المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) $\lim_{t\to-4^-} g(t)=5$ (b) $\lim_{t\to-4^+} g(t)=2$ (c) $\lim_{t\to-4} g(t)$ غير موجودة

لأنّ النهايتين من جهة اليمين وجهة اليسار مختلفتان.

(d) $g(-4)=2$

(2) (a) $\lim_{h\to0^-} f(h)=-4$ (b) $\lim_{h\to0^+} f(h)=-4$

(c) $\lim_{h\to0} f(h)=-4$ (d) $f(0)=-4$

(3) (a) 6 (b) 0

(c) 9 (d) −3

(4) $\lim_{x\to-\frac{1}{2}} (3x^2(2x-1)) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right] = 3\left(\frac{1}{4}\right)(-2) = -\frac{3}{2}$

(5) $\lim_{y\to-3} \frac{y^2+4y+3}{y^2-3} = \frac{(-3)^2+4(-3)+3}{(-3)^2-3} = \frac{0}{6} = 0$

(6) $\lim_{x\to-4} (x+3)^{1998} = (-4+3)^{1998} = (-1)^{1998} = 1$

(7) $\lim_{x\to3} \sqrt{x-2} = \sqrt{3-2} = 1$

(8) $\lim_{x\to2^-} f(x)=1$, $\lim_{x\to2^+} f(x)=1$ $\therefore \lim_{x\to2} f(x)=1$

(9) (a) $\lim_{x\to1^-} f(x)=0$, $\lim_{x\to1^+} f(x)=1$ $\therefore \lim_{x\to1} f(x)$ غير موجودة

(b) $\lim_{x\to2^-} f(x)=1$

(10) (a) $\lim_{x\to1^-} f(x)=3$, $\lim_{x\to1^+} f(x)=2$ $\therefore \lim_{x\to1} f(x)$ غير موجودة

(b) $\lim_{x\to2} f(x)=2$

(11) $\lim_{x\to0} \frac{(4+x)^2-16}{x} = \lim_{x\to0} (x+8) = 8$

(12) $\lim_{t\to2} \frac{t-1}{t+2} = \frac{1}{4}$

(13) $\lim_{x\to0} \frac{(3+x)^3-27}{x} = \lim_{x\to0} ((3+x)^2+3(3+x)+9) = 27$

(14) $\lim_{x\to-2^-} \frac{|x+2|}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to-2^-} \frac{-1}{x+1} = 1$; $\lim_{x\to-2^+} \frac{|x+2|}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to-2^+} \frac{1}{x+1} = -1$

(15) $\lim_{x\to3} \frac{x^2+7-16}{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)} = \lim_{x\to3} \frac{x+3}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)} = \frac{3}{8}$

(16) $\lim_{x\to-3} \frac{(x+3)\left(\sqrt[3]{(9x)^2}-3\sqrt[3]{9x}+9\right)}{\left(\sqrt[3]{9x}+3\right)\left(\sqrt[3]{(9x)^2}-3\sqrt[3]{9x}+9\right)} = \lim_{x\to-3} \frac{(x+3)\left(\sqrt[3]{(9x)^2}-3\sqrt[3]{9x}+9\right)}{9(x+3)} = 3$

(17) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3-3x^2-7x+6}{x+2} = \lim_{x\to -2}(x^2-5x+3) = 17$

(18) $\lim_{x\to 3} \frac{(x^2-9)(x^2+2)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3)(x^2+2) = 66$

(19) $\lim_{x\to 2}(4x^2+3x+6) = 28$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (a)	**(3)** (b)	**(4)** (a)	**(5)** (a)
(6) (a)	**(7)** (d)	**(8)** (c)	**(9)** (d)	**(10)** (c)
(11) (c)	**(12)** (d)	**(13)** (a)	**(14)** (a)	

نهايات تشتمل على ∞، −∞   تمرَّنْ 2–1

المجموعة A تمارين مقالية

(1) 0   (2) 0   (3) $\frac{1}{2}$

(4) $(2-1)\times 1 = 1$ (5) ∞ (6) ∞

(7) $-\infty$

(8) $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^8}} = \infty$

(9) (a) $x=0$, $x=-\frac{5}{2}$ $y=\frac{3}{2}$

(10) (a) $x=1$, $x=-\frac{5}{2}$ $y=0$

(11) (a) $x=0$, $x=-1$ $y=4$

(12) (a) $x=\frac{1}{2}$, $x=2$ $y=0$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (a)	**(3)** (a)	**(4)** (b)
(5) (b)	**(6)** (b)	**(7)** (c)	**(8)** (d)
(9) (b)	**(10)** (b)	**(11)** (d)	**(12)** (a)
(13) (c)	**(14)** (d)		

المجموعة A تمارين مقالية

(1) ∞ **(2)** $-\infty$ **(3)** $-\infty$ **(4)** ∞ **(5)** -2

(6) $-\frac{2}{5}$ **(7)** 0 **(8)** 0 **(9)** 1 **(10)** -1

(11) $= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)$

$= \lim_{x\to 1}\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}$

$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

(12) $= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)$

$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=1$

(13) $= \lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{x-2}-\frac{4x}{(x-2)(x+2)}\right)$

$= \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)x-4x}{(x-2)(x+2)}$

$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{(x-2)(x+2)}$

$= \lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$= \lim_{x\to 2}\frac{x}{(x+2)}=\frac{1}{2}$

(14) $a=0$, $\frac{b}{3}=-1 \Longrightarrow b=-3$

(15) $a=0$, $\frac{2}{b}=-1 \Longrightarrow b=-2$

(16) $\frac{3}{\sqrt{a}}=2 \Longrightarrow a=\frac{9}{4}$

(17) $a=0$, $\frac{b}{-2}=-1 \Longrightarrow b=2$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) **(2)** (b) **(3)** (a) **(4)** (a)

(5) (a) **(6)** (b) **(7)** (c) **(8)** (b)

(9) (d) **(10)** (a) **(11)** (a)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\frac{5}{3}$

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = 0$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2}$

(4) $\frac{0}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x - \cos x} = -1$

(6) -2

(7) 5

(8) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$

(9) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x} = 2$

(10) $\frac{4}{7}$

(11) $\frac{3}{2}$ (12) 1 (13) 3 (14) $\frac{3}{2}$ (15) 2

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) (2) (b) (3) (b) (4) (a) (5) (b)

(6) (a) (7) (c) (8) (d) (9) (a) (10) (b)

المجموعة A تمارين مقالية

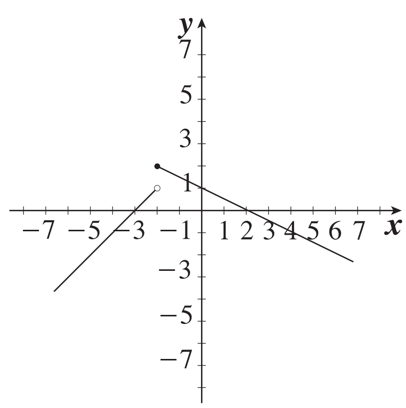
(1) $x = 0$ لا تنتمي إلى المجال، إذًا f غير متصلة عند $x = 0$.

(2) $f(1) = 1$, $\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \neq 1$ — f غير متصلة عند $x = 1$

(3) $f(2) = 0$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$ — f متصلة عند $x = 2$

(4) لا، لأن النهاية لجهة اليمين لا تساوي النهاية لجهة اليسار عند النقطة صفر.

(5) إجابة ممكنة:



(6) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 5$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 5$

إذاً الدالة f متصلة عند $x = 0$

(7) $h(-1) = -1$

$\lim_{x\to -1} h(x) = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-4)}{x+1} = -5$

$\because \lim_{x\to -1} h(x) \neq h(-1)$

$\therefore$ الدالة h ليست متصلة عند $x = -1$

(8) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x-3)}{-x} = 3$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x-3)}{x} = -3 = f(0)$

إذاً الدالة f ليست متصلة عند $x = 0$. (f متصلة جهة اليمين عند $x = 0$).

(9) $g(1) = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x)$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

إذاً الدالة متصلة عند $x = -1$.

(10) نحتاج إلى $f(3) = \lim_{x\to 3^+} (2ax) = \lim_{x\to 3^-} (x^2 - 1)$

$2a(3) = 3^2 - 1$

$6a = 8$

$a = \frac{4}{3}$

(11) الدالة $y = \frac{x-1}{x^2-4x+3}$ هي $y = \frac{x-1}{(x-1)(x-3)}$، وهي متصلة على مجالها لأنها دالة نسبية، وتقع نقاط انفصالها حيث هي غير معرفة. المقام $(x-1)(x-3) = x^2-4x+3$ يساوي صفرًا عند $x = 1$، $x = 3$.

هناك انفصال لا يمكن التخلص منه عند $x = 3$ وانفصال يمكن التخلص منه بإعادة تعريف الدالة عند $x = 1$

(12) الدالة $y = \sqrt[3]{2x-1}$ هي دالة متصلة على مجالها $(-\infty, \infty)$، لا يوجد نقاط انفصال.

(13) $x = -1$، يمكن التخلص من الانفصال بجعل $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1) = 0$

(14) لِـ $x \neq -3$ ، $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = x-3$ ، فالدالة هي: $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & , \quad x \neq -3 \\ -6 & , \quad x = -3 \end{cases}$

(15) حيث $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4 \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4(1) = 4$ ، الدالة هي: $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 4 & , \quad x = 0 \end{cases}$

(16) $\begin{cases} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} & , \quad x \neq 4 \\ 4 & , \quad x = 4 \end{cases}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (a)	**(3)** (a)	**(4)** (a)	**(5)** (c)
(6) (a)	**(7)** (d)	**(8)** (d)	**(9)** (b)	**(10)** (a)
(11) (a)	**(12)** (d)	**(13)** (d)	**(14)** (b)	**(15)** (c)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) f متصلة عند $x = 2$

(2) g : $g(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ دالة حدودية نسبية متصلة عند $x = -1$

h : $h(x) = \frac{3}{x}$ دالة حدودية نسبية متصلة عند $x = -1$

$\therefore$ دالة الطرح f متصلة عند $x = -1$

(3) g : $g(x) = x^2 + 3x$ متصلة عند $x = 3$

h : $h(x) = |x|$ متصلة عند $x = 3$

$\therefore$ $f(x) = g(x) + h(x)$ متصلة عند $x = 3$

(4) الدالة g : $g(x) = \sqrt[3]{x}$ دالة جذرية متصلة عند $x = -1$

الدالة h : $g(x) = x^2 + 1$ دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = -1$

$g(-1) = 2 \ , \ 2 \neq 0$

$\therefore$ دالة ناتج القسمة f متصلة عند $x = -1$

(5) نفرض أن $g(x) = x^2 + 5x + 4$

g دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = -5$

$g(-5) = 4 \ , \ 4 > 0$ $\quad \therefore$ $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x = -5$

(6) **(a)** $(g \circ f)(x) = g(-x+2) = (-x+2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$ **(b)** $(g \circ f)(-1) = 6$

(c) $(f \circ g)(x) = f(x^2-3) = -x^2 + 5$ **(d)** $(f \circ g)(-1) = 4$

(9) f دالة كثيرة حدود $\therefore$ f متصلة عند $x=-2$

$f(-2)=5 \Longleftarrow g$ متصلة عند $x=5$

$\therefore$ $g\circ f$ متصلة عند $x=-2$

(10) نفرض أن: $h(x)=|x|$, $g(x)=\sqrt{x}-3$

حيث $f(x)=(h\circ g)=h(g(x))$

$=h(\sqrt{x}-3)$

$=|\sqrt{x}-3|$

نفرض أن: $g(x)=g_1(x)-g_2(x)$

حيث $g_2(x)=3$, $g_1(x)=\sqrt{x}$

g_1 متصلة عند $x=4$

g_2 دالة ثابتة متصلة عند $x=4$

الدالة $g(x)=g_1(x)-g_2(x)$ متصلة عند $x=4$ (1)

$g(4)=\sqrt{4}-3=-1$

h دالة مطلق x متصلة عند $x=-1$ (2)

من (1)، (2) نجد أن: الدالة f متصلة عند $x=4$

(11) نفرض أن $h(x)=|x-3|$ ، $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ حيث $g(x)=f(x)-h(x)$

لتكن $f(x)=\sqrt{f_1(x)}$ حيث $f_1(x)=x^2+1$

f_1 متصلة عند $x=3$ ، $f_1(3)=9+1=10>0$

$\therefore$ f متصلة عند $x=3$ (1)

لتكن: $h_1(x)=x-3$ ، $h_2(x)=|x|$

$\therefore\ h(x)=(h_2\circ h_1)(x)\ =h_2(h_1(x))\ =h_2(x-3)\ =|x-3|$

h_1 متصلة عند $x=3$ ، $h_1(3)=0$

h_2 متصلة عند $x=0$

$\therefore$ h متصلة عند $x=3$ (2)

من (2)، (1) نجد أن g دالة متصلة عند $x=3$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (a)	**(5)** (a)	**(6)** (d)
(7) (a)	**(8)** (c)	**(9)** (d)	**(10)** (a)	**(11)** (d)	**(12)** (a)

الاتّصال على فترة — تمرّنْ 7–1

المجموعة A تمارين مقالية

(1) f دالة كثيرة حدود متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$ $\therefore$ f متصلة على $[-2\ ,\ 5]$

(2) f دالة حدودية نسبية متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$ $\therefore$ f متصلة على $[1\ ,\ 3]$

(3) f غير متصلة عند $x=3$ $\therefore$ f متصلة على الفترة $[0\ ,\ 3)$ والفترة $(3\ ,\ 5]$

(4) f غير متصلة عند $x=1$ ، $x=4$ $\therefore$ f متصلة على كل من الفترات $[4\,,\,6]$ ، $(1\,,\,4)$ ، $[-2\,,\,1)$

(5) f متصلة على $(-3\,,\,4)$، $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=-12\neq f(4)$ ، $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=-5=f(-3)$

$\therefore$ f متصلة على $[-3\,,\,4)$

(6) $f(7)=-3$, $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x)=-3$, $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x)=-3$

$\therefore$ f متصلة عند $x=7$

و f متصلة على كل من الفترتين $(-\infty\,,\,7)$ ، $(7\,,\infty)$ $\therefore$ f متصلة على $\mathbb{R}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=3=f(0)$

$\therefore$ f متصلة على كل من $(0,\infty)$،$(-\infty,0]$.

(8) f متصلة على كل من الفترات $(4\,,\,\infty)$ ، $(-2\,,\,4)$ ، $(-\infty\,,\,-2)$

$f(-2)=-9$, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-9$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-9$

$\therefore$ f متصلة عند $x=-2$.

$f(4)=9$, $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=-3$, $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=9$

$\therefore$ f متصلة عند $x=4$ لجهة اليمين.

$\therefore$ f متصلة على كل من $[4,\infty)$،$(-\infty,4)$.

(9) f متصلة على كل من الفترات $(1\,,\,\infty)$ ، $(-4\,,\,1)$ ، $(-\infty\,,\,-4)$

$f(-4)=-2$, $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)=-2$

$\therefore$ f متصلة عند $x=-4$.

$f(1)=-2$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-2$

$\therefore$ f متصلة عند $x=1$

$\therefore$ f متصلة على $(-\infty,\infty)$

(10) $f(1)=b$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3+a$

$\therefore\ a=-3\ ,\ b=0$

(11) $f(-2)=\dfrac{4-a}{-2-b}$, $\lim\limits_{x\to (-2)^-} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to (-2)^+} f(x)=\dfrac{4-a}{-2-b}$

$f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\dfrac{1-a}{1-b}$

$\therefore\ \dfrac{4-a}{-2-b}=4\quad ,\quad \dfrac{1-a}{1-b}=1$

$\therefore\ a=b=-4$

(12) $D_f=[-1\,,\,6]$

لتكن g : $g(x)=-x^2+5x+6$ $\quad g(x)>0$ لكل $x\in[0\,,\,4]$

$\therefore$ f متصلة على $[0\,,\,4]$

(13) $D_f=[-2\,,\,2]$ $\quad f$ متصلة على مجالها.

(14) $D_f=(-\infty\,,\,-1]\cup[1\,,\,\infty)$

f متصلة على كل من الفترتين $[1\,,\,\infty)$ ، $(-\infty\,,\,-1]$.

(15) f متصلة لكل قيم $x\in\mathbb{R}$

(16) g متصلة لكل قيم $x\in\mathbb{R}$ حيث $g(x)=3x^2+4x-1$ $\therefore$ f حيث $f(x)=|g(x)|$ متصلة لكل قيم $x\in\mathbb{R}$.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (a) **(3)** (b) **(4)** (b)

(5) (b) **(6)** (c) **(7)** (c) **(8)** (b)

(9) (d) **(10)** (c) **(11)** (a)

اختبار الوحدة الأولى

(1) $\lim\limits_{x\to-2}(x^3-2x^2+1)=(-2)^3-2(-2)^2+1=-15$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{3x^2-2x+5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$

(3) $\lim\limits_{x\to-4}\sqrt{1-2x}=3$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-(2+x)}{2x(2+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x}{2x(2+x)}=\lim\limits_{x\to0}\left(-\dfrac{1}{2(2+x)}\right)=-\dfrac{1}{2(2+0)}=-\dfrac{1}{4}$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{4x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=\dfrac{1}{2}(1)=\dfrac{1}{2}$

(6) اضرب البسط والمقام بـ $\sin x$.

$$\lim_{x\to0}\frac{x\csc x+1}{x\csc x}=\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$=\left(\lim_{x\to0}1\right)+\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right)=1+1=2$$

(7) $\lim\limits_{x\to1}|x-2|+2x=\lim\limits_{x\to1}(-x+2+2x)=3$

(8) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{9-x}-2}{x-5}\times\dfrac{\sqrt{9-x}+2}{\sqrt{9-x}+2}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{-1}{\sqrt{9-x}+2}=-\dfrac{1}{4}$

(9) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}\times\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}=\dfrac{1}{3}$

(10) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-7x+12}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x-5)}{(x-3)(x-4)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-5}{x-4}=2$

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)}=\dfrac{1+0}{1+0}=1$

(12) **(a)** f غير معرّفة عند $x=-2$ ، $x=2$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x=-2$ ، $x=2$.

(b) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4} & , \quad x\neq 2 \quad , \quad x\neq -2\\[2mm] -\dfrac{1}{4} & , \quad x=2\end{cases}$

(13) $x = -2$

(14) $x = -2 \quad , \quad x = 0$

(15) (a) عند $x = -1$

النهاية لجهة اليسار: $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (1) = 1$

النهاية لجهة اليمين: $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (-x) = 1$

$\therefore \lim_{x \to -1} f(x) = 1$

عند $x = 0$

النهاية لجهة اليسار: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$

النهاية لجهة اليمين: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

عند $x = 1$

النهاية لجهة اليسار: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (-x) = -1$

النهاية لجهة اليمين: $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (1) = 1$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x)$ غير موجودة

(b) عند $x = -1$: متصلة لأن النهاية تساوي $f(-1)$

عند $x = 0$، غير متصلة لأن النهاية لا تساوي $f(0)$

عند $x = 1$، غير متصلة لأن النهاية غير موجودة.

(16) $x = -2 \quad , \quad x = 2$

(17) لا وجود لنقاط عدم اتصال.

(18) $y = 0 \quad , \quad x = 1$

(19) $y = 2 \quad , \quad x = -2 \quad , \quad x = 0$

(20) $\frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+5)}{x-3} = x + 5 \quad ; \quad k = 8$

(21) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{2} \quad ; \quad k = \frac{1}{2}$

(22) (a) $(g \circ f)(x) = x^2$

(b) $(g \circ f)(0) = 0$

(c) $(f \circ g)(x) = \sqrt{(x^2 - 5)^2 + 5} \quad , \quad (f \circ g)(0) = \sqrt{30}$

(23) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 1$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 2$

f غير معرّفة عند $x = 15$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x = 15$

f متصلة على كل من الفترتين: $(15\ ,\ \infty)\ ,\ (-\infty\ ,\ 15)$

تمارين إثرائية

(1) f معرفة عند $x = 2$، إذًا $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = \sqrt{3(2)-2} = 2$

(2) (a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0\ ,\ \lim\limits_{x\to 0} (f\cdot g)(x) = 1$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0\ ,\ \lim\limits_{x\to 0} (f\cdot g)(x) = -8$

(c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0\ ,\ \lim\limits_{x\to 2} (f\cdot g)(x) = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 3} g(x)$ غير موجودة

$\lim\limits_{x\to 3} (f\cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to 3} = \dfrac{5}{x-3} = -\infty\ ;\ \lim\limits_{x\to 3^+} (f\cdot g)(x) = \infty$

(3) لنفرض أن هذا غير صحيح. فتكون f سالبة في مكان ما من الفترة وموجبة في مكان آخر. وبنظرية القيمة المتوسطة يكون للدالة f صفرًا في مكان ما من هذه الفترة وهذا ما لا يتلاءم مع المعطيات.

(4) بما أن الدالة f هي متصلة، باستخدام نظرية الاتصال فإن الدالة المركبة لدالة متصلة هي متصلة فتكون بذلك $|f|$ متصلة.

(5) (a) النهاية لجهة اليسار: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} |x^3 - 4x| = |(1)^3 - 4(1)| = |-3| = 3$

النهاية لجهة اليمين: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 - 2x - 2) = (1)^2 - 2(1) - 2 = -3$

(b) كلّا، لأن النهايتين من كل جهة مختلفتان.

(c) كلّا.

(6) (a) $3x - 4 \geqslant -\frac{1}{2}\ ;\ x \geqslant \frac{7}{6}\ ,\ D_{f\circ g} = \left[\frac{7}{6}\ ,\ \infty\right)\ ,\ D_{g\circ f} = \left[-\frac{1}{2}\ ,\ \infty\right)$

(b) $(f\circ g)(x) = \sqrt{2(3x-4)+1} = \sqrt{6x-7}\ ,\ (g\circ f)(x) = 3\sqrt{2x+1} - 4$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} (f\circ g)(x) = \infty\ ,\ \lim\limits_{x\to\infty} (g\circ f)(x) = \infty$

(7) نقاط الانفصال $-2\ ,\ 2$. لا يمكن التخلص من هذا الانفصال لأن $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$ كذلك $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \pm\infty$.

(8) (a) فترة الانفصال: $[-2\ ,\ 2]$

(b) المقارب الأفقي: $y = 1$

المقاربات الرأسية: $x = -2\ ,\ x = 2$

(9) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(4) = 5$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 4$

$f(18) = \dfrac{333}{5} = \lim\limits_{x\to 18^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 18^+} f(x) = -36$

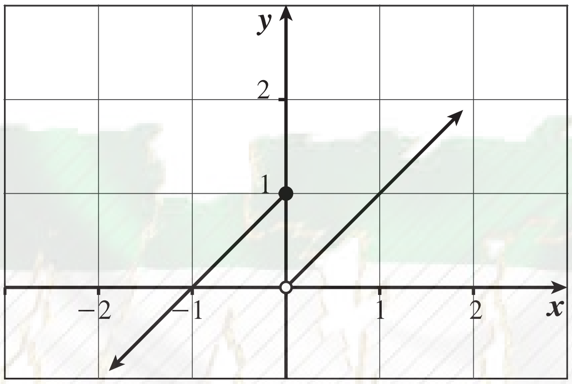
$\therefore$ f غير متصلة عند $x = 18$

$\therefore$ f متصلة على $(-\infty , 18]$, $(18 , \infty)$

(10) -4 (11) 0 (12) $3x^2$

(13) $\frac{1}{2}$ (14) 0 (15) ∞

(16) (a)



(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

(17) (a) $x = -2$, لا يمكن التخلص منه

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 1$

عند $x = 0$ انفصال لا يمكن التخلص منه.

(c) $x = 2$, $x = 3$

يمكن التخلص من الانفصال عند $x = 2$.

عند $x = 3$ انفصال لا يمكن التخلص منه.

(d) $x = 1$, $x = -1$

يمكن التخلص من الانفصال عند $x = 1$

عند $x = -1$ انفصال لا يمكن التخلص منه.

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+h}-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{1+h}=-1$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-4(1+h)+3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h-2)}{h}=-2$

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{2+h+2}{2+h-3}+4}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5h}{h(h-1)}=-5$

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4-(1+h)^2-3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(-2-h)}{h}=-2$

(5) (a) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\frac{2}{a+h}-\frac{2}{a}}{h}=\dfrac{-2h}{ah(a+h)}=\dfrac{-2}{a(a+h)}$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2}{a(a+h)}=\dfrac{-2}{a^2}$

(b) يتغير المماس ولكن يبقى ميله سالبًا مهما كانت قيمة a.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (a) **(3)** (b) **(4)** (b) **(5)** (a)

(6) (b) **(7)** (c) **(8)** (b) **(9)** (c)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{3}{3+h}-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{h(3+h)}=-\dfrac{1}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=6$

(3) $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x+1)=3$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$

$\because\ f'_-(1)\neq f'_+(1)$

$\therefore$ ليس للدالة f مشتقة عند $x=1$.

(4) $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}=4$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4x-1-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4(x-1)}{x-1}=4$

$\because\ f'_-(1)=f'_+(1)$

$\therefore$ f قابلة للاشتقاق عند $x=1$ و $f'(1)=4$.

(5) $\lim\limits_{x\to3}f(x)=|3-3|=0\ ;\ f(3)=0$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=3$.

$f'_+(3)=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x-3-0}{x-3}=1$

$f'_-(3)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{-x+3-0}{x-3}=-1$

$\because\ f'_-(3)\neq f'_+(3)$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x=3$.

(6) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0\ ;\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=2$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x=0$ وبالتالي f غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$.

(7) $g'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(x+1)^2-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x(x+2)}{x}=2$

$g'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x+1-1}{x}=2$

$\therefore\ g'(0)=2$

(8) $f'_-(2)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}(x+2)=4$

$f'_+(2)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{4x-4-4}{x-2}=4$

$\therefore\ f'(2)=4$

(9) $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+x+1)=3$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3x+k-1}{x-1}$

$\because$ f قابلة للاشتقاق عند $x=1$.

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3x+k-1}{x-1}=3$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3\left(x+\frac{k-1}{3}\right)}{x-1}=3\ ;\ \dfrac{k-1}{3}=-1\ ;\ k=-2$

(10) (a) $f(1) = a + b$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \quad ; \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = a + b$

$\therefore \; a + b = 2 \qquad (1)$

(b) $2a + b = -1 \qquad (2)$

من (1) و(2) نحصل على: $b = 5 \;,\; a = -3$.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (b)
(5) (b)	**(6)** (b)	**(7)** (b)	**(8)** (a)
(9) (d)	**(10)** (a)	**(11)** (d)	**(12)** (b)

قواعد الاشتقاق   تمرّنْ 3–2

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right) - \frac{d}{dx}(x) = x^2 - 1$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(1) = 2 + 0 = 2$

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) - \frac{d}{dx}(7x^3) + \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(15)$

$= 4x^3 - 21x^2 + 4x + 0 = 4x^3 - 21x^2 + 4x$

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4x^{-2}) - \frac{d}{dx}(8x) + \frac{d}{dx}(1)$

$= -8x^{-3} - 8 + 0 = -8x^{-3} - 8$

(5) $f'(x) = (2x - 5)(x^3 + 2x^2 + 1) + (3x^2 + 4x)(x^2 - 5x + 6)$

$= 5x^4 - 12x^3 - 12x^2 + 26x - 5$

(6) $f(x) = 10x^5 - 2x^7 + 20 - 4x^2$

$f'(x) = 50x^4 - 14x^6 - 8x$

(7) (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + 3}{x}\right) = \frac{x\frac{d}{dx}(x^2 + 3) - (x^2 + 3)\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$

$= \frac{x(2x) - (x^2 + 3)}{x^2} = \frac{x^2 - 3}{x^2}$

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+3}{x}\right) = \frac{d}{dx}(x + 3x^{-1}) = 1 - 3x^{-2} = 1 - \frac{3}{x^2}$

متكافئة مع إجابة السؤال **(a)**.

(8) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1-x^3}\right) = \frac{(1-x^3)(2x) - x^2(-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \frac{x^4+2x}{(1-x^3)^2}$

(9) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) = \frac{(\sqrt{x}+1)\frac{1}{2\sqrt{x}} - (\sqrt{x}-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}$

$= \frac{(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$

(10) (a) عند $x = 0$ ؛ $\frac{d}{dx}(uv) = u(0)v'(0) + v(0)u'(0) = (5)(2) + (-1)(-3) = 13$

(b) عند $x = 0$ ؛ $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(0)u'(0) - u(0)v'(0)}{[v(0)]^2} = \frac{(-1)(-3) - (5)(2)}{(-1)^2} = -7$

(c) عند $x = 0$ ؛ $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{u(0)v'(0) - v(0)u'(0)}{[u(0)]^2} = \frac{(5)(2) - (-1)(-3)}{(5)^2} = \frac{7}{25}$

(d) عند $x = 0$ ؛ $\frac{d}{dx}(7v - 2u) = 7v'(0) - 2u'(0) = 7(2) - 2(-3) = 20$

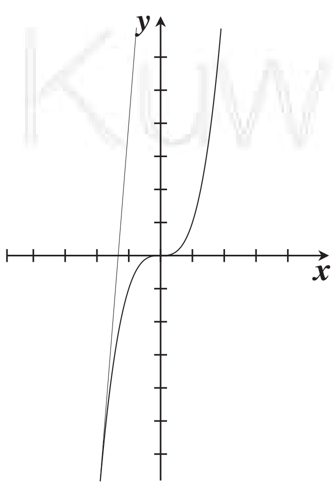
(11) $f'(x) = 3x^2 + 1$; $f'(1) = 4$; $y = 4x - 2$

(12) $y'(x) = 3x^2$

$y'(-2) = 12$

ميل خط المماس 12 ويمر هذا الخط عبر $(-2 , -8)$، معادلته هي:

$y = 12(x+2) - 8$ أو $y = 12x + 16$ التقاطع مع محور السينات



هو $-\frac{4}{3}$ والتقاطع مع محور الصادات هو 16.

(13) $f'(x) = \frac{-16x}{(4+x^2)^2}$; $f'(2) = \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2}$

معادلة المماس: $y = -\frac{1}{2}x + 2$

معادلة الناظم: $y = 2x - 3$

(14) $f'(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{4}{x^2} & : \quad x \geqslant 2 \\ 2x & : \quad x < 2 \end{cases}$

مجال f' : $(-\infty, \infty)$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (a)	**(3)** (b)	**(4)** (a)	**(5)** (a)
(6) (b)	**(7)** (b)	**(8)** (c)	**(9)** (c)	**(10)** (d)
(11) (c)	**(12)** (d)	**(13)** (d)	**(14)** (c)	

مشتقات الدوال المثلثية

تمرّنْ 4–2

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\dfrac{d}{dx}(2\sin x - \tan x) = 2\cos x - \sec^2 x$

(2) $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(4 - x^2 \sin x) &= \frac{d}{dx}(4) - \left[x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + (\sin x)\frac{d}{dx}(x^2)\right] \\ &= 0 - [x^2\cos x + (\sin x)(2x)] \\ &= -x^2\cos x - 2x\sin x\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\cot x}{1 + \cot x}\right) &= \frac{(1+\cot x)\frac{d}{dx}(\cot x) - (\cot x)\frac{d}{dx}(1+\cot x)}{(1+\cot x)^2} \\ &= \frac{(1+\cot x)(-\csc^2 x) - (\cot x)(-\csc^2 x)}{(1+\cot x)^2} \\ &= -\frac{\csc^2 x}{(1+\cot x)^2}\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right) &= \frac{(1+\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x) - (\cos x)\frac{d}{dx}(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2} \\ &= \frac{(1+\sin x)(-\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2} \\ &= -\frac{1}{1+\sin x}\end{aligned}$$

(5) $$y'(x) = \frac{x\frac{d}{dx}(\tan x) - \tan x\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\pi}{4}(\sqrt{2})^2 - 1}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{8\pi - 16}{\pi^2}$$

(6) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos x}\tan x$ تساوي 0 عند $x = 0$، ميل خط المماس هو 0.

$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ تساوي 0 عند $x = 0$، ميل خط المماس هو 0.

(7) $y'(x) = \frac{d}{dx}(1 + \sqrt{2}\csc x + \cot x)$

$$= 0 + \sqrt{2}(-\csc x \cot x) + (-\csc^2 x)$$

$$= -\sqrt{2}\csc x \cot x - \csc^2 x$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\csc\frac{\pi}{4}\cot\frac{\pi}{4} - \csc^2\frac{\pi}{4}$$

$$= -\sqrt{2}(\sqrt{2})(1) - (\sqrt{2})^2$$

$$= -2 - 2 = -4$$

ميل خط المماس -4 ويمر هذا الخط عبر $P\left(\frac{\pi}{4}, 4\right)$

المعادلة هي: $y = -4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 4$ أو $y = -4x + \pi + 4$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (a)	**(5)** (c)
(6) (d)	**(7)** (d)	**(8)** (a)	**(9)** (c)	

قاعدة السلسلة — تمرّنْ 5–2

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = (2)(6x) = 12x$

(2) $(f \circ g)'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2} \times 2x = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

(3) $(f \circ g)'(x) = 10(x^{15}) \times 15(x^{14}) = 150x^{29}$

(4) $(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1) = (5)(1)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

(5) $(f \circ g)'(x) = \left(1 + \frac{2\sin\pi x}{\cos^3\pi x}\right) \times \pi$; $(f \circ g)'\left(\frac{1}{4}\right) = \left(1 + \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right) \times \pi = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}\right) \times \pi = 5\pi$

(6) $(f\circ g)'(x)=\dfrac{2(-(10x^2+x+1)^2+1)}{((10x^2+x+1)^2+1)^2}\times(20x+1)$; $(f\circ g)'(0)=0$

(7) (a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$

$=(-\sin u)(6)$

$=-6\sin u=-6\sin(6x+2)$

(b) $\dfrac{dy}{dx}=15u^2\times 6x=90(3x^2+1)^2\times x$

(8) $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{3\pi}{2}\times\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}t\right)-\dfrac{7\pi}{4}\times\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}t\right)$

(9) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\tan(2x-x^3)=[\sec^2(2x-x^3)]\dfrac{d}{dx}(2x-x^3)$

$=[\sec^2(2x-x^3)](2-3x^2)=(2-3x^2)\sec^2(2x-x^3)$

(10) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\sin(3x+1)=[\cos(3x+1)]\dfrac{d}{dx}(3x+1)$

$=[\cos(3x+1)](3)=3\cos(3x+1)$

(11) $\dfrac{dy}{dx}=2(\tan x+\sec x)(\sec^2 x+\sec x\times\tan x)$

(12) $\dfrac{dy}{dx}=2\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\left(\dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2}\right)=\dfrac{4(x-1)}{(x+1)^3}$

(13) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}(1-6x)^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}(1-6x)^{\left(\frac{2}{3}-1\right)}\dfrac{d}{dx}(1-6x)$

$=\dfrac{2}{3}(-6)(1-6x)^{-\frac{1}{3}}$

$=-4(1-6x)^{-\frac{1}{3}}$

(14) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$=\dfrac{(\sqrt{1+x^2})\dfrac{d}{dx}(x)-x\dfrac{d}{dx}(\sqrt{1+x^2})}{(\sqrt{1+x^2})^2}$

$=\dfrac{(\sqrt{1+x^2})(1)-x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\dfrac{d}{dx}(1+x^2)}{1+x^2}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\right)(2x)}{1+x^2}$

$=\dfrac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)(\sqrt{1+x^2})}=(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$

(15) تستخدم في الخطوة الأخيرة المتطابقة $2\sin a\cos a=\sin 2a$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}(\sin^2(3x-2))$

$=2\sin(3x-2)\dfrac{d}{dx}\sin(3x-2)=2\sin(3x-2)\cos(3x-2)\dfrac{d}{dx}(3x-2)$

$=2\sin(3x-2)\cos(3x-2)(3)=6\sin(3x-2)\cos(3x-2)$

(16) (a) $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$; $f'(2)=\dfrac{2}{3}$

معادلة المماس عند النقطة $(2,3)$ هي: $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{5}{3}$

(b) معادلة الناظم: $y=-\dfrac{3}{2}x+6$

(17) (a) $g'(x)=24x^2(x^3+1)^7$

$g'(0)=0$

معادلة المماس عند النقطة $(0,1)$ هي: $y=1$

(b) معادل الناظم: $x=0$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	(2) (a)	(3) (b)	(4) (a)	(5) (d)
(6) (b)	(7) (d)	(8) (b)	(9) (c)	

المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني — تمرّنْ 6–2

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\dfrac{dy}{dx}=8x^3-3x^2+2x-3$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=24x^2-6x+2$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}=48x-6$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-5x^4+6x^2-4$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-20x^3+12x$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}=-60x^2+12$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-3}{(x-2)^2}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{6}{(x-2)^3}$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{-18}{(x-2)^4}$

(4) $\dfrac{dy}{dx}=2\cos 2x$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-4\sin 2x$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}=-8\cos 2x$

(5) $\dfrac{dy}{dx}=-4\sin 4x$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-16\cos 4x$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}=64\sin 4x$

(6) $\dfrac{dy}{dx}=2\sin x\cos x$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=2\cos^2x-2\sin^2x$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}=-4\cos x\sin x-4\sin x\cos x$

(7) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+4}{2y}=\dfrac{x+2}{y}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{y-y'(x+2)}{y^2}=\dfrac{y^2-(x+2)^2}{y^3}$

(8) $2ydy-4dy=dx$; $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2y-4}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-2}{(2y-4)^3}$

(9) $\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$; $\dfrac{dy}{dx}=-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$

(10) $2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 0 \quad ; \quad y' = 5$

معادلة المماس: $y = 5x - 7$

معادلة الناظم: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$

(11) $y' = -\frac{6}{5}$

معادلة المماس: $y = -\frac{6}{5}x - \frac{6}{5}$

معادلة الناظم: $y = \frac{5}{6}x + \frac{5}{6}$

(12) $y' = -\frac{\pi}{2}$

معادلة المماس: $y = -\frac{\pi}{2}x + \pi$

معادلة الناظم: $y = \frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}$

(13) $y' = A\cos x - B\sin x$

$y'' = -A\sin x - B\cos x$

$y'' - y = -2A\sin x - 2B\cos x = \sin x \implies A = -\frac{1}{2} \quad ; \quad B = 0$

(14) $\frac{dy}{dx} = \frac{-(\sin x + \sec x) - \sin x \tan x}{(1 + \tan x)^2} \quad ; \quad y = -x + 1$

(15) $f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} \quad ; \quad f''(x) = \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}$

$4x^2 f''(x) - 3f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$

(16) $f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \quad ; \quad f''(x) = \frac{2(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} \quad ; \quad f'''(x) = \frac{24x(1+x^2)}{(1-x^2)^4}$

$(1-x^2) f'''(x) - 6xf''(x) - 6f'(x) = \frac{24x + 24x^3 - 36x^3 - 12x - 12x + 12x^3}{(1-x^2)^3} = 0$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	(2) (a)	(3) (a)	(4) (c)
(5) (d)	(6) (a)	(7) (c)	

اختبار الوحدة الثانية

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^5 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x\right) = 5x^4 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3 - 7x^3 + 3x^7) = -21x^2 + 21x^6$

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sin x\cos x)$

$= 2(\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x) + 2(\cos x)\frac{d}{dx}(\sin x) = -2\sin^2 x + 2\cos^2 x$

حل بديل:

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sin x\cos x) = \frac{d}{dx}\sin 2x = (\cos 2x)(2)$

$= 2\cos 2x$

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) = \frac{(2x-1)(2)-(2x+1)(2)}{(2x-1)^2} = -\frac{4}{(2x-1)^2}$

(5) $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}[\cos(1-2t)] = -\sin(1-2t)(-2) = 2\sin(1-2t)$

(6) $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\cot\left(\frac{2}{t}\right)\right] = -\csc^2\left(\frac{2}{t}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{t}\right) = -\csc^2\left(\frac{2}{t}\right)\left(-\frac{2}{t^2}\right) = \frac{2}{t^2}\csc^2\left(\frac{2}{t}\right)$

(7) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}} + 1 + x^{-\frac{1}{2}}\right)$

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$

(8) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x\sqrt{2x+1}) = (x)\left(\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}\right)(2) + (\sqrt{2x+1})(1)$

$= \frac{x+(2x+1)}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$

(9) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{\sin(5x)}\right) = \frac{d}{dx}(x^2\csc 5x)$

$= (x^2)(-\csc 5x\cot 5x)(5) + (\csc 5x)(2x) = -5x^2\csc 5x\cot 5x + 2x\csc 5x$

(10) (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2-2x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x}}(2x-2) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$

عند $x = 3$ نحصل على: $y = \sqrt{3^2-2(3)} = \sqrt{3}$ ، $\frac{dy}{dx} = \frac{3-1}{\sqrt{3^2-2(3)}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

خط المماس: $y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-3) + \sqrt{3}$ أو $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \sqrt{3}$

(b) الخط العمودي (الناظم): $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-3) + \sqrt{3}$ أو $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{5\sqrt{3}}{2}$

(11) (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4 + \cot x - 2\csc x) = -\csc^2 x + 2\csc x\cot x$

عند $x = \frac{\pi}{2}$ نحصل على: $y = 4 + \cot\frac{\pi}{2} - 2\csc\frac{\pi}{2} = 4 + 0 - 2 = 2$

$\frac{dy}{dx} = -\csc^2\frac{\pi}{2} + 2\csc\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi}{2} = -1 + 2(1)(0) = -1$

خط المماس: $y = -1\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ أو $y = -x + \frac{\pi}{2} + 2$

(b) الخط العمودي (الناظم): $y = 1\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ أو $y = x - \frac{\pi}{2} + 2$

(12) $f'_-(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$

$f'_+(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2 - x - 1}{x - 1} = -1$

$\because \; f'_-(1) \neq f'_+(1)$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

(13) $\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 10x + 2 \;;\; \frac{d^2y}{dx^2} = 36x^2 - 10 \;;\; \frac{d^3y}{dx^3} = 72x$

(14) $\frac{dy}{dx} = 3\cos 3x \;;\; \frac{d^2y}{dx^2} = -9\sin 3x \;;\; \frac{d^3y}{dx^3} = -27\cos 3x$

(15) $\frac{dy}{dx} = -2\sin 4x \;;\; \frac{d^2y}{dx^2} = -8\cos 4x \;;\; \frac{d^3y}{dx^3} = 32\sin 4x$

(16) $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 16x + 5 \;;\; \frac{d^2y}{dx^2} = 18x - 16 \;;\; \frac{d^3y}{dx^3} = 18$

(17) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{6y - 1}$

(18) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + 2x + 2}{2xy - 3}$

(19) $y' = -2$

معادلة المماس: $y = -2x + 3$

معادلة الناظم: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

تمارين إثرائية

(1) يتقاطع منحنى الدالة مع محور السينات إذا $-x^2 + 5x - 6 = 0$، فنحصل على $x = 2$ أو $x = 3$، عند $x = 2$
الميل $= 1$، عند $x = 3$ الميل $= -1$

(2) $s(t) = t^3 - 3t^2$

السرعة المتجهة: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t$

$v(2) = 12 - 12 = 0 \text{ m/s}$

$a(t) = V'(t) = 6t - 6$

$a(2) = 6(2) - 6 = 6 \text{ m/s}^2$

(3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2x\sqrt{4 - x^2} + \frac{2x}{2\sqrt{4 - x^2}} \times x^2}{4 - x^2} = \frac{2x(4 - x^2) + x^3}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}} = \frac{8x - 2x^3 + x^3}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8x - x^3}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(4) يتقاطع منحنى الدالة مع محور الصادات عند النقاط $y = 0$ ، $y = 4$ ، $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y-4}$ ، عند النقطة $(0,0)$ يكون الميل $= -\frac{1}{4}$ ، عند النقطة $(0,4)$ يكون الميل $= \frac{1}{4}$.

(5) $\frac{du}{dx} = \frac{2x}{3(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{dy}{du} = \frac{4u}{(u^2+1)^2}$

أي $\frac{du}{dx} = \frac{2x}{3u^2}$ باستخدام قاعدة السلسلة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{4u}{(u^2+1)^2} \times \frac{2x}{3u^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{3u(u^2+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{3(x^2+2)\sqrt[3]{(x^2+2)^2} + 3\sqrt[3]{x^2+2} + 6x^2 + 12}$$

(6) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y\sin 2x + \sin 2y}{2x\cos 2y - \cos 2x}$

معادلة المماس: $y = 2x$

معادلة الناظم: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5\pi}{8}$

(7) الدالة g متصلة عند $x = 0$ $\therefore$ $b = 1$

$$g'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x + 1 - 1}{x} = 1$$

$$g'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$\because$ $g'_-(1) \neq g'_+(1)$

$\therefore$ g غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$

(8) $y' = 2\cos x \cos x - 2\sin x \sin x$

$= 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= 2\cos 2x$

(9) $AC = \sqrt{x^2 + 1600}$ $\qquad$ $x \in (0,50)$

$$t = \frac{\sqrt{x^2+1600}}{45} + \frac{50-x}{75}$$

$$t' = \frac{x}{45 \times \sqrt{x^2+1600}} - \frac{1}{75}$$

$t' = 0$: $5x = 3\sqrt{x^2+1600}$

$25x^2 = 9(x^2+1600)$

$16x^2 = 9 \times 1600$

$x^2 = 900$

$x = 30$

$$t(30) = \frac{\sqrt{900 + 1600}}{45} + \frac{50 - 30}{75} \simeq 83 \text{ min}$$

$$t(0) = \frac{\sqrt{0 + 1600}}{45} + \frac{50 - 0}{75} \simeq 93 \text{ min}$$

$$t(50) = \frac{\sqrt{2\,500 + 1600}}{45} + \frac{50 - 50}{75} \simeq 85 \text{ min}$$

يستطيع السائق الوصول إلى الموقع D بأقل وقت ممكن إذا سار بخط مستقيم في الصحراء من نقطة A إلى نقطة C على الطريق الرملي (التي تبعد 30 km عن نقطة B)، ثم يسير على الطريق المعبد من C إلى D فيصل بحوالي 83 دقيقة وبالتالي أقل من 85 دقيقة ويستطيع الحصول على الجائزة.

(10) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 5y}{5x - 5y^4}$

(11) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y - 3}{2x - 4}$

الميل $= -\frac{11}{2}$

معادلة الناظم: $y = \frac{2}{11}x - \frac{46}{11}$

(12) $\frac{dc}{dt} = \frac{dc}{dp} \times \frac{dp}{dt} = \left(\frac{1}{2}(0.5p^2 + 17)^{-\frac{1}{2}}(0.5)(2p)\right)(0.2t)$

(a) إذا كان $t = 3$ فإن $P(3) = 3.1 + 0.1 \times 3^2 = 4$

معدل التغير يصبح: $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=3} = 0.24$

إن معدل التغير بعد مرور 3 سنوات لأول أكسيد الكربون هو 0.24 جزء من مليون وهو يتزايد لأن إشارة $\frac{dc}{dt}$ موجبة.

(b) عدد السكان 000 8 يعني أن $p = 8$ وبالتالي $8 = 3.1 + 0.1t^2$ نحصل على $t = 7$

$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=7} = 0.8$

إن معدل التغير بعد مرور 7 سنوات لعدد سكان 000 8 هو 0.8 جزء من مليون.

(13) لتكن $A(t, 9 - t^2)$ نقطة على منحنى الدالة.

$y'_A = -2t$

معادلة المماس عند A : $y = -2tx + t^2 + 9$

يمر هذا المماس بالنقطة $(1, 12)$ عندما $12 = -2t(1) + t^2 + 9$

$t^2 + 9t - 14 = 0$

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$t = -1 \quad , \quad t = 3$

يمر مماسان بالنقطة $(1, 12)$.

المجموعة A تمارين مقالية

(1) قيمة عظمى مطلقة عند $(0,5)$، لا توجد قيم صغرى.

(2) قيمة عظمى مطلقة عند $(1,2)$، قيمة صغرى مطلقة عند $(0,-1)$

(3) القيمة العظمى عند $x=b$ والقيمة الصغرى عند $x=c_2$

تطبق نظرية القيمة القصوى لأن f متصلة على الفترة $[a,b]$، إذًا كلتا القيمتين العظمى والصغرى موجودتان.

(4) لا توجد قيمة عظمى أو صغرى، لا تطبق نظرية القيمة القصوى لأن الدالة غير متصلة.

(5) قيمة عظمى عند $x=c$ وقيمة صغرى عند $x=a$، لا تطبق نظرية القيمة القصوى لأن الدالة غير متصلة.

(6) قيمة عظمى عند $x=a$ وقيمة صغرى عند $x=c$، لا تطبق نظرية القيمة القصوى لأن الدالة غير متصلة على فترة مغلقة.

(7) النقاط الحرجة: $(0,0)$، $\left(-\frac{4}{3},\frac{32}{27}\right)$

(8) النقطة الحرجة: $(2,2)$

(9) النقاط الحرجة: $(0,3)$، $(1,4)$

(10) قيمة عظمى مطلقة عند هي 9 وقيمة صغرى مطلقة هي 1

(11) قيمة عظمى مطلقة هي 1.933 تقريبًا وقيمة صغرى مطلقة هي 1.515– تقريبًا

(12) قيمة عظمى مطلقة هي 0 وقيمة صغرى مطلقة هي $-\frac{1}{2}$

(13) قيمة عظمى مطلقة هي 2 وقيمة صغرى مطلقة هي 0

(14) قيمة عظمى مطلقة هي $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ وقيمة صغرى مطلقة هي 1

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (b)	**(5)** (b)	**(6)** (b)
(7) (c)	**(8)** (b)	**(9)** (d)	**(10)** (c)	**(11)** (a)	**(12)** (d)
(13) (c)	**(14)** (b)	**(15)** (d)	**(16)** (a)		

تزايد وتناقص الدوال تمرَّنْ 2–3

المجموعة A تمارين مقالية

(1) f متصلة على الفترة $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0,1)$

$$2c+2=\frac{2-(-1)}{1} \quad ; \quad c=\frac{1}{2}$$

يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = \frac{1}{2}$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(1,2)$, $(0,-1)$

(2) f متصلة على الفترة $\left[\frac{1}{2}\ ,\ 2\right]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $\left(\frac{1}{2}\ ,\ 2\right)$

$$1 - \frac{1}{c^2} = 0 \quad ; \quad c = 1$$

يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = 1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $\left(2\ ,\ \frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{5}{2}\right)$ وأيضًا يوازي محور السينات.

(3) متزايدة على الفترة $\left(-\infty\ ,\ \frac{5}{2}\right)$ ومتناقصة على الفترة $\left(\frac{5}{2}\ ,\ \infty\right)$

(4) متزايدة على كل من الفترتين $(6,\infty)$، $(-\infty,0)$ ومتناقصة على الفترة $(0,6)$

(5) متناقصة على الفترة $(0,\infty)$ ومتزايدة على الفترة $(-\infty,0)$

(6) متزايدة على كل من الفترتين $(2,\infty)$، $(-\infty,-2)$ ومتناقصة على الفترة $(-2,2)$

(7) متزايدة على كل من الفترتين $(1,\infty)$، $(-1,0)$ ومتناقصة على كل من الفترتين $(0,1)$، $(-\infty,-1)$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (b) **(3)** (a) **(4)** (a)

(5) (b) **(6)** (c) **(7)** (b) **(8)** (d)

ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f — تمرّنْ 3–3

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4)$

النقاط الحرجة هي: $(2,20)$, $(4,16)$

جدول التغير:

$-\infty \quad 2 \quad 4 \quad \infty$			
الفترات	$(-\infty,2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
إشارة f'	+ +	− −	+ +
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

القيمة العظمى المحلية هي: $f(2) = 20$

القيمة الصغرى المحلية هي: $f(4) = 16$

الدالة تتزايد على الفترة $(-\infty,2)$ والفترة $(4,\infty)$ وتتناقص على الفترة $(2,4)$

(2) $g'(x) = -6x^2 + 12x = -6x(x-2)$

النقاط الحرجة هي: $(0,-3)\ ,\ (2,5)$

جدول التغير:

$-\infty \qquad 0 \qquad 2 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
إشارة g'	$--$	$++$	$--$
سلوك الدالة g	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

القيمة العظمى المحلية هي: $g(2) = 5$

القيمة الصغرى المحلية هي: $g(0) = -3$

الدالة تتزايد على الفترة $(0,2)$ وتتناقص على الفترة $(-\infty,0)$ والفترة $(2,\infty)$.

(3) $h'(x) = -4x^3 - 12x^2 - 8x = -4x(x+1)(x+2)$

النقاط الحرجة هي: $(-2,1)\ ,\ (-1,0)\ ,\ (0,1)$

جدول التغير:

$-\infty \qquad -2 \qquad -1 \qquad 0 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
إشارة h'	$++$	$--$	$++$	$--$
سلوك الدالة h	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

القيمة العظمى المحلية هي: $h(-2) = 1\ ,\ h(0) = 1$

القيمة الصغرى المحلية هي: $h(-1) = 0$

الدالة تتزايد على الفترة $(-\infty,-2)$ والفترة $(-1,0)$ وتتناقص على الفترة $(-2,-1)$ والفترة $(0,\infty)$

(4) $g'(x) = 6x^3 + 6x^2 - 6x - 6 = 6(x+1)^2(x-1)$

النقاط الحرجة هي: $(-1,7)\ ,\ (1,-1)$

جدول التغير:

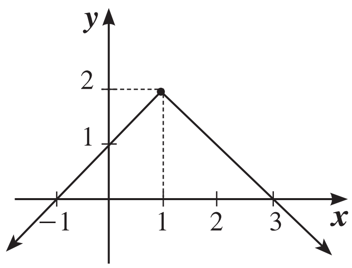
$-\infty \qquad -1 \qquad 1 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
إشارة g'	$--$	$--$	$++$
سلوك الدالة g	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

القيمة الصغرى المحلية هي: $g(1) = -1$

الدالة تتزايد على الفترة $(1,\infty)$ وتتناقص على الفترة $(-\infty,1)$

(5) $h(x) = 2 - |x-1| = \begin{cases} x+1 & : \quad x < 1 \\ -x+3 & : \quad x \geqslant 1 \end{cases}$



النقطة الحرجة هي: $(1,2)$

القيمة العظمى المحلية هي: $h(1) = 2$

الدالة تتزايد على الفترة $(-\infty,1)$ وتتناقص على الفترة $(1,\infty)$

(6) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$

لا نقاط حرجة.

جدول التغير:

الفترات	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
إشارة f'	$- \; -$	$- \; -$
سلوك الدالة f	↘	↘

لا يوجد قيم قصوى.

الدالة تتناقص على الفترة $(-\infty,2)$ والفترة $(2,\infty)$

(7) **(a)** لا يوجد قيمة عظمى محلية.

(b) القيمة الصغرى المحلية عند $x = 2$.

جدول إشارة y':

الفترات	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
إشارة y'	$-$	$-$	$+$
سلوك الدالة y	↘	↘	↗

(c) $y'' = (x-1)(3x-5)$

نقطة انعطاف عند $x = 1$, $x = \dfrac{5}{3}$

(8) **(a)** قيمة عظمى محلية عند $x = 2$

(b) قيمة صغرى محلية عند $x = 4$

جدول التغير:

الفترات	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
إشارة g'	+	+	−	+
سلوك الدالة g	↗	↗	↘	↗

(c) $y'' = 2(x-1)(2x^2 - 10x + 11)$

نقطة انعطاف عند $x = 1$, $x = \frac{5+\sqrt{3}}{2} \approx 3.366$, $x = \frac{5-\sqrt{3}}{2} \approx 1.634$

(9) كلّا، للدالة f مماس أفقي عند هذه النقطة ولكن يمكن أن تكون متزايدة (أو متناقصة) على كل من الفترتين (a, c) و(c, b) ولا يوجد قيمة قصوى محلية عند $x = c$

مثال: $f(x) = x^3$ حيث $f'(0) = 0$ ولا قيمة عظمى أو صغرى محلية عند $x = 0$

(10) $f'(x) = 6x - 6x^2$

$f'' = 6 - 12x = 6(1-2x)$

$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

جدول التغير:

الفترات	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\infty\right)$
إشارة f''	+ +	− −
تقعر الدالة f	∪ تقعر لأعلى	∩ تقعر لأسفل

بيان الدالة f يكون مقعرًا لأعلى على الفترة $\left(-\infty , \frac{1}{2}\right)$ ومقعرًا لأسفل على الفترة $\left(\frac{1}{2} , \infty\right)$، نقطة الانعطاف $\left(\frac{1}{2} , \frac{1}{2}\right)$

(11) $g'(x) = x^2 - 4x + 1$

$g''(x) = 2x - 4$

$g''(2) = 0$, $g(2) = -\frac{25}{3}$

جدول التغير:

$-\infty \qquad 2 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
إشارة g''	$- \; -$	$+ \; +$
تقعر الدالة g	تقعر لأسفل	تقعر لأعلى

بيان الدالة f يكون مقعرًا لأعلى على الفترة $(2,\infty)$ ومقعرًا لأسفل على الفترة $(-\infty,2)$، نقطة الانعطاف $\left(2\ ,\ -\frac{25}{3}\right)$

(12) $f'(x) = -4x^3$

$f''(x) = -12x^2$

$f''(x) = 0$ عند $x = 0$ ولكن بيان f لا يغير تقعره على جانبي 0 (بيان f مقعر لأسفل على جانبي 0).

$\therefore$ منحنى f ليس له نقطة انعطاف.

(13) $f(0) = 0 \quad \therefore \quad c = 0$

$f(4) = 16 \implies 4^3 + a(4)^2 + b(4) + c = 16$

$4a + b = -12 \qquad (1)$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(4) = 0 \implies 48 + 8a + b = 0$

$8a + b = -48 \qquad (2)$

من (1)، (2) نحصل على: $a = -9 \ ,\ b = 24$

$\therefore\ a = -9 \ ,\ b = 24 \ ,\ c = 0$

(14) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(2) = 0 \implies 12 + 4a + b = 0$

$4a + b = -12 \qquad (1)$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \implies 6\left(\frac{1}{2}\right) + 2a = 0$

$a = -\frac{3}{2}$

وبالتعويض في (1) نحصل على: $b = -6$

$\therefore\ a = -\frac{3}{2} \ ,\ b = -6$

(15) $f'(x) = 2x - 6$

$f'(3) = 0$

$f''(x) = 2$

$f''(3) = 2 > 0$

$f(3) = (3)^2 - 6(3) + 11 = 2$

فتكون للدالة f قيمة صغرى محلية 2 عند $x = 3$

(16) $f'(x) = 4x^3 - 36x = 4x(x^2 - 9) = 4x(x-3)(x+3)$

$f''(x) = 12x^2 - 36$

$f''(0) = -36 \;\; ; \;\; -36 < 0 \;\; ; \;\; f(0) = 0$

للدالة f قيمة عظمى محلية 0 عند $x = 0$

$f''(3) = 72 \;\; ; \;\; f''(-3) = 72$

$f(3) = f(-3) = -81$

للدالة f قيمة صغرى محلية -81 عند كل من $x = -3$, $x = 3$

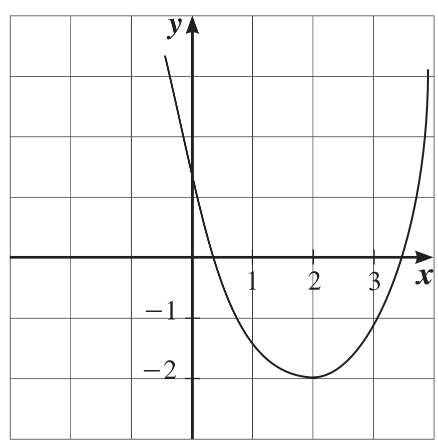
المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (b)	**(5)** (a)
(6) (b)	**(7)** (b)	**(8)** (a)	**(9)** (d)	**(10)** (a)
(11) (d)	**(12)** (b)	**(13)** (c)	**(14)** (a)	**(15)** (b)

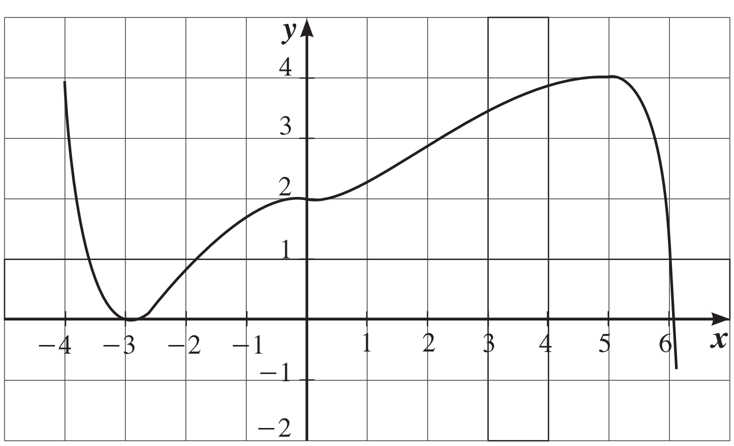
رسم بيان دوال كثيرات الحدود — تمرَّنْ 4–3

المجموعة A تمارين مقالية

(1) مجال $f = (-\infty, \infty)$



(2) مجال $f = (-\infty, \infty)$



(3) $\therefore$ f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

نوجد النقاط الحرجة:

f دالة كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$

نضع $f'(x) = 0 \implies x = 2 \quad ; \quad x = -\frac{2}{3}$

$f(2) = -1 \quad , \quad f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{229}{27} \quad \therefore$ نقاط حرجة: $\left(-\frac{2}{3}, \frac{229}{27}\right) \quad , \quad (2, -1)$

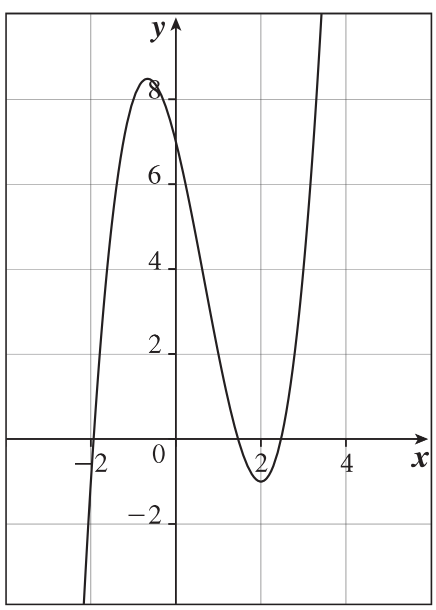
	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	2 $\quad\infty$
الفترات	$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$	$\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	+ +	− −	+ +
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

$f''(x) = 6x - 4$

$f''(x) = 0 \implies x = \frac{2}{3}$

	$-\infty$	$\frac{2}{3}$ $\quad\infty$
الفترات	$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
إشارة f''	− −	+ +
التقعر	∩	∪

نقطة انعطاف: $I\left(\frac{2}{3} , \frac{101}{27}\right)$ ، $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{101}{27}$



(4) $\therefore$ g دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^4}{4} = \infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^4}{4} = \infty$

$g'(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$

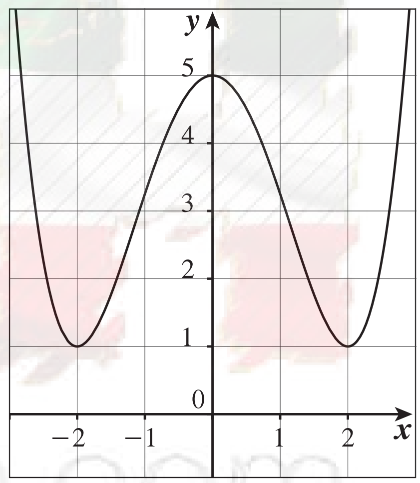
النقاط الحرجة: $\quad (-2,1)\ ,\ (2,1)\ ,\ (0,5)$

جدول التغير:

	$-\infty$ … -2	-2 … 0	0 … 2	2 … ∞
الفترات	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
إشارة g'	$--$	$++$	$--$	$++$
سلوك الدالة g	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$g''(x) = 3x^2 - 4$

نقاط الانعطاف: $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\ ,\ \frac{25}{9}\right) \quad , \quad \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\ ,\ \frac{25}{9}\right)$



(5) $\therefore$ h دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^4 = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to \infty} h(x) = \lim\limits_{x \to \infty} -x^4 = -\infty$

$h'(x) = -4x(x-2)(x+2)$

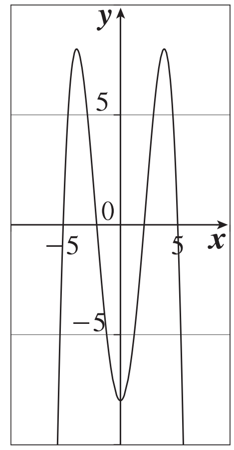
النقاط الحرجة: $\quad (2,8)\ ,\ (0,-8)\ ,\ (-2,8)$

جدول التغير:

	$-\infty$ … -2	-2 … 0	0 … 2	2 … ∞
الفترات	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
إشارة h'	$++$	$--$	$++$	$--$
سلوك الدالة h	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

$h''(x) = 4(4 - 3x^2)$

نقاط الانعطاف: $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\ ,\ \frac{8}{9}\right) \quad , \quad \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\ ,\ \frac{8}{9}\right)$



(6) $\therefore$ f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} -x^3 = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^3 = \infty$$

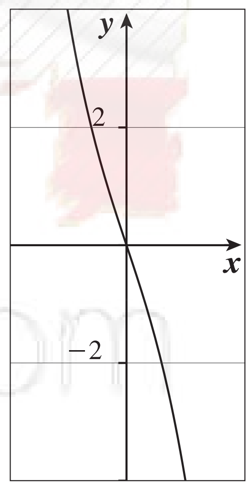
$$f'(x) = -3x^2 - 3 < 0$$

لا نقاط حرجة.

f دالة مطردة متناقصة.

$$f''(x) = -6x$$

نقطة الانعطاف: $(0, 0)$



(7) $f'(x) = 2x^2 - 4x = 2x(x-2)$

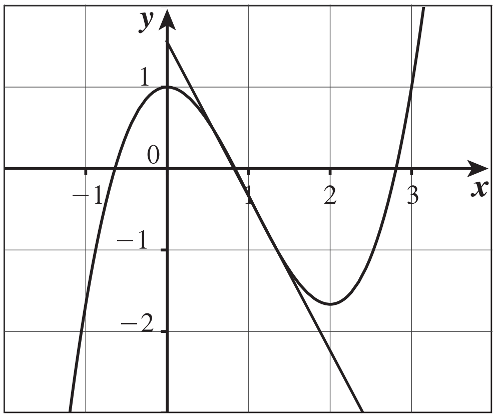
(a) جدول التغير:

	$-\infty$ ← 0	0 ← 2	2 ← ∞
الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	+ +	− −	+ +
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

(b) $A\left(1, -\frac{1}{3}\right)$; $f'(1) = -2$

معادلة (l) : $y = -2x + \frac{5}{3}$

(c)



(8) **(a)** $f'(x) = -4x^3 + 4x + 1$

$f''(x) = -12x^2 + 4$

نقاط الانعطاف: $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1.13\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -0.02\right)$

جدول التغير:

$-\infty \quad -0.838 \quad -0.269 \quad 1.1 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty, -0.838)$	$(-0.838, -0.269)$	$(-0.269, 1.1)$	$(1.1, \infty)$
إشارة f'	+ +	− −	+ +	− −
سلوك الدالة f	↗	↘	↗	↘

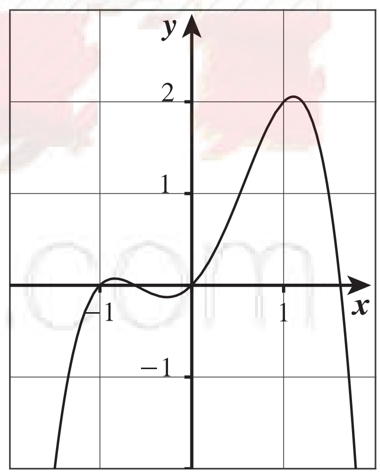
(b) $f'(x) = 1 \implies -4x^3 + 4x + 1 = 1$

$-4x(x^2 - 1) = 0$

$x = 0 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad x = -1$

$f(0) = 0 \quad , \quad f(1) = 2 \quad , \quad f(-1) = 0$

النقاط: $(0,0)$, $(1,2)$, $(-1,0)$



(c) معادلة المماس عند كل من النقطتين $(1,2)$, $(-1,0)$: $y = x + 1$

(9) $f(0) = 1 \implies d = 1$

$f(-2) = 5 \implies -8a + 4b - 2c + 1 = 5$

$-8a + 4b - 2c = 4$

$-4a + 2b - c = 2 \qquad (1)$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(-2) = 0 \implies 12a - 4b + c = 0 \qquad (2)$

$f'(0) = 0 \implies c = 0 \qquad (3)$

من (1)، (2)، (3) نحصل على $b = 3$, $a = 1$

(10) جدول التغير:

الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
إشارة f'	$- -$	$+ +$	$- -$
سلوك الدالة f	↘	↗	↘

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (a) **(3)** (a) **(4)** (a) **(5)** (a)

(6) (c) **(7)** (c) **(8)** (c) **(9)** (a) **(10)** (b)

(11) (d) **(12)** (d) **(13)** (b) **(14)** (a)

تطبيقات على القيم القصوى — تمرّنْ 5–3

المجموعة A تمارين مقالية

(1) لتكن الأعداد x و $20-x$ حيث $0 \leqslant x \leqslant 20$

(a) مجموع مربعيهما هو: $f(x) = x^2 + (20-x)^2 = 2x^2 - 40x + 400$ ، ثم $f'(x) = 4x - 40$

النقطة الحرجة والنقاط الطرفية تحدث عند $x = 0$ و $x = 10$ و $x = 20$، ثم $f(0) = 400$ و $f(10) = 200$ و $f(20) = 400$ مجموع المربعين هو أصغر ما يمكن للأعداد 10 و 10

(b) يعطى مجموع عدد واحد مع الجذر التربيعي للعدد لآخر بالدالة $g(x) = x + \sqrt{20-x}$، ثم $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{20-x}}$

تحدث النقطة الحرجة عندما $2\sqrt{20-x} = 1$، إذًا $20 - x = \dfrac{1}{4}$ و $x = \dfrac{79}{4}$، بعد التدقيق في النقاط الطرفية والنقطة الحرجة، نجد أن: $g(0) = \sqrt{20} \approx 4.47$ و $g\left(\dfrac{79}{4}\right) = \dfrac{81}{4} = 20.25$ و $g(20) = 20$

الجمع هو أكبر ما يمكن عند الأعداد $\dfrac{79}{4}$ و $\dfrac{1}{4}$

(2) ترمز x و y إلى ضلعي القائمة في المثلث ولاحظ أن $0 < x < 6$، ثم $x^2 + y^2 = 36$، إذًا $y = \sqrt{36 - x^2}$ (حيث إن $y > 0$)

المساحة هي: $A = \dfrac{1}{2}xy = \dfrac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}$، إذًا $\dfrac{dA}{dx} = \dfrac{1}{2}x\dfrac{1}{2\sqrt{36-x^2}}(-2x) + \dfrac{1}{2}\sqrt{36-x^2} = \dfrac{36-2x^2}{2\sqrt{36-x^2}}$

تحدث النقطة الحرجة عند $36 - 2x^2 = 0$ مما يعني أن $x = 3\sqrt{2}$ (حيث إن $x > 0$) تعود هذه القيمة إلى أكبر مساحة ممكنة حيث إن $\dfrac{dA}{dx} > 0$ لـ $0 < x < 3\sqrt{2}$ و $\dfrac{dA}{dx} < 0$ لـ $3\sqrt{2} < x < 6$ حيث $x = 3\sqrt{2}$، لدينا: $y = \sqrt{36 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$ و $A = \dfrac{1}{2}xy = \dfrac{1}{2}(3\sqrt{2})^2 = 9$ لذا، المساحة الأكبر الممكنة هي $9\,\text{cm}^2$ وبعدا الضلعين هما: $3\sqrt{2}\,\text{cm} \times 3\sqrt{2}\,\text{cm}$

(3) ترمز x إلى طول المستطيل بالمتر $(0 < x < 4)$. ثم العرض هو: $4 - x$ والمساحة هي: $A(x) = x(4-x) = 4x - x^2$.
حيث إن $A'(x) = 4 - 2x$، تحدث النقطة الحرجة عند $x = 2$ حيث إن $A'(x) > 0$ لـ $0 < x < 2$ و $A'(x) < 0$ لِـ $2 < x < 4$ هذه النقطة الحرجة تعود إلى المساحة العظمى.
مقياس المستطيل حسب الأطوال الكبيرة هو $2\,\text{m} \times 2\,\text{m}$، إذًا إنه مربع ومساحته العظمى هي $4\,\text{m}^2$

(4) لاحظ أن القيمتين a و b يجب أن تحققا $a^2 + b^2 = 20^2$ وهكذا، تعطى المساحة بـ: $A = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a\sqrt{400-a^2}$
لِـ $0 < a < 20$ $\quad \frac{dA}{da} = \frac{1}{2}a\left(\frac{1}{2\sqrt{400-a^2}}\right)(-2a) + \frac{1}{2}\sqrt{400-a^2} = \frac{-a^2+(400-a^2)}{2\sqrt{400-a^2}} = \frac{200-a^2}{\sqrt{400-a^2}}$
تحدث النقطة الحرجة عندما $a^2 = 200$ حيث $\frac{dA}{da} > 0$ لِـ $0 < a < \sqrt{200}$ و $\frac{dA}{da} < 0$ لِـ $\sqrt{200} < a < 20$
تناظر هذه النقطة الحرجة المساحة العظمى، بالتالي $a = \sqrt{200}$، ثم $b = \sqrt{400-a^2} = \sqrt{200}$
إذًا المساحة العظمى عند $a = b = 10\sqrt{2}$

(5) x هي الطول بالأمتار للجهة العمودية للنهر فيكون قياس الجهة الموازية للنهر هو $(800-2x)\,\text{m}$ والمساحة هي $A(x) = x(800-2x) = 800x - 2x^2$ لـ $0 < x < 400$. بالتالي، $A'(x) = 800 - 4x$ وتحدث النقطة الحرجة عند $x = 200$ حيث إن النقطة الحرجة تناظر المساحة العظمى. المساحة الأكبر الممكنة هي $A(200) = 80\,000\,\text{m}^2$ والأطوال هي $200\,\text{m}$ (عمودية على النهر) بـ $400\,\text{m}$ (الموازية للنهر).

(6) لتكن x طول كل جهة من قاعدة المربع بالمتر، الارتفاع $\frac{500}{x^2}\,\text{m}$ والمساحة الإجمالية للخزان (باستثناء الفتحة) هي: $S(x) = x^2 + 4x\left(\frac{500}{x^2}\right) = x^2 + 2\,000x^{-1}$، بالتالي $S'(x) = 2x - 2\,000x^{-2} = \frac{2(x^3-1000)}{x^2}$ وتحدث النقطة الحرجة عند $x = 10$ حيث إن $S'(x) < 0$ لـ $0 < x < 10$ و $S'(x) > 0$ لِـ $x > 10$ تناظر النقطة الحرجة أقل كمية مستخدمة من الحديد يجب أن تكون الأبعاد $10\,\text{m} \times 10\,\text{m} \times 5\,\text{m}$ حيث الارتفاع $5\,\text{m}$
أكّد أن الوزن ينخفض عندما ينخفض مجموع المساحة المكوّن من مساحة القاعدة ومساحات الجوانب الأربعة.

(7) بافتراض أن a و b ثابتتان، ثم $A(\theta) = \frac{1}{2}ab\sin\theta$ و $A'(\theta) = \frac{1}{2}ab\cos\theta$ تحدث النقطة الحرجة (في $0 < \theta < \pi$) عند $\theta = \frac{\pi}{2}$ حيث $A'(\theta) > 0$ لـ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $A'(\theta) < 0$ لـ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ فإن النقطة الحرجة تناظر المساحة العظمى. الزاوية التي تجعل مساحة المثلث أكبر هي: $\theta = \frac{\pi}{2}$ (أو $90°$)

(8) نصف قطر العلبة r هو بالـ cm وارتفاعها h هو بالـ cm، ثم $\pi r^2 h = 1000$ إذًا $h = \frac{1000}{\pi r^2}$
مساحة المعدن المستخدم هي: $A = \pi r^2 + 2\pi rh = \pi r^2 + \frac{2\,000}{r}$ إذًا $\frac{dA}{dr} = 2\pi r - 2\,000r^{-2} = \frac{2\pi r^3 - 2\,000}{r^2}$
تحدث النقطة الحرجة عند $r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = 10\pi^{\frac{-1}{3}}\,\text{cm}$، حيث $\frac{dA}{dr} < 0$ لِـ $0 < r < 10\pi^{\frac{-1}{3}}$ و $\frac{dA}{dr} > 0$ لِـ $r > 10\pi^{\frac{-1}{3}}$، تناظر النقطة الحرجة أقل كمية من المواد المستخدمة لصنع العلبة الأقل سماكة.
الأبعاد هي: $r = 10\pi^{\frac{-1}{3}} \approx 6.83\,\text{cm}$ و $h = 10\pi^{\frac{-1}{3}} \approx 6.83\,\text{cm}$

(9) لتكن x طول نصف قطر قاعدة المخروط وارتفاعه $y + 3$. بالعودة إلى مقدمة المسألة، حيث $x^2 + y^2 = 9$ لدينا $x = \sqrt{9-y^2}$ حجم المخروط يعطى حسب:
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi x^2(y+3) = \frac{1}{3}\pi(9-y^2)(y+3) = \frac{\pi}{3}(-y^3 - 3y^2 + 9y + 27)$ لِـ $0 < y < 3$ لذلك،
$\frac{dV}{dy} = \frac{\pi}{3}(-3y^2 - 6y + 9) = -\pi(y^2 + 2y - 3) = -\pi(y+3)(y-1)$ إذًا النقطة على الفترة $(0,3)$ هي $y = 1$ حيث

$\frac{dV}{dy} < 0$ لِـ $0 < y < 1$ و $\frac{dV}{dy} < 0$ لِـ $1 < y < 3$ تناظر النقطة الحرجة القيمة العظمى، التي تساوي

$V(1) = \frac{32\pi}{3}(\text{units}^3)$

(10) تربيع المسافة هو: $D(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (\sqrt{x} + 0)^2 = x^2 - 2x + \frac{9}{4}$، إذاً $D'(x) = 2x - 2$ وتحدث النقطة الحرجة عند $x = 1$ حيث $D'(x) < 0$ لـ $x < 1$ و $D'(x) > 0$ لـ $x > 1$ تناظر النقطة الحرجة المسافة الأصغر، التي هي

$\sqrt{D(1)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ units

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) **(2)** (b) **(3)** (c) **(4)** (d) **(5)** (a) **(6)** (b)

اختبار الوحدة الثالثة

(1) $f' = 3x^2 - 18x - 21 = 3(x+1)(x-7)$

$f(-1) = 0 \quad , \quad f(-2) = -13 \quad , \quad f(0) = -11$

0 قيمة عظمى مطلقة عند $x = -1$

-13 قيمة صغرى مطلقة عند $x = -2$

(2) $f'(x) = \frac{-10x}{(x^2+1)^2}$

$f(0) = 5 \quad , \quad f(-2) = 1 \quad , \quad f(3) = \frac{1}{2}$

5 قيمة عظمى مطلقة عند $x = 0$

$\frac{1}{2}$ قيمة صغرى مطلقة عند $x = 3$

(3) $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$

جدول التغير:

$-\infty$ ... ∞	$(2, \infty)$	$(-2, 2)$	$(-\infty, -2)$	الفترات
	$+\,+$	$-\,-$	$+\,+$	إشارة f'
	↗	↘	↗	سلوك الدالة f

$f(2) = -10$

$f(-2) = 22$

(a) فترات التزايد: $(2, \infty)$ ، $(-\infty, -2)$

فترة التناقص: $(-2, 2)$

(b) القيم القصوى المحلية: قيمة عظمى محلية 22 عند $x = -2$؛ قيمة صغرى محلية -10 عند $x = 2$

(4) $g'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$

جدول التغير:

الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
إشارة f'	$- -$	$+ +$	$- -$
سلوك الدالة f	↘	↗	↘

$f(1) = \dfrac{1}{2}$

$f(-1) = -\dfrac{1}{2}$

(a) فترة التزايد: $(-1,1)$

فترات التناقص: $(-\infty,-1)$ ، $(1,\infty)$

(b) القيم القصوى المحلية: قيمة عظمى محلية $\dfrac{1}{2}$ عند $x = 1$؛

قيمة صغرى محلية $-\dfrac{1}{2}$ عند $x = -1$

(5) $h'(x) = \dfrac{-x^2+9}{(x^2+2x+9)^2} = \dfrac{-(x-3)(x+3)}{(x^2+2x+9)^2}$

جدول التغير:

الفترات	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,\infty)$
إشارة f'	$- -$	$+ +$	$- -$
سلوك الدالة f	↘	↗	↘

$f(3) = \dfrac{1}{8}$

$f(-3) = -\dfrac{1}{4}$

(a) فترة التزايد: $(-3,3)$

فترات التناقص: $(-\infty,-3)$ ، $(3,\infty)$

(b) القيم القصوى المحلية: قيمة عظمى محلية $\dfrac{1}{8}$ عند $x = 3$؛

قيمة صغرى محلية $-\dfrac{1}{4}$ عند $x = -3$

(6) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$

$f'(x) = 6x^2 - 12x$

$f''(x) = 12x - 12 = 12(x-1)$

جدول التقعر:

الفترات	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
إشارة f''	$-\ -$	$+\ +$
تقعر الدالة f	$\cap$	$\cup$

$f(1) = -1$

(a) فترات التقعر: مقعرة لأعلى على الفترة $(1,\infty)$

مقعرة لأسفل على الفترة $(-\infty,1)$

(b) نقطة الانعطاف: $(1,-1)$

(7) $g(x) = x^4 - 2x^3 + 5x - 6$

$g'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5$

$g''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$

جدول التقعر:

الفترات	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
إشارة g''	$+\ +$	$-\ -$	$+\ +$
تقعر الدالة g	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$g(1) = -2$ $\quad$ $g(0) = -6$

(a) فترات التقعر: مقعرة لأعلى على الفترة $(-\infty,0)$ والفترة $(1,\infty)$

مقعرة لأسفل على الفترة $(0,1)$

(b) نقاط الانعطاف: $(1,-2)$, $(0,-6)$

(8) $h(x) = \dfrac{3}{x-1}$

$h'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$

$h''(x) = \dfrac{6}{(x-1)^3}$

جدول التقعر:

الفترات	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
إشارة h''	$-\ -$	$+\ +$
تقعر الدالة h	$\cap$	$\cup$

(a) فترات التقعر: مقعرة لأعلى على الفترة $(1,\infty)$ ، مقعرة لأسفل على الفترة $(-\infty,1)$.

(b) لا نقاط انعطاف.

(9) $y'' = 6(2x-1)$

(a) $x=-1 \qquad x=2$ قيم x

(b) $x > \frac{1}{2} \qquad y'' > 0$

فترة التقعر لأعلى: $\left(\frac{1}{2}\ ,\ \infty\right)$

(c) $x < \frac{1}{2} \qquad y'' < 0$

فترة التقعر لأسفل: $\left(-\infty\ ,\ \frac{1}{2}\right)$

(10) $y'' = 18x(x-2)$

(a) $x=-1$

(b) مقعر لأعلى على الفترة $(-\infty,0)$ والفترة $(2,\infty)$

(c) مقعر لأسفل على الفترة $(0,2)$

(11) ليس للدالة نقطة انعطاف عند $x=3$ ، وهناك نقطة انعطاف عند $x=0$

(12) $f(x) = x^3 + 8$

$f'(x) = 3x^2$

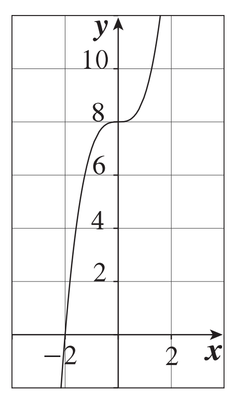
$f'(0) = 8$

جدول التغير:

	$-\infty$ 0 ∞	
الفترات	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
إشارة f'	+ +	+ +
سلوك الدالة f	↗	↗

$f''(x) = 6x \quad ; \quad f(0) = 8$

النقطة $(0,8)$ نقطة انعطاف.



(13) $g'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$

جدول التغير:

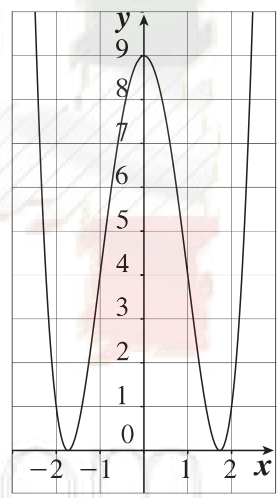
الفترات	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
إشارة g'	$- \; -$	$+ \; +$	$- \; -$	$+ \; +$
سلوك الدالة g	↘	↗	↘	↗

$g(0) = 9 \qquad g(-\sqrt{3}) = g(\sqrt{3}) = 0$

$g''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 12(x - 1)(x + 1)$

$g(-1) = 4 \qquad g(1) = 4$

نقاط الانعطاف: $(1,4)$, $(-1,4)$



(14) $h'(x) = 2(x^2 + 4x + 4)(2x + 4) = 4(x + 2)^3$

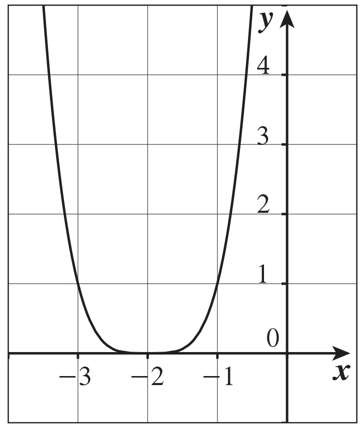
جدول التغير:

الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
إشارة h'	$- \; -$	$+ \; +$
سلوك الدالة h	↘	↗

$h(-2) = 0$

$h''(x) = 12(x + 2)^2$

النقطة $(-2,0)$ ليست نقطة انعطاف.



(15) **(a)** f دالة كثيرة حدود متصلة على الفترة $[0,3]$، قابلة للاشتقاق على الفترة $(0,3)$

$\therefore$ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[0,3]$

(b) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$$

$$3c^2 - 6c = \frac{5-5}{3} = 0$$

$$3c(c-2) = 0$$

$$c = 2 \quad , \quad c = 0 \notin (0,3)$$

(16) $f(-2) = -1 \implies 4 - 2b + c = -1$

$$-2b + c = -5 \qquad (1)$$

$$f'(x) = 2x + b$$

$$f'(-2) = 0 \implies 2(-2) + b = 0 \quad ; \quad b = 4$$

من (1) نحصل على $-2(4) + c = -5$

$$c = 3$$

تمارين إثرائية

(1) **(a)** عند $t = \frac{\pi}{3}\ s$ أو عند $t = \frac{4\pi}{3}\ s$

(b) المسافة القصوى بين الجسيم A والجسيم B. نحصل عليها من:

$$f(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) - \sin t$$

$$f(t) = \sin t \times \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} \times \cos t - \sin t$$

$$f(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$$

$$f'(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t$$

$$f'(t) = 0 \implies \tan t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$t = \frac{5\pi}{6}$ أو $t = \frac{11\pi}{6}$

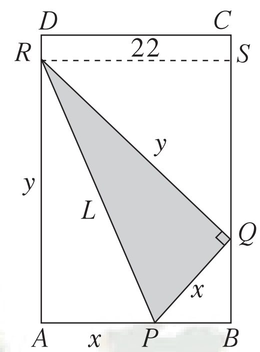
وبالتالي أبعد مسافة هي $1\,\text{m}$

(c) نوجد $f''(t)$ عند $t = \frac{\pi}{3}\,s$ أو $t = \frac{4\pi}{3}\,s$

(2) **(a)** نرسم القطعة RS كما هو موضّح، ونجعل y طول QR. $PB = 22 - x$

$$QB = \sqrt{x^2 - (22-x)^2} = \sqrt{22(2x-22)}$$

إن المثلثين QRS، PQB متشابهان إذًا:



$$\frac{y}{x} = \frac{22}{\sqrt{22(2x-22)}}$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{22^2}{22(2x-22)}$$

$$y^2 = \frac{22x^2}{2x-22}$$

$$y^2 = \frac{11x^2}{x-11}$$

$$L^2 = x^2 + y^2$$ نظرية فيثاغورث

$$L^2 = x^2 + \frac{11x^2}{x-11}$$

$$L^2 = \frac{x^2(x-11) + 11x^2}{x-11}$$

$$L^2 = \frac{x^3}{x-11}$$

(b) $L^2 = \frac{x^3}{x-11}$ نوجد مشتقة L^2

$$\frac{d(L^2)}{dx} = \frac{3x^2(x-11) - 1(x^3)}{(x-11)^2} = \frac{2x^3 - 33x^2}{(x-11)^2}$$

$$= \frac{x^2(2x-33)}{(x-11)^2} \quad ; \quad x^2 > 0$$

$$\frac{d(L^2)}{dx} = 0 \Rightarrow 2x - 33 = 0 \Rightarrow x = \frac{33}{2}$$

(c) $$L^2\left(\frac{33}{2}\right) = \frac{\left(\frac{33}{2}\right)^3}{\frac{33}{2} - 11} = \frac{3 \times (33)^2}{4}$$

$$L = \frac{33\sqrt{3}}{2} \approx 28.5788\,\text{cm}$$

(3) قيمة مبيع السلعة: $nx = \frac{ax}{x-10} + bx(100-x)$

كلفة الإنتاج: $10n = \frac{10a}{x-10} + 10b(100-x)$

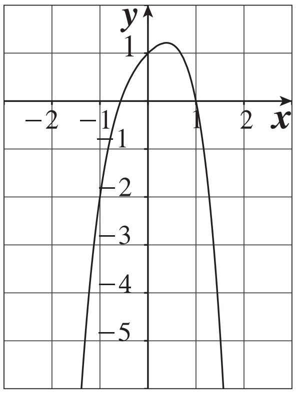
الربح: $P(x) = nx - 10n$

$$P(x) = \frac{ax}{x-10} + bx(100-x) - \frac{10a}{x-10} - 10b(100-x)$$

$$P'(x) = \frac{a(x-10) - ax}{(x-10)^2} + b(100-x) - bx + \frac{10a}{(x-10)^2} + 10b$$

$$P'(x) = 110b - 2bx$$

يحدث الربح الأكبر إذا $P'(x) = 0$ أي (دينارًا كويتيًّا) $x = 55$



(4) $y' = 1 - 2x - 4x^3$ تكون الدالة y' صفرًا عند $x \approx 0.385$

الفترات	$x < 0.385$	$x > 0.385$
إشارة y'	$+$	$-$
سلوك y	متزايدة	متناقصة

$y'' = -2 - 12x^2 = -2(1+6x^2)$ المشتقة الثانية هي دائمًا سالبة إذًا هي مقعرة لأسفل لكل قيم x .

(a) $(-\infty, 0.385]$ تقريبًا.

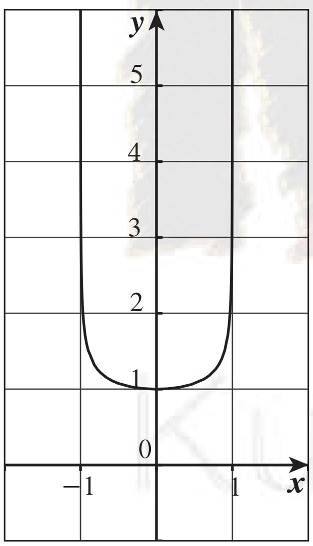
(b) $[0.385, \infty)$ تقريبًا.

(c) غير موجودة.

(d) $(-\infty, \infty)$

(e) عظمى مطلقة عند $(0.385\ ,\ 1.215)$

(f) غير موجودة.



(5) لاحظ أن المجال هو $(-1,1)$

$$y = (1-x^2)^{\frac{-1}{4}}$$

$$y' = -\frac{1}{4}(1-x^2)^{\frac{-5}{4}}(-2x) = \frac{x}{2(1-x^2)^{\frac{5}{4}}}$$

الفترات	$(-1,0)$	$(0,1)$
إشارة y'	$-$	$+$
سلوك y	متناقصة	متزايدة

$$y'' = \frac{2(1-x^2)^{\frac{5}{4}}(1) - (x)(2)\left(\frac{5}{4}\right)(1-x^2)^{\frac{1}{4}}(-2x)}{4(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}[2 - 2x^2 + 5x^2]}{4(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3x^2+2}{4(1-x^2)^{\frac{9}{4}}}$$

المشتقة الثانية هي دائمًا موجبة، إذًا الدالة هي مقعرة لأعلى في مجالها $(-1\ ,\ 1)$

(a) $[0,1)$

(b) $(-1,0]$

(c) $(-1,1)$

(d) غير موجودة

(e) صغرى مطلقة عند $(0,1)$

(f) غير موجودة

(6) $y = 2x^{\frac{4}{5}} - x^{\frac{9}{5}}$

$y' = \frac{8}{5}x^{\frac{-1}{5}} - \frac{9}{5}x^{\frac{4}{5}} = \frac{8-9x}{5\sqrt[5]{x}}$

الفترات	$(-\infty, 0)$	$\left(0\ ,\ \frac{8}{9}\right)$	$\left(\frac{8}{9}\ ,\ \infty\right)$
إشارة y'	$-$	$+$	$-$
سلوك y	متناقصة	متزايدة	متناقصة

$y'' = -\frac{8}{25}x^{\frac{-6}{5}} - \frac{36}{25}x^{\frac{-1}{5}} = -\frac{4(2+9x)}{25x^{\frac{6}{5}}}$

الفترات	$\left(-\infty\ ,\ -\frac{2}{9}\right)$	$\left(-\frac{2}{9}\ ,\ 0\right)$	$(0\ ,\ \infty)$
إشارة y''	$+$	$-$	$-$
سلوك y	مقعرة لأعلى	مقعرة لأسفل	مقعرة لأسفل

(a) $\left[0, \frac{8}{9}\right]$

(b) $(-\infty, 0)$ و $\left(\frac{8}{9}, \infty\right)$

(c) $\left(-\infty, -\frac{2}{9}\right)$

(d) $\left(-\frac{2}{9}, 0\right)$ و $(0, \infty)$

(e) قيمة عظمى محلية عند $\left(\frac{8}{9}\ ,\ \frac{10}{9} \times \left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{4}{5}}\right) \approx (0.889\ ,\ 1.011)$

قيمة صغرى محلية عند $(0, 0)$

(f) $\left(-\frac{2}{9}\ ,\ \frac{20}{9} \times \left(-\frac{2}{9}\right)^{\frac{4}{5}}\right) \approx \left(-\frac{2}{9}\ ,\ 0.667\right)$

(7) **(a)** كلتا قيم y' و y'' هي سالبة حيث يتناقص المنحنى ومقعر لأسفل، عند T.

(b) قيمة y' سالبة هي وقيمة y'' موجبة بحيث يتناقص المنحنى ومقعر لأعلى، عند P.

(8) $f(0) = 3 \implies d = 3$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(0) = 0 \implies c = 0$

$f(1) = 1 \implies a + b + 3 = 1$

$a + b = -2 \qquad (1)$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(1) = 0 \implies 6a + 2b = 0$

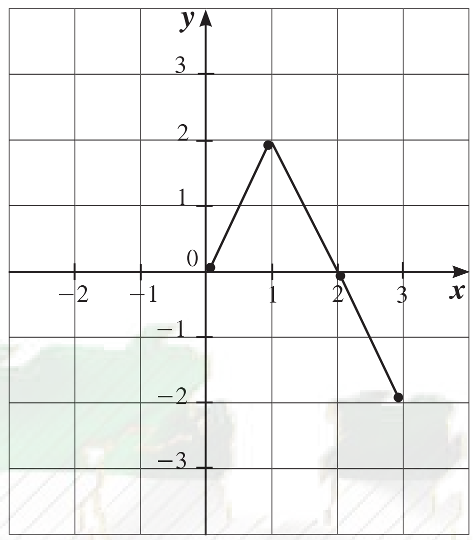
$3a + b = 0 \qquad (2)$

من (1) و (2) نحصل على $a = 1\ ,\ b = -3$

(9) **(a)** f تتزايد على الفترة $[0,1]$ وتتناقص على الفترة $[1,3]$. تحدث القيم العظمى المطلقة عند $x = 1$
وتحدث القيم الصغرى المطلقة عند النقاط الطرفية.
حيث إن $f(3) = -2$ ، $f(1) = 2$ ، $f(0) = 0$ لذا القيمة العظمى المطلقة هي 2 عند $x = 1$
والقيمة الصغرى المطلقة هي -2 عند $x = 3$

(b) لا يتغير تقعر المنحنى لذا ما من نقاط انعطاف.

(c)



(10) **(a)** $y = 2$ مقارب أفقي $\therefore\ \frac{a}{c} = 2 \ ,\ a = 2c$ (1)

(b) $x = \frac{1}{2}$ مقارب رأسي $\therefore\ c\left(\frac{1}{2}\right) + d = 0 \ ,\ d = -\frac{1}{2}c$ (2)

(c) $A(-1\,,\,1) \ \therefore\ 1 = \frac{-a+b}{-c+d} \ ,\ -c+d = -a+b$

إذًا من (1), (2) نجد أنّ $c = \frac{1}{2}b$

لتكن $c = 2$ إذًا $y = \frac{4x+1}{2x-1}$

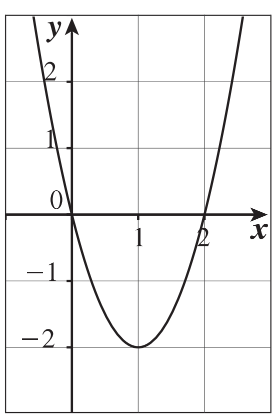
(11) $f(x) = 2x^2 - 4x$

(a) $f'(x) = 4x - 4$

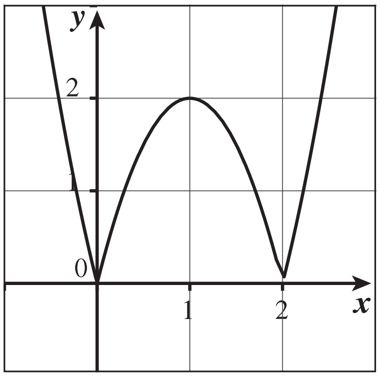
$f'(1) = 0 \qquad f(1) = -2$

جدول التغير:

	$-\infty$ ... 1	1 ... ∞
الفترات	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
إشارة f''	$-\ -$	$+\ +$
تقعر الدالة f	↘	↗



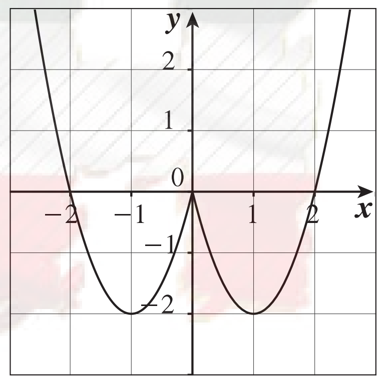
(b) $g(x) = |2x^2 - 4x| = \begin{cases} 2x^2 - 4x = f(x) & : \quad x \le 0 \\ -2x^2 + 4x = -f(x) & : \quad 0 < x < 2 \\ 2x^2 - 4x = f(x) & : \quad x \ge 2 \end{cases}$



(c) $h(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x & : \quad x \ge 0 \\ 2x^2 + 4x & : \quad x < 0 \end{cases} = \begin{cases} f(x) & : \quad x \ge 0 \\ f(-x) & : \quad x < 0 \end{cases}$

بيان h على الفترة $[0,\infty)$ هو نفسه بيان f.

بيان h على الفترة $(-\infty,0)$ هو انعكاس في المحور الرأسي لبيان h على الفترة $(0,\infty)$



(12) **(a)** $f'(x) = 3x^2 + 4$

$3x^2 + 4 = 7 \implies x = 1$ أو $x = -1$

(b) $f(1) = 16 \qquad f(-1) = 6$

$y(1) = 16 \qquad y(-1) = 2$

النقطة $(1,16)$ هي نقطة مماس.

(13) **(a)** $f'(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$

$f(0) = 0 \qquad f(2) = \frac{8}{3} - 4 = \frac{-4}{3}$

$-\infty \qquad 0 \qquad 2 \qquad \infty$

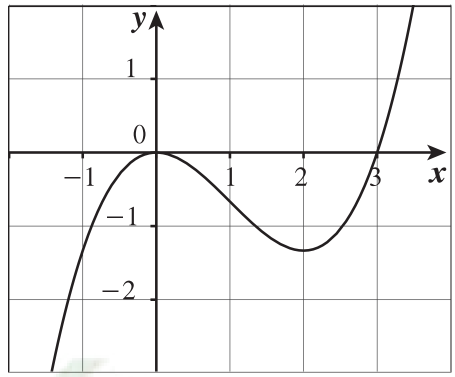
الفترات	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
إشارة f'	$+\,+$	$-\,-$	$+\,+$
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

$$f''(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$$

$$f(1) = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3}$$

النقاط الحرجة: $\left(2,-\frac{4}{3}\right)$ ، $(0,0)$

نقطة الانعطاف: $\left(1,-\frac{2}{3}\right)$



(b) $f'(x) = 3 \implies x^2 - 2x = 3$

$x = -1 \qquad x = 3$

$f(-1) = \frac{-4}{3} \qquad f(3) = 0$

النقطتان $(3,0)$, $\left(-1,-\frac{4}{3}\right)$

(14) (a) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

$-\infty \quad -1 \quad 1 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
إشارة f'	$+\ +$	$-\ -$	$+\ +$
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

$f(-1) = 4 \qquad f(1) = 0$

$g'(x) = 2x - 3$

$-\infty \quad \frac{3}{2} \quad \infty$

الفترات	$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2},\infty\right)$
إشارة g'	$-\ -$	$+\ +$
سلوك الدالة g	↘	↗

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-9}{4}$$

(b) $f(x) = g(x)$

$x^3 - 3x + 2 = x^2 - 3x$

$x^3 - x^2 + 2 = 0$

$x = -1$

$f(-1) = 4$

النقطة المشتركة $(-1, 4)$

(c) مماس على (C)

$f'(-1) = 0$

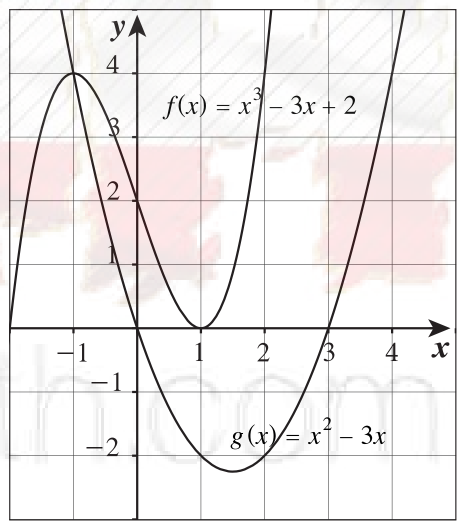
$y = 4$

مماس على (C')

$g'(-1) = -5$

$y = -5x + 9$

(d)



المجموعة A تمارين مقالية

(1) من جدول التوزيع الطبيعي:

(a) $\frac{0.97}{2} = 0.485 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$

(b) $\frac{0.992}{2} = 0.496 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.65$

(2) درجة الثقة 0.95 لذا القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, $\sigma = 0.5$

هامش الخطأ: $E = 1.96 \times \frac{0.5}{\sqrt{1000}} \approx 0.03$

فترة الثقة: $(4.97 , 5.03)$

(3) درجة الثقة = 0.95 لذا القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, $\sigma = 3.5$

هامش الخطأ: $E = 1.96 \times \frac{3.5}{\sqrt{13}} \approx 1.9$

فترة الثقة: $(28.1 , 31.9)$

عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $(n = 13)$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة عشوائية فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

(4) درجة الثقة = 0.95 لذا القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, $\sigma = 119.5$

هامش الخطأ: $E = 1.96 \times \frac{119.5}{\sqrt{40}} \approx 37.0338$

فترة الثقة: $(135.4662 , 209.5338)$

(5) درجة الثقة: 0.95 لذا القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, $S = 2.2$

هامش الخطأ: $E = 1.96 \times \frac{2.2}{\sqrt{80}} \approx 0.48$

فترة الثقة: $(4.32 , 5.28)$

(6) درجة الثقة: 0.95، $n = 16 < 30$، درجات الحرية = 15، $S = \sqrt{15}$

القيمة الحرجة: $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.132$

هامش الخطأ: $E = 2.132 \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} \approx 2.0643$

فترة الثقة: $(10.9357 , 15.0643)$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) **(2)** (b) **(3)** (a) **(4)** (c) **(5)** (d)

(6) (d) **(7)** (b) **(8)** (b) **(9)** (a)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0 : \mu = 16$ مقابل الفرض البديل: $H_1 : \mu \neq 16$

$\sigma = 1.4$ معلومة، $n = 25$، $\bar{x} = 15$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{15 - 16}{\frac{1.4}{\sqrt{25}}} \approx -3.57$

درجة الثقة = 0.95

فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96\ ,\ 1.96)$

بما أن: $-3.57 \notin (-1.96\ ,\ 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم: $\mu = 16$ ونقبل الفرض البديل: $\mu \neq 16$

(2) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0 : \mu = 300$ مقابل الفرض البديل: $H_1 : \mu \neq 300$

$\sigma = 40$ معلومة، $n = 49$، $\bar{x} = 280$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{280 - 300}{\frac{40}{\sqrt{49}}} = -3.5$

درجة الثقة = 0.95

فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96\ ,\ 1.96)$

بما أن: $-3.5 \notin (-1.96\ ,\ 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم: $\mu = 300$ ونقبل الفرض البديل: $\mu \neq 300$

(3) **(a)** $n = 50$. صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0 : \mu = 35$ مقابل الفرض البديل: $H_1 : \mu \neq 35$

σ غير معلومة، $n = 50$، $\bar{x} = 40$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{40 - 35}{\frac{7}{\sqrt{50}}} \approx 5.0508$

درجة الثقة = 0.95

فتكون: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96\ ,\ 1.96)$

بما أن $5.0508 \notin (-1.96\ ,\ 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم: $H_0 : \mu = 35$ ونقبل الفرض البديل: $H_1 : \mu \neq 35$

(b) $n = 20$ ، صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0 : \mu = 35$ مقابل الفرض البديل: $H_1 : \mu \neq 35$

σ غير معلومة، $n = 20 < 30$ ، $\bar{x} = 280$

الاختبار الإحصائي: $t = \dfrac{40 - 35}{\frac{7}{\sqrt{20}}} \approx 3.1944$

درجات الحرية: $20 - 1 = 19$

درجة الثقة: 0.95، مستوى المعنوية: $\alpha = 0.05$ ، $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{0.05}{2} = 0.025$

من جدول التوزيع t نجد $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.093$

منطقة القبول: $(-2.093\ ,\ 2.093)$

بما أن: $3.1944 \notin (-2.093\ ,\ 2.093)$

القرار: نرفض فرض العدم: $H_0 : \mu = 35$ ونقبل الفرض البديل: $H_1 : \mu \neq 35$

(4) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0 : \mu = 5$ مقابل الفرض البديل: $H_1 : \mu \neq 5$

$n = 100$ ، $S = 1$ ، $\overline{x} = 4.5$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{4.5 - 5}{\dfrac{1}{\sqrt{100}}} = -5$

درجة الثقة $= 0.95$ فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ منطقة القبول: $(-1.96\ ,\ 1.96)$

بما أن $-5 \notin (-1.96\ ,\ 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم: $H_0 : \mu = 5$ ونقبل الفرض البديل: $H_1 : \mu \neq 5$

(5) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0 : \mu = 30$ مقابل الفرض البديل: $H_1 : \mu \neq 30$

$S = 6.5$ ، $n = 150$ ، $\overline{x} = 30.3$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{30.3 - 30}{\dfrac{6.5}{\sqrt{150}}} \approx 0.565$

درجة الثقة $= 0.95$

فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ منطقة القبول: $(-1.96\ ,\ 1.96)$

بما أن $0.565 \in (-1.96\ ,\ 1.96)$

لذا نقبل فرض العدم: $H_0 : \mu = 30$

(6) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0 : \mu = 9\,600$ مقابل الفرض البديل: $H_1 : \mu \neq 9\,600$

$S = 640$ ، $n = 64$ ، $\overline{x} = 9\,480$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{9\,480 - 9\,600}{\dfrac{640}{\sqrt{64}}} = -1.5$

درجة الثقة $= 0.95$ فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96\ ,\ 1.96)$

بما أن $-1.5 \in (-1.96\ ,\ 1.96)$

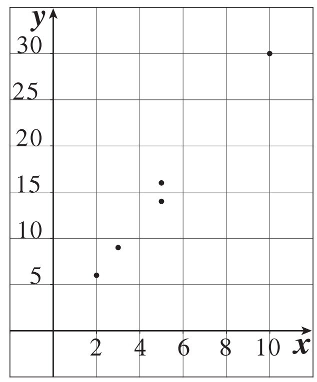
القرار: نقبل فرض العدم: $H_0 : \mu = 9\,600$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (b)
(5) (b)	**(6)** (b)	**(7)** (b)	**(8)** (c)
(9) (a)	**(10)** (c)		

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a)

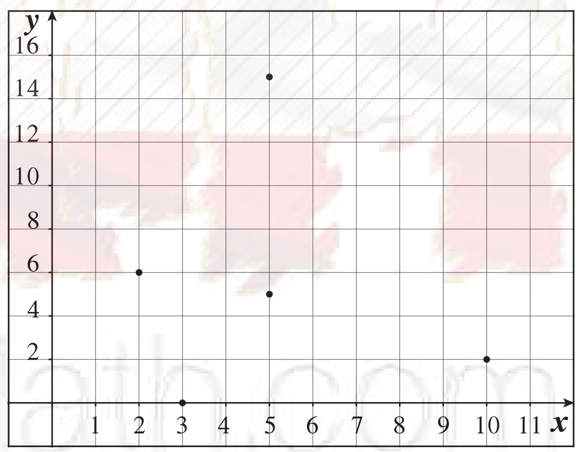


يوجد ارتباط خطي واضح بين x و y .

(b) $n = 5$, $\sum x = 25$, $\sum x^2 = 163$,

$\left(\sum x\right)^2 = 625$, $\sum xy = 489$, $r = 0.997$

(2) (a)

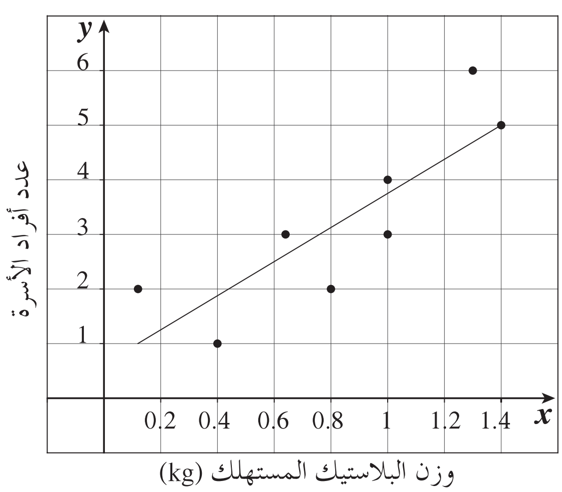


لا يوجد ارتباط خطي واضح بين x و y .

(b) $n = 5$, $\sum x = 25$, $\sum x^2 = 163$,

$\left(\sum x\right)^2 = 625$, $\sum xy = 132$, $r = -0.112$

(3) (a)

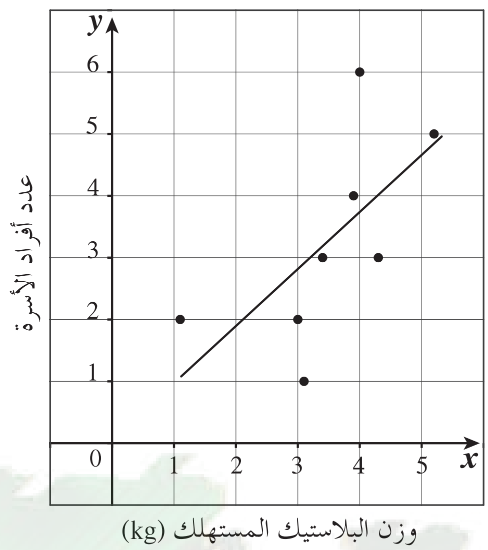


(b) قيمة مُعامل الارتباط الخطي هي: $r = 0.847$

(c) القيمة الحرجة لمُعامل ارتباط بيرسون إذا كان $n = 8$ و $\alpha = 0.05$ هي $r = \pm 0.707$

إذًا يوجد ارتباط خطي وثيق بين المتغيرين.

(4) (a)



(b) قيمة مُعامل الارتباط الخطي هي: $r = 0.6344$

(c) القيمة الحرجة لمُعامل ارتباط بيرسون إذا كان $n = 8$ و $\alpha = 0.05$ هي $r = \pm 0.707$

إذًا لا يوجد ارتباط خطي وثيق بين المتغيرين.

(5) (a) $\widehat{y} = 2x + 1$

(b) $\widehat{y}_7 = 2 \times 7 + 1 = 15$

(c) $\widehat{y}_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$

مقدار الخطأ عند $x = 2$

$|5 - 5| = 0$

(6) (a) $\widehat{y} = -x + 3$

(b) $\widehat{y}_8 = -8 + 3 = -5$

(c) $\widehat{y}_5 = -5 + 3 = -2$

مقدار الخطأ عند $x = 5$

$|-2 + 2| = 0$

(7) (a) $\widehat{y} = 3.246x + 0.55$

(b) $\widehat{y} = 3.246 \times 0.2 + 0.55$

≈ 1.2

أي واحد فقط من أفراد الأسرة.

(8) **(a)** $\widehat{y} = 0.89x + 0.137$

(b) $\widehat{y} = 0.89x \times 4.5 + 0.137$

$= 4.142$

أي 4 من أفراد الأسرة.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (a)
(5) (a)	**(6)** (d)	**(7)** (b)	**(8)** (d)
(9) (a)	**(10)** (b)	**(11)** (c)	**(12)** (a)
(13) (b)	**(14)** (d)	**(15)** (c)	

اختبار الوحدة الرابعة

(1) **(a)** درجة الثقة 93% تناظر مستوى المعنوية $\alpha = 0.07$ أي أن $\frac{\alpha}{2} = 0.035$ باستخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي عند $0.93 \div 2 = 0.465$ فنحصل على $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.815$

(b) درجة الثقة 0.95، $n = 324$، $\overline{x} = 68.5$، $S = 11$، $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ عندها $\overline{x} - E < \mu < \overline{x} + E$

$$68.5 - 1.96\left(\frac{11}{\sqrt{324}}\right) < \mu < 68.5 + 1.96\left(\frac{11}{\sqrt{324}}\right)$$

$$67.302 < \mu < 69.698$$

يمكننا القول إننا واثقون بنسبة 95% أن المتوسط الحسابي لكلفة النقل للموظف الحكومي من منزله إلى العمل وبالعكس بسيارته الخاصة هو بين 67.302 دينارًا كويتيًّا و69.698 دينارًا كويتيًّا أي $67.302 < \mu < 69.698$

(c) بما أن $n = 324 > 30$، أي أنه يمكننا استخدام $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ كقيمة حرجة، لمستوى المعنوية $\alpha = 0.05$، وبما أن $\mu = 69.6$ يقع داخل فترة الثقة $(67.302\ ,\ 69.698)$ فإن قرارنا هو عدم رفض فرضية (دينارًا كويتيًّا) $\mu = 69.6$ متوسط كلفة شهرية.

(d) $E < 1$، $\sigma = 9.5$، $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$، عندها نستخدم القاعدة: $E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$1 > 1.96\left(\frac{9.5}{\sqrt{n}}\right)$، $\sqrt{n} > 1.96(9.5)$

$n > 346.7$ أي 347 موظفًا وأكثر.

(2) **(a)** درجة الثقة 95% أي أن $1 - \alpha = 0.95$ حيث $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

هامش الخطأ:

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$E = \frac{1.96(8.16)}{\sqrt{n}} < 2$$

$$n > \left(\frac{1.96(8.16)}{2}\right)^2 > 63.95$$

أي 64 زائدًا وأكثر

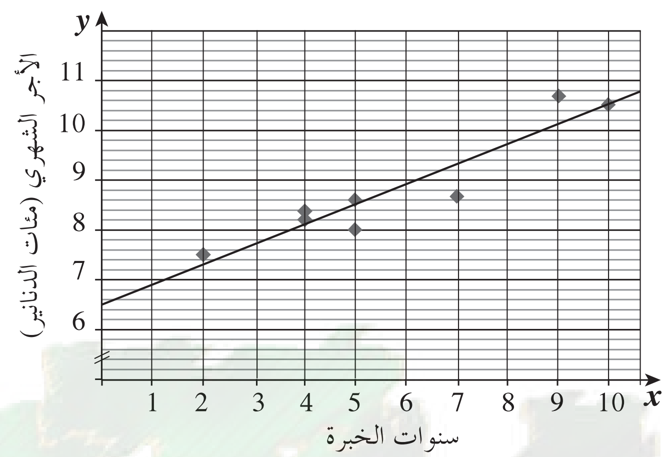
(b) $E = 2\ ,\ \overline{x} = 25.5\ ,\ n = 64$

عندها $\overline{x} - E < \mu < \overline{x} + E$

$23.5 < \mu < 27.5$

يمكننا القول إننا واثقون بنسبة 95% أن المتوسط الحسابي μ لما ينفقه كل زائر للمجمع التجاري في زيارة واحدة هو بين 23.5 وَ 27.5 دينارًا كويتيًّا، أي أن: $23.5 < \mu < 27.5$

(3) (a)



(b) $n = 8$ ، $\sum x = 46$ ، $\sum x^2 = 316$ ، $(\sum x)^2 = 2116$ ، $\sum xy = 426.6$

(c) $r = 0.9388$ ، القيمة الحرجة عند $\alpha = 0.05$ هي $\mu = \pm 0.707$ مما يعني أن هناك ارتباط خطي إيجابي قوي بين x, y

(d) معادلة خط الانحدار: $\widehat{y} = 0.4x + 6.525$

(e) التنبؤ لراتب موظف لديه 8 سنوات خبرة هو $\widehat{y} = 0.4(8) + 6.525$ أي 9.725 مئة دينار أو 973 (دينارًا كويتيًّا).

(4) (a) معادلة خط الانحدار: $\widehat{y} = -0.1513x + 5.0196$

(b) أفضل تنبؤ لعدد أفراد الأسرة هو: 3 أفراد

(5) $E = 1.96 \times \dfrac{1.2}{\sqrt{9}} = 0.784$

فترة الثقة: $(19.216\ ,\ 20.784)$

تمارين إثرائية

(1) $n = 36$ ، $\overline{x} = 11.6$ ، $S = 2.5$ ، $1 - \alpha = 0.9$ أي $\alpha = 0.1$ مما يعطينا $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$ كقيمة حرجة أي أن:

$\overline{x} - E < \mu < \overline{x} + E$

$11.6 - 1.645\left(\dfrac{2.5}{\sqrt{36}}\right) < \mu < 11.6 + 1.645\left(\dfrac{2.5}{\sqrt{36}}\right)$

$11.6 - 0.685 < \mu < 11.6 + 0.685$

$10.915 < \mu < 12.285$

يمكننا القول إننا واثقون بنسبة 90% أن المتوسط الحسابي μ لمعدل الطالب في امتحان الرياضيات بين 10.915 و 12.285

(2) $E = 150$, $\sigma = 800$, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$150 = (2.575)\left(\frac{800}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\sqrt{n} = (2.575) \times \frac{800}{150} = 13.733$$

$$n = (13.733)^2 = 188.6 \approx 189 \quad (\text{مريضًا})$$

إذًا حجم العينة المناسب هو 189 مريضًا.

(3) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0 : \mu = 4.325$ مقابل الفرض البديل: $H_1 : \mu \neq 4.325$

$\because \alpha = 0.05$ $\therefore$ درجة الثقة 0.95 فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96 , 1.96)$

$\overline{x} = 4.101$ ، $n = 64$ أي $n > 30$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{4.101 - 4.325}{\dfrac{0.842}{\sqrt{64}}} = -\dfrac{0.224}{0.10524} \approx -2.1283$

بما أن $-2.1283 \notin (-1.96 , 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم $\mu = 4.325$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 4.325$

(4) **(a)** $\widehat{y} = 0.7x - 0.1$

(b) 4.5 تمثل 4 500 دينار

$$\widehat{y} = 0.7(4.5) - 0.1 = 3.05$$

حجم المبيعات هو حوالى 30 500 دينار.

(5) التقدير بنقطة للمعلمة المجهولة μ هو المتوسط الحسابي للعينة العشوائية $\overline{x} = 17$

(6) درجة الثقة = 0.95 فيكون مستوى الثقة: $\alpha = 0.05$ والقيمة الحرجة 1.96

هامش الخطأ: $E = 1.96 \times \dfrac{3}{\sqrt{130}}$

$E \approx 0.516$

فترة الثقة للمعلمة المجهولة μ هي: $(27.484 , 28.516)$

(7) درجة الثقة 0.95 فيكون مستوى الثقة: $\alpha = 0.05$ أي $\dfrac{\alpha}{2} = 0.025$

وبما أن $n = 25 < 30$ لذا درجات الحرية $25 - 1 = 24$ والقيمة الحرجة: $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.064$

هامش الخطأ: $E = 2.064 \times \dfrac{6}{5} = 2.4768$

فترة الثقة للمعلمة μ هي: $(19.5232 , 24.4768)$

(8) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 290\,000$ مقابل الفرض البديل $H_1: \mu \neq 290\,000$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{300\,000 - 290\,000}{\dfrac{70\,000}{\sqrt{1500}}}$

$Z \approx 5.533$

مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ فتكون منطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$ $\because$ $5.533 \notin (-1.96\ ,\ 1.96)$

$\therefore$ القرار هو رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل $H_1: \mu \neq 290\,000$

(9) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 10$ مقابل الفرض البديل $H_1: \mu \neq 10$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{9 - 10}{\dfrac{4}{\sqrt{40}}} \approx -1.58$

مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ فتكون منطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$

$\because$ $-1.58 \in (-1.96\ ,\ 1.96)$

$\therefore$ القرار هو قبول فرض العدم: $H_0: \mu = 10$

(10) **(a)** صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 150$ مقابل الفرض البديل $H_1: \mu \neq 150$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{143 - 150}{\dfrac{10}{\sqrt{40}}}$

≈ -4.427

مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ فتكون منطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$

$\because$ $-4.427 \notin (-1.96\ ,\ 1.96)$

$\therefore$ القرار هو رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل $H_1: \mu \neq 150$

(b) $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{0.05}{2} = 0.025$، بما أن $n = 7$ فتكون درجات الحرية $7 - 1 = 6$، ومنطقة القبول: $(-2.447\ ,\ 2,447)$

الاختبار الإحصائي: $t = \dfrac{143 - 150}{\dfrac{8}{\sqrt{7}}}$

≈ -2.315

$\because$ $-2.315 \in (-2.447\ ,\ 2.447)$

$\therefore$ القرار هو قبول فرض العدم $H_0: \mu = 150$

(11) درجة الثقة 0.90 فتكون القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$

هامش الخطأ: $E = 1.645 \times \dfrac{2.5}{6}$

≈ 0.6854

فترة الثقة: $(10.9146 ، 12.2854)$

(12) $r = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \times \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$

$r \approx -0.243$ سلبي ضعيف

(13) $r \approx 0.825$ موجب قوي.

(14) $r \approx 0.612$ موجب متوسط.

(15) $r \approx 0.4286$ موجب ضعيف.