التاريخ / / ٢٠

وزارة التربية

الإدارة العامة لمنطقة الفروانية التعليمية

ثانوية سلمان الفارسي للبنين

قسم الرياضيات

٢٠١٩/ ٢٠٢٠

أوراق عمل الصف الحادي عشر علمي

الفصل الدراسي الثاني

*الوحدة الثامنة *

*حساب المثلثات *

هذه الأوراق لاتغني عن الكتاب المدرسي

إعداد قسم الرياضيات

التاريخ / / ٢٠

8–1 التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)

1 تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية.

2 $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0, 2\pi]$

3 $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

مثال (1)

أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

(a) $y = -2\cos 5x$

(c) $y = 3\sin\frac{x}{3}$

التاريخ   /   / ٢٠

مثال (2)

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a \sin bx$ إذا كانت:

a الدورة هي $\frac{\pi}{2}$ ، $a = 3$

b الدورة هي 2π ، $a = -\frac{1}{2}$

2 اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a \cos bx$ إذا كانت:

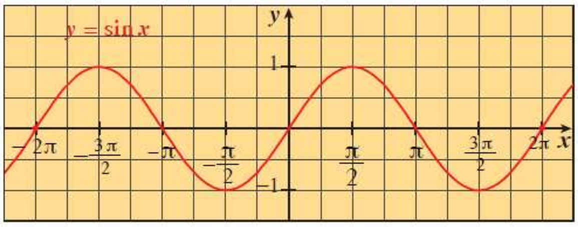
c الدورة هي 2 ، $a = 1$

b الدورة هي π ، $a = 0.25$

التاريخ   /   / ٢٠

التمثيل البياني للدوال المثلثية

أوّلًا: دالة الجيب



1. لأي عدد صحيح n فإن $\sin(n\pi) = 0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x) = \sin x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$
3. دالة الجيب دالة فردية لأن: $\sin(-x) = -\sin x\,, \forall x \in \mathbb{R}$
4. منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل.
5. سعة الدالة هي: $\frac{\max f - \min f}{2}$

مثال (3)

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = 3\sin 2x$

التاريخ / / ٢٠

b $y = -2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) , -4\pi \leq x \leq 4\pi$

3 أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

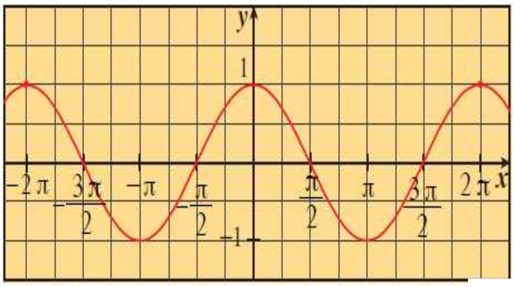
b $y = -4\sin x \ , \ x \in [-\pi \ , \ 2\pi]$

التاريخ   /   / ٢٠

ثانيًا: دالة جيب التمام

من بيان دالة جيب التمام نلاحظ أن:

1. لأي عدد صحيح n فإن $\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x)=\cos x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x=2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x=\pi+2n\pi$
3. دالة جيب التمام دالة زوجية لأن: $\cos(-x)=\cos x \ , \ \forall x\in\mathbb{R}$
4. محور الصادات هو خط تناظر لمنحنى الدالة.
5. سعة الدالة هي: $\frac{\max f-\min f}{2}$



مثال (4)

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي، ثم ارسم بيانها.

a $y=2\cos 4x$

حاول أن تحل

4 أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها.

b $y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)\ ,\ 0 \leq x \leq 2\pi$

التاريخ / / ٢٠

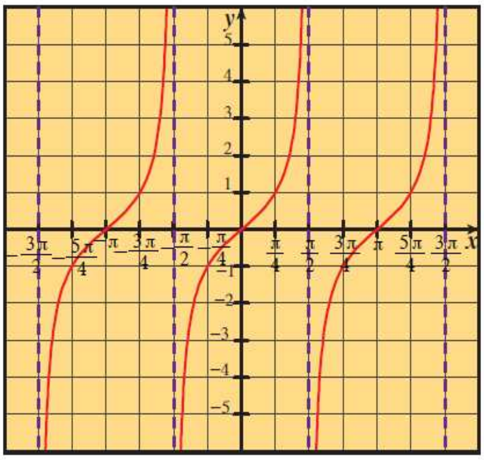
حاول أن تحل

4 أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها.

b $y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)\ ,\ x \in [-3\pi\ ,\ 3\pi]$

التاريخ   /   /   ٢٠

ثالثًا: دالة الظل



1. ليس لها سعة.
2. لأي عدد صحيح n فإن $\tan(n\pi) = 0$
3. لأي عدد صحيح n فإن $\tan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ غير معرف.

   وتسمى المستقيمات $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ محاذيات رأسية لبيان الدالة $y = \tan x$
4. دالة فردية لأن: $\tan(-x) = -\tan x \quad , \quad \forall x \in D$
5. منحناها متناظر حول نقطة الأصل.

وبصفة عامة: الدالة $y = a\tan bx$،

دورتها: $\frac{\pi}{|b|}$ أي في الفترة $\left(\frac{-\pi}{2b} , \frac{\pi}{2b}\right)$ وتكرر منحناها على مجالها.

حاول أن تحل

5. أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

b $y = \frac{1}{2}\tan x$

التاريخ   /   /   ٢٠

مثال (5)

أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها.

a $y = \tan 2x \;,\; x \in \left(\dfrac{-\pi}{4} \,,\, \dfrac{3\pi}{4}\right)$

التاريخ / / ٢٠

خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

الخاصية	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
الدورة	2π	2π	π
المجال	$(-\infty\ ,\ \infty)$	$(-\infty\ ,\ \infty)$	$\mathbb{R}-\left\{x\ ,x=\frac{\pi}{2}+n\pi\right\}$
المدى	$[-1\ ,\ 1]$	$[-1\ ,\ 1]$	$(-\infty\ ,\ \infty)$
الأصفار	$x=n\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$	$x=n\pi$
زوجية أو فردية	فردية	زوجية	فردية

في التمارين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) معادلة الدالة المثلثية $y=a\sin(b\theta)$ حيث السعة 5 والدورة 3π هي $y=5\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ (a) (b)

(2) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{2}$ وسعتها 3 يمكن أن تكون $y=3\sin\left(\frac{\pi\theta}{2}\right)$ (a) (b)

(3) الدالة $y=3\tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ دورتها $\frac{4}{3}\pi$ (a) (b)

(4) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{3}$ وسعتها 4 يمكن أن تكون $y=-4\cos(6x)$ (a) (b)

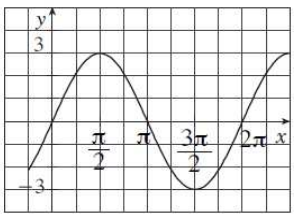
(5) سعة الدالة $y=-5\cos 2x$ هي -5 (a) (b)

(6) في الدالة f حيث $f(x)=a\cos bx$ يكون: $2|a|=\max f+\min f$ (a) (b)

(7) الدالتان f, g حيث $g(x)=\tan 4x$ ، $f(x)=\cos 8x$ لهما نفس الدورة. (a) (b)

في التمارين (8–17)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(8) البيان التالي يمثل بيان الدالة:



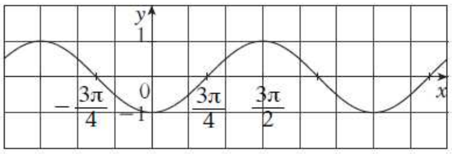
(a) $f(x)=3\cos x$ (b) $f(x)=3\sin x$

(c) $f(x)=-3\sin x$ (d) $f(x)=\sin 3x$

(9) لتكن $f(x)=3\tan 2x$ فإن:

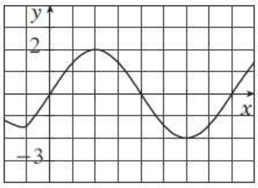
(a) السعة = 1 (b) السعة = 2 (c) السعة = 3 (d) f ليس لها سعة

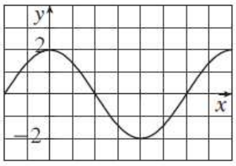
(11) ليكن g دالة دورية بيانها كما في الشكل التالي فإن الدورة تساوي:

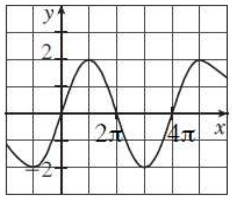


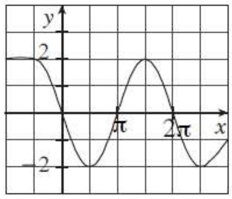
(a) π (b) 2π (c) 3π (d) $\frac{6\pi}{4}$

(12) لتكن الدالة g حيث: $g(x) = a \sin bx$ فإن بيان g لا يمكن أن يكون:

(a)


(b)


(c)


(d)


(13) معادلة الدالة المثلثية $y = a\cos(bx)$ حيث السعة 4 والدورة 6 يمكن أن تكون:

(a) $y = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ (b) $y = -4\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

(c) $y = -4\cos\left(\frac{3}{\pi}x\right)$ (d) $y = 4\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

(14) الدالة $y = a\cos(bx)$ حيث $a = 2$ ودورتها $\frac{\pi}{4}$ يمكن أن تكون:

(a) $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ (b) $y = 8\cos(8x)$

(c) $y = 2\cos(8x)$ (d) $y = 8\cos\left(\frac{x}{4}\right)$

(15) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(bx)$ حيث السعة 3 والدورة $\frac{\pi}{2}$ يمكن أن تكون:

(a) $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ (b) $y = 3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$

(c) $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ (d) $y = 3\sin(4x)$ أو $y = -3\sin(4x)$

(16) معادلة الدالة المثلثية $y = \tan(bx)$ حيث الدورة $\frac{3}{4}$ يمكن أن تكون:

(a) $y = \tan\left(\frac{4}{3}\pi x\right)$ (b) $y = \tan\left(\frac{3}{4}x\right)$

(c) $y = \tan\left(\frac{4}{3}x\right)$ (d) $y = \tan\left(\frac{3}{4}\pi x\right)$

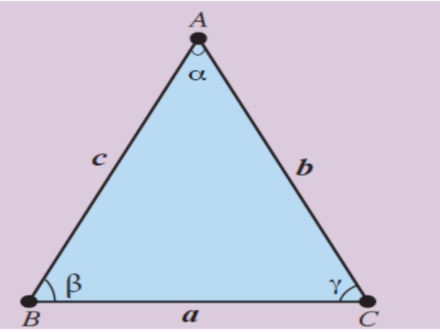
(17) في الدالة المثلثية $y = -2\sin\left(\frac{3}{5}x\right)$ السعة والدورة هما:

(a) $-2\ ,\ \frac{3\pi}{5}$ (b) $2\ ,\ \frac{10\pi}{3}$

(c) $2\ ,\ \frac{3\pi}{5}$ (d) $2\ ,\ \frac{2\pi}{15}$

التاريخ / / ٢٠

8–3 قانون الجيب



قانون الجيب

في أي مثلث ABC:

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

استخدام قانون الجيب Using the Law of Sine

يسمح قانون الجيب بحل مثلث إذا علم طول ضلع وقياس زاويتين.

مثال (1)

حل ΔABC حيث: $\alpha=40^\circ\ ,\ \beta=60^\circ\ ,\ a=4\text{ cm}$

حاول أن تحل

1 حل ΔABC حيث: $\alpha = 36^\circ \ , \ \beta = 48^\circ \ , \ a = 8\text{ cm}$

الحالة الغامضة The Ambiguous Case

الحالة الغامضة هي الحالة التي يكون معلوم فيها طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

مثال (2)

حل ΔABC حيث: $a = 3\text{ cm}$, $b = 2\text{ cm}$, $\alpha = 40^\circ$

حاول أن تحل

2 حل ΔABC حيث: $a = 7\ \text{cm}\ ,\ b = 6\ \text{cm}\ ,\ \alpha = 26.3^\circ$

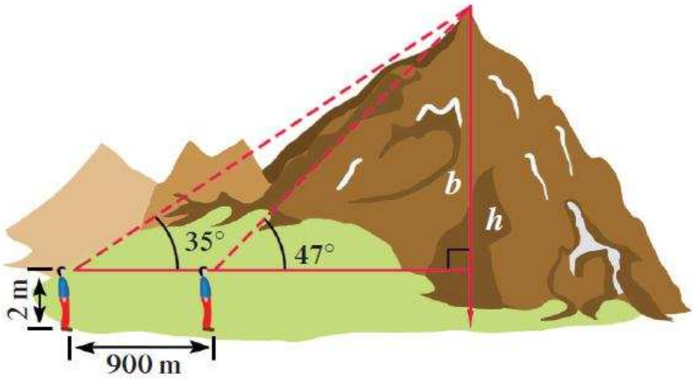
مثال (3)

حل ΔABC حيث: $\alpha = 30^\circ$, $b = 8\ \text{cm}$, $a = 5\ \text{cm}$

حاول أن تحل

3 حل ΔABC حيث: $a = 6\text{ cm}\ ,\ b = 7\text{ cm}\ ,\ \alpha = 45^\circ$

التاريخ   /   /   ٢٠



مثال (4)   **تطبيقات حياتية**

لمعرفة ارتفاع جبل، قام طوبوغرافي بأخذ قياسين للذروة من نقطتين تبعدان 900 m عن بعضهما بعضًا حيث بلغ قياس كل من الزاويتين 47^{o} , 35^{o}

إذا كان ارتفاع مستوى النظر الأفقي عن سطح الأرض 2 m، فما ارتفاع الجبل؟

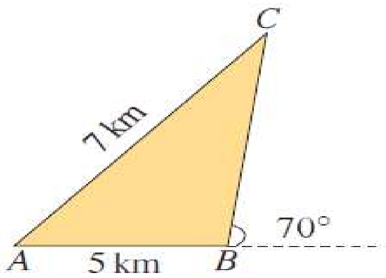
الحل:

حاول أن تحل

5 يمثل الشكل المقابل مسار اليخوت في أحد السباقات انطلاقًا من النقطة A إلى النقطة B

ثم النقطة C ثم إلى النقطة A

أوجد مسافة السباق.



في التمارين (3–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 100^\circ$, $m(\widehat{B}) = 30^\circ$, $BC = 20\text{ cm}$ فإنّ: $AC = 10.154\text{ cm}$ (b) (a)

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{B}) = 80^\circ$, $AB = 12\text{ cm}$, $AC = 16\text{ cm}$ فإنّ: $m(\widehat{C}) = 50^\circ$ (b) (a)

(3) في كل مثلث ABC يكون: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$ (b) (a)

في التمارين (9–4)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(4) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 80°$, $m(\widehat{B}) = 40°$, $AC = 10\text{ cm}$ فإنّ طولي $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ يساويان:

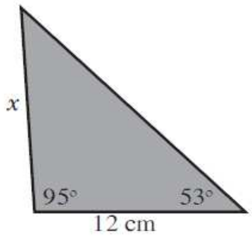
(a) 7.43 cm , 15.32 cm

(b) 6.53 cm , 13.47 cm

(c) 13.47 cm , 15.32 cm

(d) 7.43 cm , 6.53 cm

(5) في المثلث المقابل، x تساوي حوالى:



(a) 8.6 cm

(b) 15 cm

(c) 18.1 cm

(d) 19.2 cm

(6) مثلث قياسات زواياه: $50°, 60°, 70°$، طول أصغر ضلع فيه هو 9 cm
طول أطول ضلع حوالى:

(a) 11 cm

(b) 11.5 cm

(c) 12 cm

(d) 12.5 cm

(7) القياسات المعطاة في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 56°$, $AC = 23\text{ cm}$, $AB = 19\text{ cm}$، طول $\overline{BC}$ يساوي:

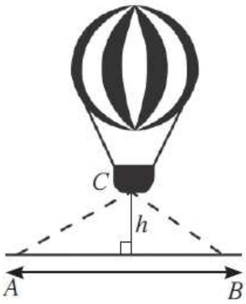
(a) 12 cm

(b) 18 cm

(c) 19 cm

(d) لا يمكن استخدام قانون الجيب

(8) رأى شخصان، أحدهما يقف عند النقطة A والثاني عند النقطة B، منطادًا، حيث المسافة بينهما 3 km. إذا كان قياس زاوية الارتفاع عند النقطة A هي $28°$ وقياس زاوية الارتفاع عند النقطة B هي $37°$، فإنّ ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض هو:



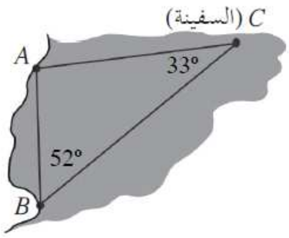
(a) $h \approx 1200\text{ m}$

(b) $h \approx 2\,500\text{ m}$

(c) $h \approx 940\text{ m}$

(d) $h \approx 880\text{ m}$

(9) تقع منارتان A , B على خط واحد من الشمال إلى الجنوب وتساوي المسافة بينهما 20 km،
إذا كان قائد السفينة موجود في الموقع C بحيث إن $m(A\widehat{C}B) = 33°$
وعامل الراديو موجود في الموقع B بحيث إن: $m(A\widehat{B}C) = 52°$،
فإن المسافة بين السفينة وكل من المنارتين تساوي:



(a) $AC \approx 13.8\text{ km}, BC \approx 10.9\text{ km}$

(b) $AC \approx 32.6\text{ km}, BC \approx 36.6\text{ km}$

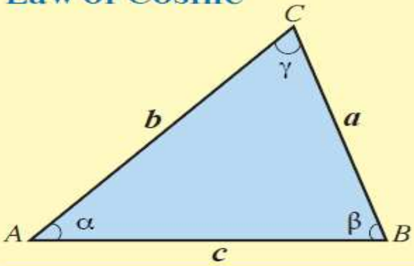
(c) $AC \approx 28.9\text{ km}, BC \approx 10.9\text{ km}$

(d) $AC \approx 28.9\text{ km}, BC \approx 36.6\text{ km}$

التاريخ / / ٢٠

8—4 قانون جيب التمام

Law of Cosine



قانون جيب التمام

في ΔABC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

استخدام قانون جيب التمام Using the Law of Cosine

يسمح قانون جيب التمام بحل مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

مثال (1)

حل ΔABC حيث: $a = 2\,\text{cm}\ ,\ b = 3\,\text{cm}\ ,\ \gamma = 60^\circ$

حاول أن تحل

1 حل ΔABC حيث: $a = 11\,\text{cm}\ ,\ b = 5\,\text{cm}\ ,\ \gamma = 20^{\circ}$

التاريخ / / ٢٠

يسمح قانون جيب التمام أيضًا بحل مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة.

معلومة:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

مثال (2)

حل ΔABC حيث: $a=4\,\text{cm}$, $b=3\,\text{cm}$, $c=6\,\text{cm}$

التاريخ / / ٢٠

حاول أن تحل

2 في ΔABC حيث: $a = 9\text{ cm}\ ,\ b = 7\text{ cm}\ ,\ c = 5\text{ cm}$

أوجد قياس الزاوية الأكبر.

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $AB = 24\text{ cm}\ ,\ AC = 19\text{ cm}\ ,\ BC = 27\text{ cm}$ فإنّ: $m(\widehat{A}) \approx 76.82^\circ$ (a) (b)

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 60^\circ\ ,\ BC = 44\text{ cm}\ ,\ AB = 20\text{ cm}$ فإنّ: $AC \approx 50.5\text{ cm}$ (a) (b)

(3) في المثلث ABC: $b^2 + c^2 < 2bc\cos A$ (a) (b)

(4) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث تساوي $5\text{ cm}, 8\text{ cm}, 12\text{ cm}$ فإن قياس الزاوية الكبرى في هذا المثلث يساوي حوالى 133.4° (a) (b)

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) في المثلث ABC : $m(\widehat{C}) = 60^\circ$, $AC = 10\,cm$, $BC = 20\,cm$ فإن طول $\overline{AB}$ يساوي:

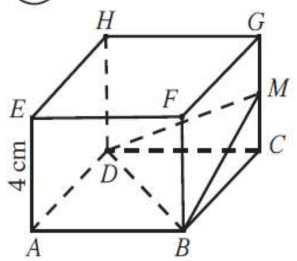
(a) $AB = 10\sqrt{7}\,cm$ (b) $AB = 10\sqrt{3}\,cm$ (c) $AB = 12.4\,cm$ (d) $AB = 29\,cm$

(6) في المثلث ABC : $m(\widehat{A}) = 120^\circ$, $AB = 30\,cm$, $AC = 40\,cm$ فإنّ طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) $BC \approx 60.8\,cm$ (b) $BC \approx 36\,cm$ (c) $BC \approx 68\,cm$ (d) $BC \approx 21\,cm$

(7) إذا كان $BC = 25\,cm$, $AC = 17\,cm$, $AB = 12\,cm$ فإنّ قياس الزاوية الكبرى في المثلث ABC يساوي حوالى:

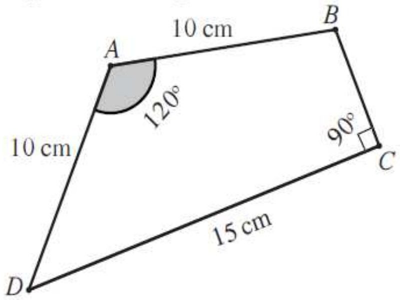
(a) 118° (b) 110° (c) 125° (d) 100°



(8) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 4 cm، النقطة M منتصف الضلع $\overline{GC}$

فإن: قياس الزاوية $(D\widehat{M}B)$ يساوي:

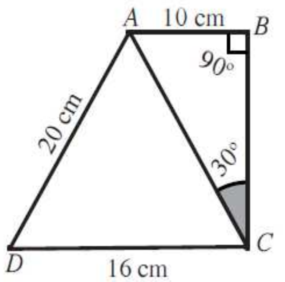
(a) 78.46° (b) 86.82° (c) 11.54° (d) 3.2°



(9) في الشكل الرباعي $ABCD$ طول $\overline{BC}$ هو:

(a) 12.16 cm (b) 8.66 cm

(c) 11.5 cm (d) 13.7 cm



(10) في الشكل الرباعي $ABCD$، قياس الزاوية $(B\widehat{A}D)$ يساوي تقريبًا:

(a) 110° (b) 104°

(c) 107° (d) 120°

التاريخ / / ٢٠

8–5 مساحة المثلث

قاعدة هيرون

تعطى مساحة مثلث ABC أطوال أضلاعه a, b, c بالقاعدة:

$$\textbf{Area}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث: $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \textbf{semiperimeter}$ (نصف محيط المثلث)

حاول أن تحل

1 أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 5\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $c = 8\,\text{cm}$

حاول أن تحل

2 أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 4\,\text{cm}\ ,\ b = 4\,\text{cm}\ ,\ c = 3\,\text{cm}$

مثال (3)

في أحد سباقات المراكب الشراعية وضعت اللجنة المنظمة شرطًا ألا تتعدى مساحة شراع المركب $7.5\ m^2$.

إذا كان شراع أحد المراكب على شكل مثلث أبعاده: $6\ m$, $5\ m$, $3\ m$

فهل يسمح له بالمشاركة في السباق؟

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا عرفت أطوال أضلاع مثلث فيمكن استخدام قاعدة هيرون لإيجاد مساحته. (a) (b)

(2) لا يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية قياسات زواياه الثلاثة. (a) (b)

(3) لا يمكن استخدام قاعدة هيرون إذا كان المثلث قائم الزاوية. (a) (b)

(4) إن معرفة قياس إحدى زوايا مثلث هو شرط ضروري لإيجاد مساحته. (a) (b)

(5) إذا كان a, b طولا ضلعين متتاليين في متوازي أضلاع وθ قياس الزاوية بينهما فإن مساحة متوازي الأضلاع تساوي $ab\sin\theta$ (a) (b)

(6) في المثلث ABC: $AC = 9\,\text{cm}$, $AB = 7\,\text{cm}$, $BC = 5\,\text{cm}$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالى $15\,\text{cm}^2$ (a) (b)

في التمارين (7–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كان: $m(\widehat{C}) = 40^\circ$, $b = 3\,\text{cm}$, $a = 2\,\text{cm}$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالى:

(a) $4.6\,\text{cm}^2$ (b) $3.86\,\text{cm}^2$

(c) $1.93\,\text{cm}^2$ (d) $2.3\,\text{cm}^2$

(8) مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه $9\,\text{cm}$, $8\,\text{cm}$, $7\,\text{cm}$ هي:

(a) $6\sqrt{15}\,\text{cm}^2$ (b) $12\sqrt{5}\,\text{cm}^2$

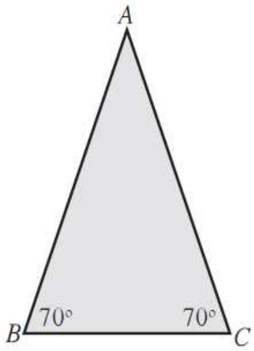
(c) $16\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ (d) $18\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

(9) مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه a هي:

(a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\,\text{units}^2$ (b) $a^2\,\text{units}^2$

(c) $\frac{1}{2}a^2\text{units}^2$ (d) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\,\text{units}^2$

(10) إذا كانت مساحة المثلث ABC تساوي حوالى $8\,\text{cm}^2$ فإن طول $\overline{AB}$ هو حوالى:



(a) $5\,\text{cm}$ (b) $8\,\text{cm}$

(c) $4\,\text{cm}$ (d) $6\,\text{cm}$