلية

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها

① المجال الدالة f كثيرة حدود متصلة على وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

② النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^3) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$$

③ النقاط الحرجة

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

بوضع $f'(x)=0$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

$$x = 3 \qquad x = 1$$

$$f(3) = -4$$

$$f(1) = 0$$

النقاط الحرجة هي

$(1 , 0)$ ، $(3 , -4)$

④ نكون الجدول

الفترات	$-\infty$ 1	1 3	3 ∞
اشارة $f'(x)$	+	−	+
سلوك $f(x)$	↗ تزايد	↘ تناقص	↗ تزايد

- الدالة f متزايدة على الفترات $(-\infty , 1)$ و $(3 , \infty)$
- الدالة f متناقصة على الفترة $(1 , 3)$

للدالة f قيمة عظمى محلية عند $x = 1$ وقيمة صغرى محلية عند $x = 3$

$$f''(x) = 6x - 12$$

بوضع $f''(x)=0$

$$6x - 12 = 0 \Rightarrow 6x = 12$$

$$x = 2 \Rightarrow \boxed{f(2) = 2}$$

⑤ نقطة الانعطاف هي $(2 , -2)$

الفترات	$-\infty$ 2	2 ∞
اشارة $f''(x)$	−	+
بيان $f(x)$	∩	∪

منحنى الدالة f مقعر لأعلى على الفترة $(2 , \infty)$

منحنى الدالة f مقعر لأسفل على الفترة $(-\infty , 2)$

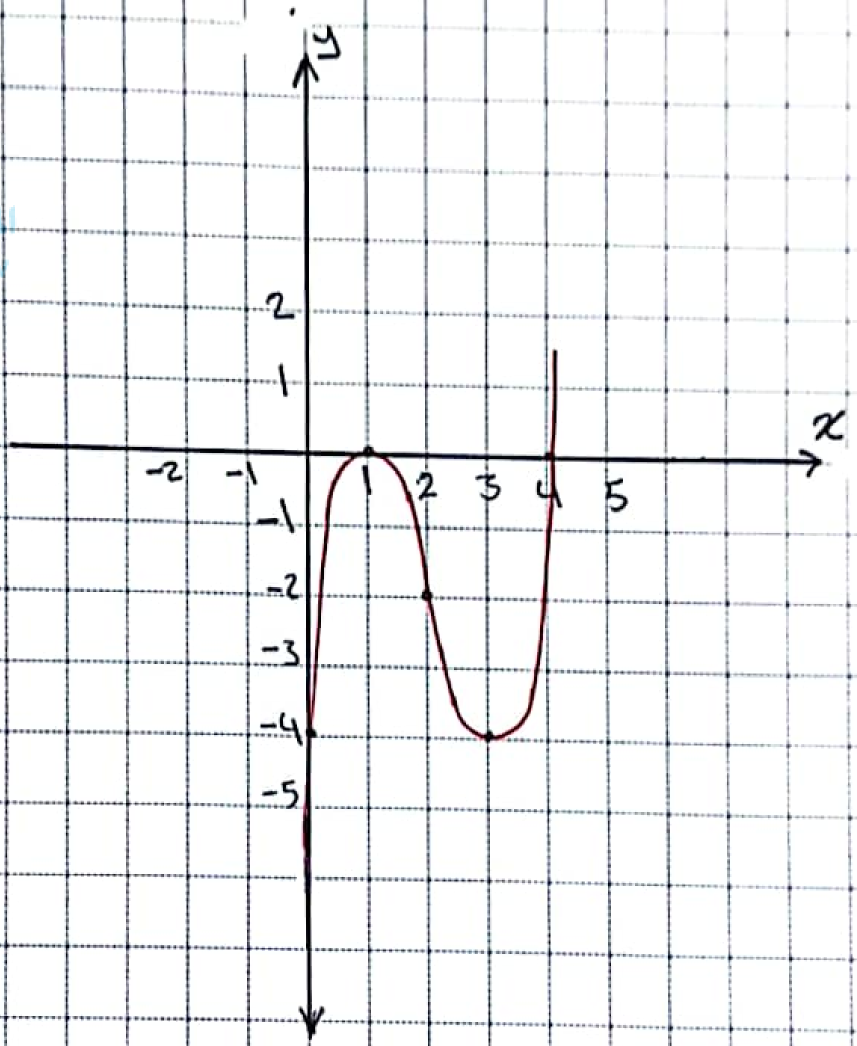
إضافي

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها

⑥ نقاط اضافية

صفحة بيانية

x	0	1	2	3	4
y	-4	0	-2	-4	0



ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها

* الدالة f كثيرة حدود مجالها R متصلة على R وقابلة للاشتقاق على R

* النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x)) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (-x^3) = -\infty$$

*نوجد النقاط الحرجة

$$f'(x) = -3x^2$$

نضع $f'(x)=0$

$$-3x^2 = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

∴ (٠،١) نقطة حرجة

* نكون الجدول

0 ∞	$-\infty$ 0	الفترات
$-$	$-$	اشارة $f'(x)$
↘ تناقص	↘ تناقص	سلوك $f(x)$

الدالة f متناقصة على الفترات (∞،٠) و (٠،∞-)

لا توجد نقاط محلية عظمى أو صغرى محلية

$$f''(x) = -6x$$

نضع $f''(x)=0$

$$-6x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

0 ∞	$-\infty$ 0	
$-$	$+$	اشارة $f''(x)$
∩ تقعر لأسفل	∪ تقعر لأعلى	بيان $f(x)$

منحنى الدالة f مقعر لأعلى على (٠،∞-)

منحنى الدالة f مقعر لأسفل على (∞،٠)

(٠،١) نقطة انعطاف

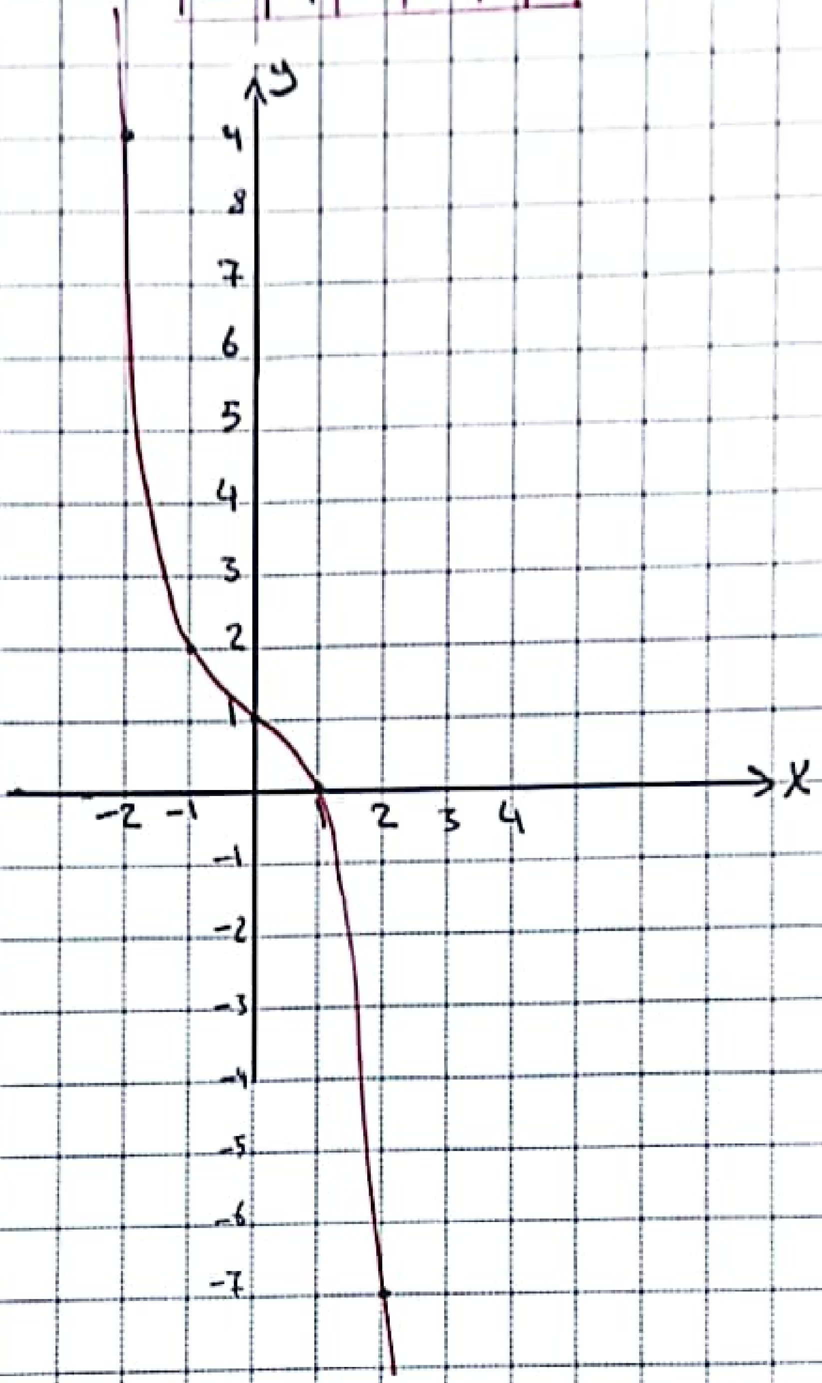
إضافي

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها

ملحة بيانيا

نقاط اضافية

x	-2	-1	0	1	2
ص	9	2	1	0	-7



تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h.

a) أوجد الارتفاع $h(cm)$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

b) ما قيمة هذا الحجم؟

$$V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h) \quad , \quad h \in (0,\infty)$$

$$V'(h) = 2\pi(-3h^2 + 36)$$

بوضع $V'(h) = 0$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow -3h^2 + 36 = 0$$

$$\frac{\cancel{-3}h^2}{\cancel{-3}} = \frac{-36}{-3} \Rightarrow h^2 = 12 \Rightarrow h = \pm 2\sqrt{3}$$

$$h = -2\sqrt{3} \notin (0,\infty)$$

$$h = 2\sqrt{3} \in (0,\infty)$$

اختبار المشتقة الثانية

$$V''(h) = 2\pi(-6h)$$

$$V''(2\sqrt{3}) = 2\pi(-6(2\sqrt{3}))$$

$$\approx -130.6 < 0$$

∴ قيمة $h = 2\sqrt{3}$ هي قيمة عظمى مطلقة

∴ أكبر حجم للأسطوانة عند $h = 2\sqrt{3}$ cm

ويكون الحجم

$$V(2\sqrt{3}) = 2\pi\left(-(2\sqrt{3})^3 + 36(2\sqrt{3})\right) \simeq 522.37 \text{ cm}^3$$

إضافي

أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها 8m ، واحداً منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعاً.

أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الاناث 25 والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 18.4$. باستخدام مستوى ثقة 95 %

1- أوجد هامش الخطأ.

2- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3- فسر فترة الثقة.

$\sigma = 3.6$, $\bar{X} = 18.4$ $n = 25$

① ∵ مستوى الثقة 95%

∴ القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

∵ σ معلومة يكون هامش الخطأ

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{3.6}{\sqrt{25}} = 1.4112$$

② فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

$$(\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (18.4 - 1.4112, 18.4 + 1.4112)$$

$$= (16.99 , 19.81)$$

③ التفسير

عند اختيار 100 عينة عشوائية حجم كل منها n=25 وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحتوي على القيمة الحقيقية لـ μ.

إضافي

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ وبمتوسط حسابي $\bar{x} = 50$

و الانحراف المعياري $S = 9$ باستخدام مستوى الثقة 95%.

a) أوجد هامش الخطأ.

b) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ، علما بأن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.

إذا كان لدينا $\bar{x} = 8.4$, $s = 0.3$, $n = 13$

∵ σ غير معلومة ، n ≤ ٥

∴ نستخدم توزيع t

درجات الحرية $n-1 = 13-1 = 12$

∵ مستوى الثقة $1-\alpha = 0.95$

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

من جدول التوزيع t نجد أن

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.179$$

هامش الخطأ

$$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.179 \times \frac{0.3}{\sqrt{13}} \simeq 0.1813$$

∴ فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ.

$$(\bar{x}-E, \bar{x}+E) = (8.4 - 0.1813, 8.4 + 0.1813)$$

$$= (8.2187, 8.5813)$$

بيّنت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو **1800 kg** = μ مع انحراف معياري **150 kg** = σ. ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الاسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك و تأكيدًا على نلك تمّ اختبار عينة من 40 سلكًا. فتبيّن أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي **1840 kg**

هل يمكن قبول مثل هذا اللرض بمستوى معنوية **0.05** = α؟

① صياغة الفروض

فرض العدم $H_0: \mu = 1800$ مقابل فرض البديل $H_1: \mu \neq 1800$

② المقياس الإحصائي ∵ σ معلومة نستخدم المقياس

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1840 - 1800}{\frac{150}{\sqrt{40}}} \simeq 1.686$$

③ مستوى الثقة ∵ 95%

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

④ منطقة القبول $(-1.96, 1.96)$

⑤ القرار $(-1.96, 1.96) \in 1.686$ ∵

∴ القرار قبول فرض العدم $\mu = 1800$

إضافي

متوسط العمر بالساعات لعينة من **100** مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع **1570** = $\bar{x}$ بانحراف معياري **120** = S. يقول صاحب المصنع إنّ متوسط العمر بالساعات المصنع **1600** = μ للمصابيح المصنعة في

اختبر صحة اللرض **1600** = μ مقابل اللرض **1600** ≠ μ وباختيار مستوى المعنوية **0.05** = α

يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 دينارًا كويتيًا. فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل تبين أن متوسطها الحسابي (دينار) $\bar{x} = 283$ و الانحراف المعياري $S = 32$ فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟

استخدم مستوى ثقة 95 % (علمًا بأن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًا)

① صياغة الفروض

فرض العدم $H_0: \mu = 290$ مقابل الفرض البديل $H_1: \mu \neq 290$

② المقياس الإحصائي

∵ σ غير معلومة ، $n \leq 30$ ∴ نستخدم المقياس t

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{283 - 290}{\frac{32}{\sqrt{10}}} \approx -0.6917$$

③ $n = 10$ ∴ درجات الحرية $n - 1 = 10 - 1 = 9$

مستوى الثقة 95% $1 - \alpha = 0.95$

$\alpha = 0.05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

من جدول التوزيع t

$t_{0.025} = 2.262$

④ منطقة القبول

$(-2.262, 2.262)$

⑤ القرار

∵ $-0.6917 \in (-2.262, 2.262)$

∴ القرار هو قبول فرض العدم $\mu = 290$