الرياضيات

الكورس الثاني

10

UULA.COM 2021-2022

UULA

الرياضيات

الكورس الثاني

10

المـــــنـــــقـــــذ

أقوى مذكرة صارت الحين أقوى و أقوى مع خاصية **المنقذ** للمساعدة الفورية

شنو المنقذ ؟
امسح الباركود بكاميرا تلفونك
وتعرف على طريقة استخدام المنقذ

UULA

شنو فايدة هالخاصية ؟
أول ما تحتاج مساعدة بالمادة , المنقذ بينقذك .

امسح الباركود بكاميرا التلفون أو اضغط عليه إذا كنت فاتح المذكرة من جهازك و يطلع لك فيديو الشرح.

قائمة المحتوى

01 هندسة الدائرة

5 مماس الدائرة
13 الأوتار والأقواس
19 الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

02 المصفوفات

31 تنظيم البيانات في مصفوفات
34 جمع وطرح المصفوفات
38 ضرب المصفوفات
42 مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)

03 حساب المثلثات

47 دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي و الدوال المثلثية (الدائرية)
50 العلاقات بين الدوال المثلثية (1)
54 العلاقات بين الدوال المثلثية (2)

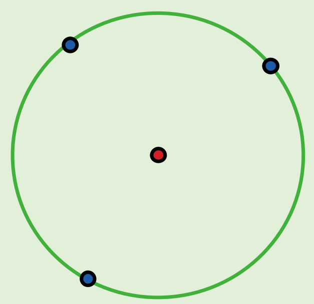
04 الهندسة التحليلية

63 ميل الخط المستقيم
66 معادلة الخط المستقيم
70 البعد بين نقطة ومستقيم
73 معادلة الدائرة

الدائرة – مماس الدائرة

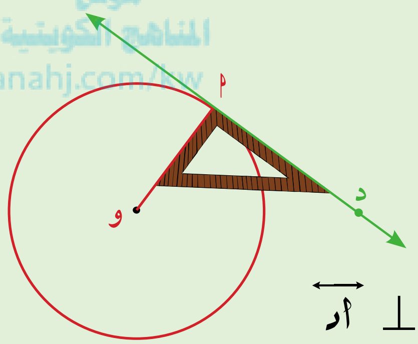
نظرية (١):

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة وحيدة

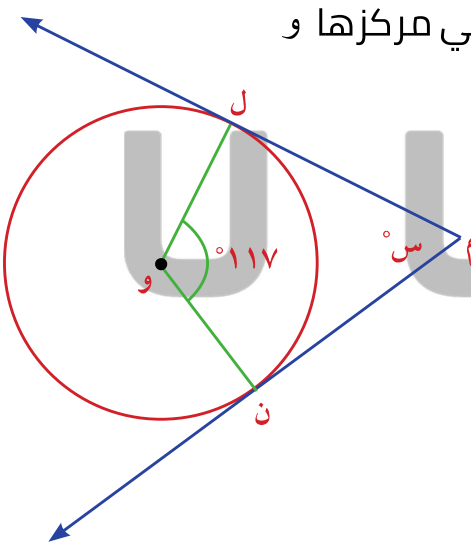


نظرية (٢):

المماس عمودي على نصف قطر التماس إذا كان مستقيم مماس لدائرة فانه يكون متعامدا مع نصف القطر المار بنقطة التماس أي أن $\overline{\text{وأ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أد}}$



س في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{مل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{من}}$ مماسان للدائرة التي مركزها و
أوجد قياس $\widehat{\text{لمن}}$



∵ $\overleftrightarrow{\text{مل}}$ مماس ، $\overline{\text{لو}}$ نصف قطر التماس

∴ ق$(\hat{\text{ل}})$ = ٩٠° (نظرية)

∵ $\overleftrightarrow{\text{من}}$ مماس، $\overline{\text{نو}}$ نصف قطر التماس

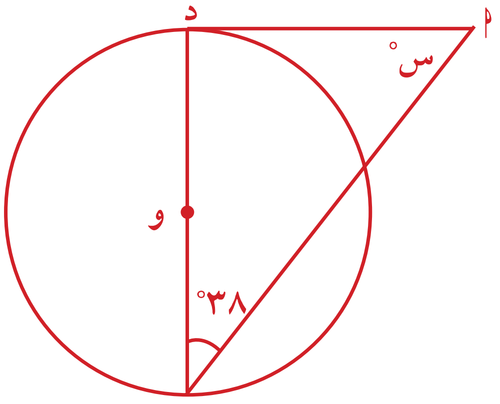
∴ ق$(\hat{\text{ن}})$ = ٩٠° (نظرية)

س = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ١١٧) = ٦٣°

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠°

∴ ق$(\widehat{\text{لمن}})$ = ٦٣°

س في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{أد}$ مماس للدائرة التي مركزها و أوجد قيمة س



الحل

∵ $\overleftrightarrow{أد}$ مماس ، $\overline{و د}$ نصف قطر التماس

∴ ق($\hat{د}$) = ٩٠° نظريــــــة

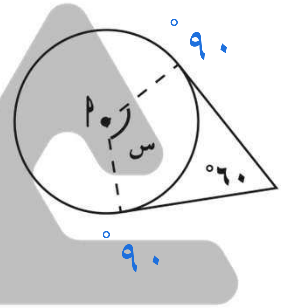
س = ١٨٠° − (٩٠ + ٣٨) = ٥٢°

مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

∴ ق($\hat{أ}$) = ٥٢°

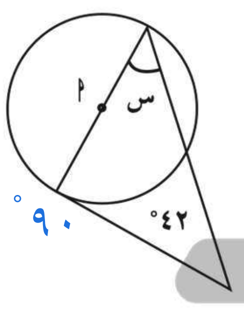
س في التمرينين (١-٢)، القطع المستقيمة تمس الدوائر، أ مركز كل دائرة.
أوجد قيمة س

(١)



س = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٦٠)
= ١٢٠°

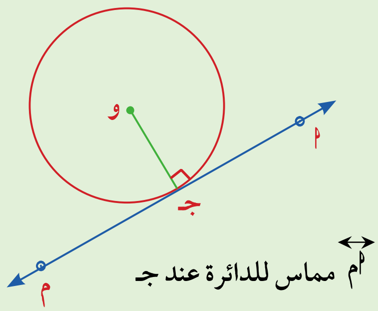
(٢)



س = ١٨٠° − (٩٠ + ٤٢)
= ٤٨°

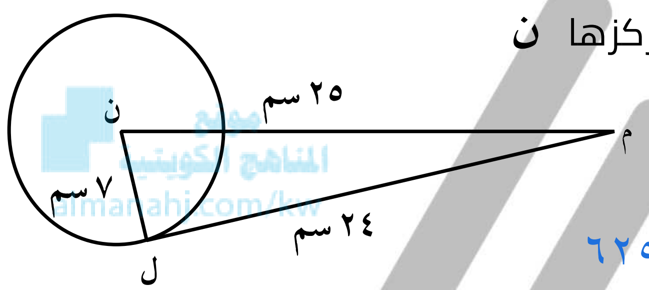
نظرية (٣) :

المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي الى الدائرة يكون مماسا لهذه الدائرة عند هذه النقطة



تمرن

س أثبت أن $\overleftrightarrow{لم}$ مماس للدائرة التي مركزها **ن**



الحل :

$(م ن)^{٢} = ٢٥^{٢} = ٦٢٥$

$(م ل)^{٢} + (ل ن)^{٢} = ٢٤^{٢} + ٧^{٢} = ٦٢٥$

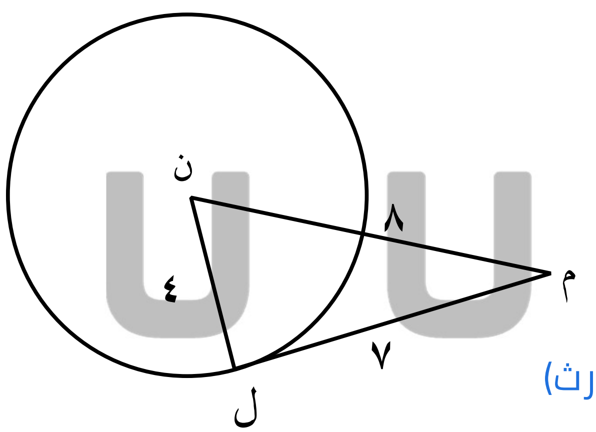
∴ $\triangle$ م ل ن مثلث قائم في $\hat{ل}$ عكس فيثاغورث

∴ $\overline{م ل} \perp \overline{ل ن}$

∴ $\overline{م ل}$ مماس للدائرة (نظرية)

س في الشكل المقابل :

هل $\overleftrightarrow{لم}$ مماس للدائرة؟ فسر اجابتك



$(م ن)^{٢} = ٨^{٢} = ٦٤$

$(م ل)^{٢} + (ل ن)^{٢} = ٧^{٢} + ٤^{٢} = ٦٥$

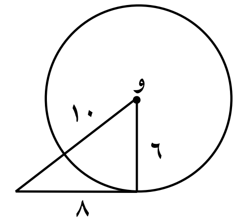
∴ $\triangle$ م ل ن مثلث غير قائم (عكس فيثاغورث)

$ق(\hat{ل}) \neq ٩٠^{\circ}$

∴ $\overline{م ل}$ ليس مماس للدائرة (نظرية)

س في التمرينين، حدد ما إذا كان المستقيم مماسا للدائرة التي مركزها و.

(٣)

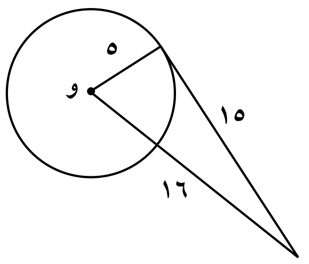


$(١٠)^٢ = ١٠٠$

$٦^٢ + ٨^٢ = ١٠٠$

مماس

(٤)



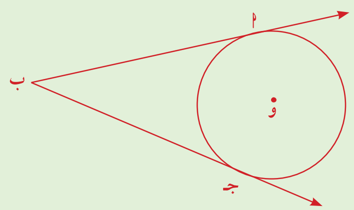
$١٦^٢ = ٢٥٦$

$٥^٢ + ١٥^٢ = ٢٥٠$

ليس مماس

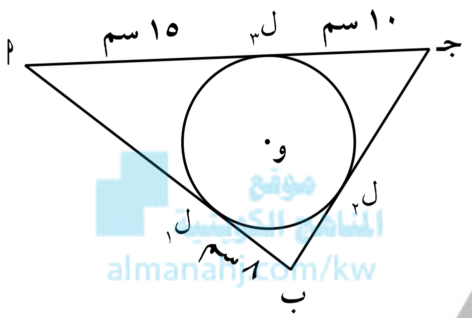
نظرية (٤):

القطعتان المماستان لدائرة و المرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان $\overline{بأ} \cong \overline{جب}$



تمرن

س في الشكل المجاور أوجد محيط المثلث أ ب جـ



∵ $\overleftrightarrow{بأ}$ مماس للدائرة في ل$_1$ ، $\overleftrightarrow{بجـ}$ مماس للدائرة في ل$_2$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس للدائرة في ل$_3$

∴ أل$_1$ = أل$_3$ = ١٥ سم   نظرية

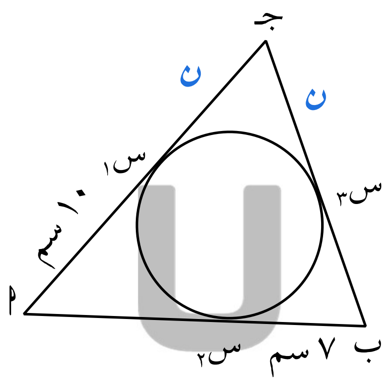
بل$_1$ = بل$_2$ = ٨ سم   نظرية

جـل$_2$ = جـل$_3$ = ١٠ سم   نظرية

محيط المثلث أبجـ = أب + بجـ + أجـ

= ١٥ + ١٥ + ٨ + ٨ + ١٠ + ١٠ = ٦٦ سم

س في الشكل المجاور إذا كان محيط المثلث أ ب جـ يساوي (٥٠) سم فاحسب طول $\overline{بجـ}$



∵ $\overleftrightarrow{بأ}$ مماس للدائرة في س$_2$ ، $\overleftrightarrow{بجـ}$ مماس للدائرة في س$_3$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماس للدائرة في س$_1$

∴ أس$_1$ = أس$_2$ = ١٠ سم   نظرية

بس$_2$ = بس$_3$ = ٧ سم   نظرية

جـس$_1$ = جـس$_3$ = ن   نظرية

محيط المثلث أ ب جـ = ٥٠ سم

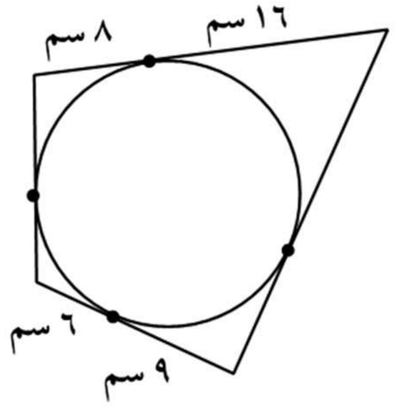
ن + ن + ١٠ + ١٠ + ٧ + ٧ = ٥٠

٢ن + ٣٤ = ٥٠

٢ن = ٥٠ − ٣٤ = ١٦ ← ن = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨

∴ طول $\overline{بجـ}$ = ٧ + ٨ = ١٥ سم

س في التمرين (٧)، يحيط المضلع بدائرة. أوجد محيط المضلع.



محيط المضلع = ١٦ + ١٦ + ٩ + ٩ + ٦ + ٦ + ٨ + ٨

= ٧٨ سم

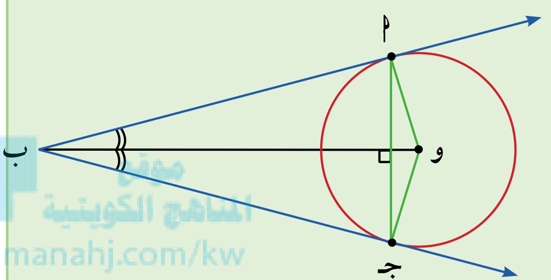
نتائج على نظرية (٤) :

ب أ ≅ جـ ب

ب و منصف للزاوية (أ ب̂ جـ)

ب و منصف للزاوية (أ و̂ جـ)

ب و ⊥ أ جـ

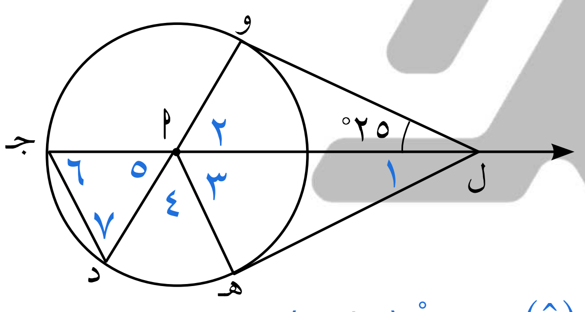


س في الشكل المجاور

أوجد ق(أ د̂ جـ) ، ق(هـ أ̂ د)

إذا كانت ل و ، ل هـ تمسان الدائرة

حيث و د قطر للدائرة



ل و مماس , أ و نصف قطر التماس ∴ ق(و̂) = ٩٠° (نظرية)

ل هـ مماس , أ هـ نصف قطر التماس ∴ ق(هـ̂) = ٩٠° (نظرية)

ق(١̂) = ٢٥° (نتيجة) , ق(٢̂) = ق(٣̂) = ١٨٠ − (٩٠ + ٢٥) = ٦٥°

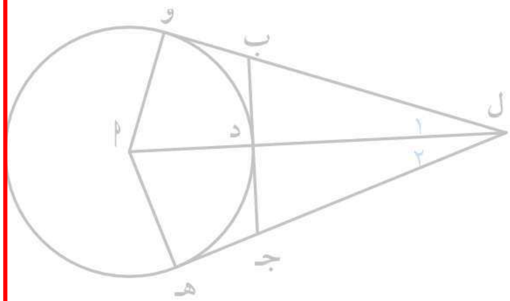
ق(٥̂) = ق(٢) = ٦٥° (تقابل بالرأس)

∴ ق(٤̂) = ق(هـ أ̂ د) = ١٨٠ − (٦٥ + ٦٥) = ٥٠°

ق(٦̂) = ق(٧̂) = (١٨٠° − ٦٥°) / ٢ = ٥٧,٥° (△ أ جـ د متطابق الضلعين)

∴ ق(أ د̂ جـ) = ٥٧,٥°

س في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{ل و}}$، $\overleftrightarrow{\text{ل هـ}}$ مماسان للدائرة $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ مماس للدائرة عند النقطة د،
أثبت أن المثلث ل ب جـ متطابق الضلعين



في المثلث $\triangle$ ل ب جـ

∵ $\overline{\text{ل و}}$ ، $\overline{\text{ل هـ}}$ مماسان للدائرة

∴ $\overline{\text{ل د}}$ منتصف الزاوية (نتيجة) (١)

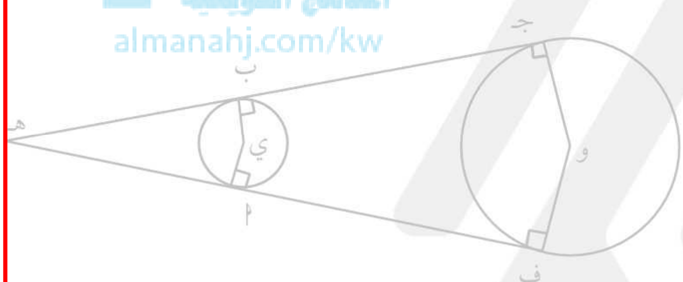
$\overline{\text{ب جـ}}$ مماس ، $\overline{\text{أ د}}$ نصف قطر التماس ∴ $\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{أ ل}}$

∴ $\overline{\text{ل د}}$ ارتفاع المثلث $\triangle$ ل ب جـ (٢)

من (١) و (٢) نجد أن: المثلث ل ب جـ متطابق الضلعين

ملغى

س برهن أن:
ب جـ = أ ف



∵ $\overline{\text{هـ جـ}}$ ، $\overline{\text{هـ ف}}$ مماسان للدائرة

∴ هـ جـ = هـ ف (نظرية)

∵ $\overline{\text{هـ ب}}$ ، $\overline{\text{هـ أ}}$ مماسان للدائرة

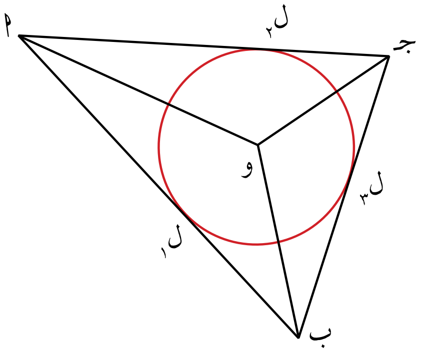
∴ هـ ب = هـ أ (نظرية)

هـ جـ − هـ ب = هـ ف − هـ أ

ب جـ = أ ف

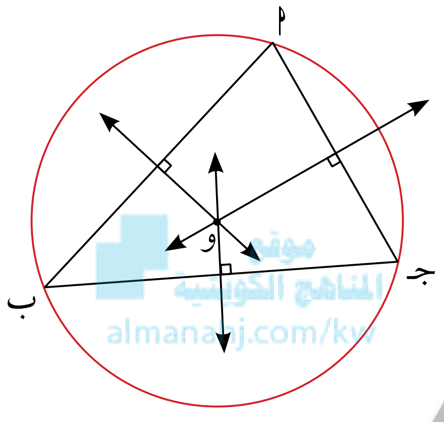
الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة)

هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث.

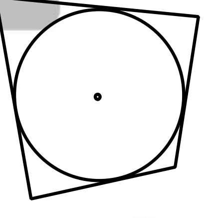


الدائرة المحيطة بمثلث (الخارجة)

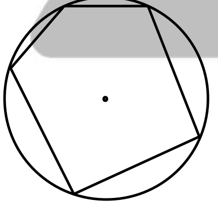
هي دائرة تمر بروؤس المثلث الثلاثة.
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).



س في التمرينين، حدد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمضلع (داخلة) أو محيطة بمضلع (خارجة)



الدائرة محاطة بمضلع (داخلة)



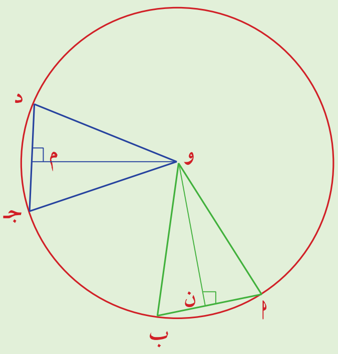
الدائرة محيطة بمضلع (خارجة)

الأوتار والاقواس

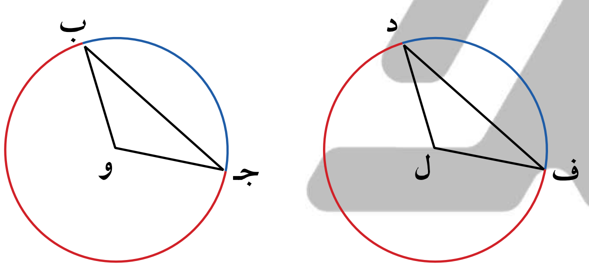
نظرية (١) :

في دائرة أو دوائر متطابقة

- للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة
- الاوتار المتطابقة تقابل أقواسا" متطابقة
- للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة



س في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان ، $\overset{\frown}{\text{بجـ}} \cong \overset{\frown}{\text{دف}}$. ماذا تستنتج؟



∵ $\overset{\frown}{\text{بجـ}} \cong \overset{\frown}{\text{دف}}$

∴ $\overline{\text{بجـ}} \cong \overline{\text{دف}}$

∴ $\widehat{\text{فلد}} \cong \widehat{\text{جوب}}$ نظرية

س في الرسم أعلاه ، إذا كان $\overline{\text{بجـ}} \cong \overline{\text{دف}}$ ، فماذا تستنتج؟

∵ $\overline{\text{بجـ}} \cong \overline{\text{دف}}$

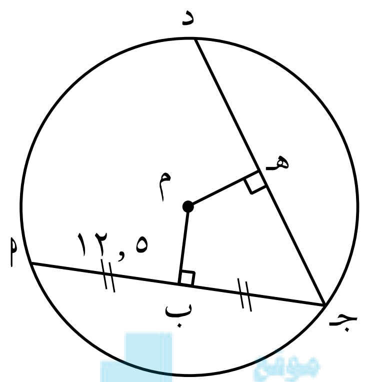
∴ $\overset{\frown}{\text{بجـ}} \cong \overset{\frown}{\text{دف}}$

∴ $\widehat{\text{فلد}} \cong \widehat{\text{جوب}}$ نظرية

نظرية (٢):

- الاوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.
- الاوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.

تمرن



س في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة.

م ب = م هـ أوجد طول جـ د. فسر.

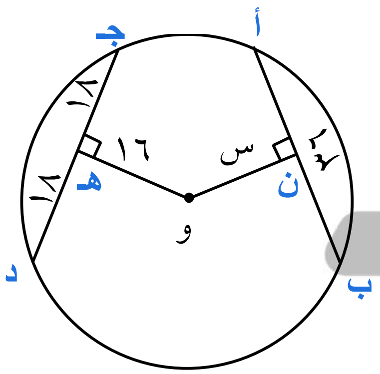
∵ م ب = م هـ ، م هـ ⊥ د جـ ، م ب ⊥ أ جـ

∴ جـ د = جـ أ نظرية

= جـ ب + ب أ

= ١٢,٥ + ١٢,٥ (ب جـ = ب أ)

= ٢٥



س دائرة مركزها (و) أوجد قيمة س في الشكل المقابل , و فسر اجابتك.

و ن ⊥ أ ب ، و هـ ⊥ جـ د معطى

أ ب = ٣٦

جـ د = ١٨ + ١٨ = ٣٦

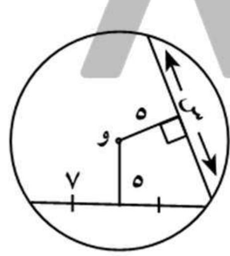
∵ أ ب = جـ د

∴ و ن = و هـ نظرية

س = ١٦

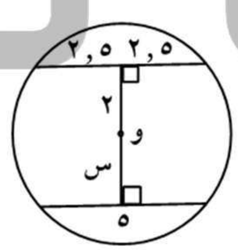
س أوجد قيمة (س) في الاشكال التالية :

(أ)



س = ٧ + ٧ = ١٤

(ب)



س = ٢

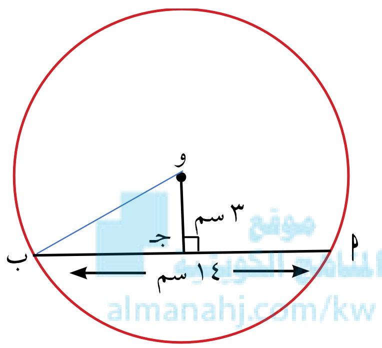
(جـ)

س = ٧

نظرية (٢) :

- القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلا من قوسيه
- القطر الذي ينصف وترا (ليس قطرا) في دائرة يكون عموديا على هذا الوتر
- العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة

س في الشكل المقابل , أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و.



$\because$ $\overline{\text{وجـ}} \perp \overline{\text{أب}}$ معطى

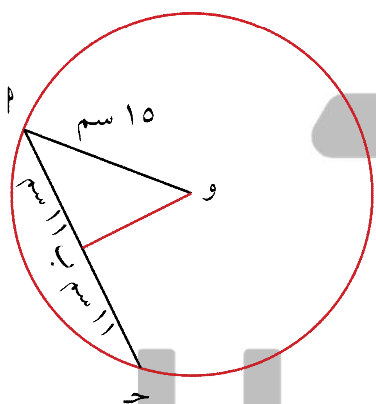
$\therefore$ أجـ = جـب = $\frac{١٤}{٢}$ = ٧سم   نظرية

وب = $\sqrt{٧^٢ + ٣^٢}$

= $\sqrt{٥٨} \simeq ٧,٦$ سم

فيثاغورث

س في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر .



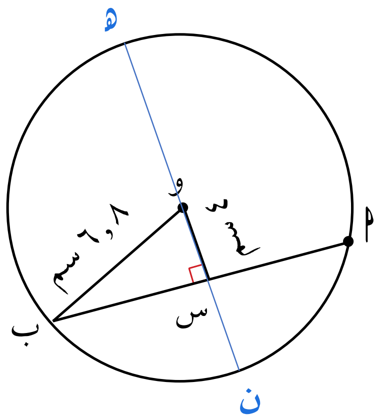
$\because$ أب = جـب = ١١   معطى

$\therefore$ $\overline{\text{وب}} \perp \overline{\text{أجـ}}$ نظرية

وب = $\sqrt{١٥^٢ - ١١^٢}$ = $٢\sqrt{٢٦}$ فيثاغورث

$\simeq$ ١٠,٢سم

استخدم الشكل :



س أوجد طول الوتر $\overline{أب}$

∵ $\overline{وس} \perp \overline{أب}$ ∴ أس = س ب نظرية

س ب = $\sqrt{(٦,٨)^٢ - ٤^٢} \simeq ٥,٤٩$ سم فيثاغورث

أب = س ب + س أ

= ٥,٤٩ + ٥,٤٩ = ١٠,٩٨ سم

س المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{أب}$.

س ن = و ن − و س

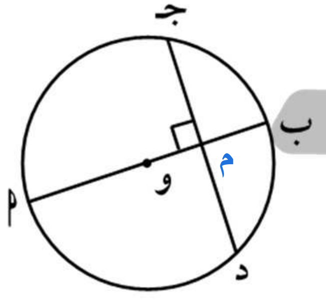
= ٦,٨ − ٤ = ٢,٨ سم

س المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأكبر $\overset{\frown}{أب}$.

س هـ = س و + و هـ

= ٤ + ٦,٨ = ١٠,٨ سم

س في الشكل المقابل إذا كان : $\overline{أب}$ قطر الدائرة , $\overline{أب} \perp \overline{جد}$. ماذا تستنتج؟



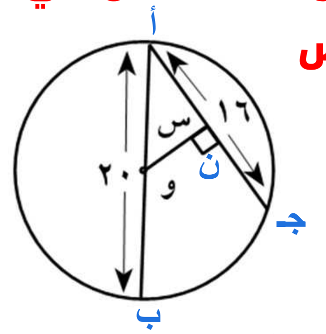
$\overline{جم} \cong \overline{دم}$

$\overset{\frown}{جب} \cong \overset{\frown}{دب}$

$\overset{\frown}{جأ} \cong \overset{\frown}{دأ}$

أوجد قيمة (س) في الاشكال التالية :

س



او = وب = ١٠ سم

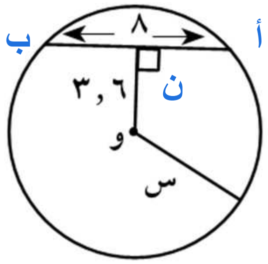
∵ $\overline{\text{ون}} \perp \overline{\text{اجـ}}$

∴ ان = نجـ = ٨ نظرية

$\text{س} = \sqrt{١٠^{٢} - ٨^{٢}}$

= ٦ نظرية فيثاغورث

س



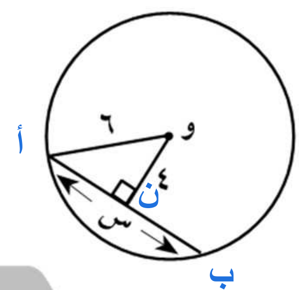
∵ $\overline{\text{ون}} \perp \overline{\text{اب}}$

∴ ان = نب = $\frac{٨}{٢}$ = ٤ نظرية

$\text{س} = \sqrt{(٣,٦)^{٢} + ٤^{٢}}$

≃ ٥,٣٨ فيثاغورث

س



∵ $\overline{\text{ون}} \perp \overline{\text{اب}}$

∴ ان = نب نظرية

$\text{ان} = \sqrt{٦^{٢} - ٤^{٢}}$

= $٢\sqrt{٥}$ فيثاغورث

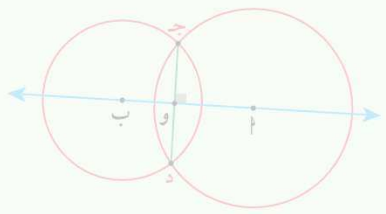
∴ ان = نب = $٢\sqrt{٥}$

س = $٢\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥}$

= $٤\sqrt{٥}$

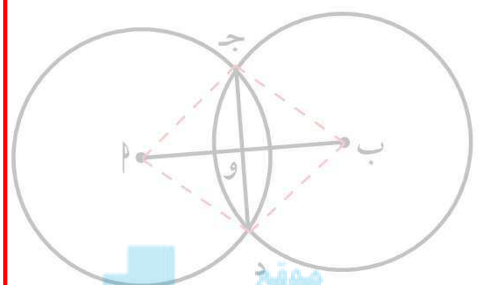
نتيجة :

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على الوتر المشترك بينهما و ينصفه.



ملغى

س يمثل الشكل المجاور دائرتين متطابقتين $\overline{\text{دجـ}}$ وتر مشترك إذا كان: أب = ٢٤ سم، نق = ١٣ سم فما هو طول $\overline{\text{دجـ}}$ ؟



∵ الدائرتين متطابقتان

∴ أجـ = أد = بجـ = بد = نق = ١٣ سم

بدأجـ معين

∴ $\overline{\text{بأ}} \perp \overline{\text{جـد}}$

∴ بو = وأ = ١٢ سم، جـو = ود

وجـ = $\sqrt{١٣^{٢} - ١٢^{٢}}$ = ٥ سم فيثاغورث

∴ جـد = ٥ + ٥ = ١٠ سم

س أ،ب مركزا دائرتين متطابقتين $\overline{\text{جـد}}$ وتر مشترك للدائرتين. إذا كان أب = ٨ سم، جـد = ٦ سم . فما طول نصف القطر ؟

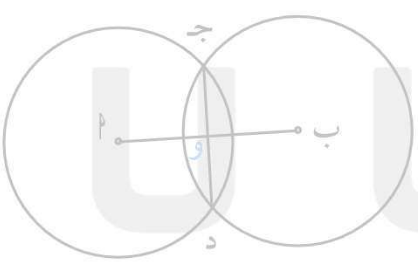
∵ الدائرتين متطابقتان

∴ أجـ = أد = بجـ = بد = نق

بدأجـ معين $\overline{\text{بأ}} \perp \overline{\text{جـد}}$

بو = وأ = ٤ سم، جـو = ود = ٣ سم

نق = $\sqrt{٤^{٢} + ٣^{٢}}$ = ٥ سم فيثاغورث



تـــدرب و تـفـوق

اختبارات الكترونية

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

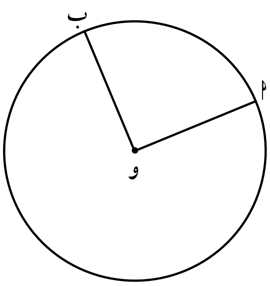
تعريف

- الزاوية التي رأسها مركز الدائرة و ضلعاها يقطعان الدائرة تسمي بالزاوية المركزية.
- الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة و ضلعاها يقطعان الدائرة تسمي بالزاوية المحيطة.

نظرية (١):

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة

س في الشكل المقابل دائرة مركزها و . إذا كانن(أب⌒) = ٩٠° فأوجد ن(∠أوب)



ن(∠أوب) = ن(أب⌒) = ٩٠°

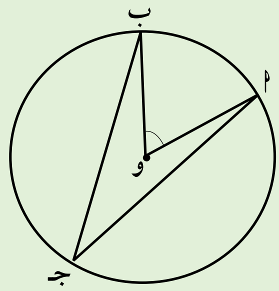
(∠أوب) زاوية مركزية تقابل (أب⌒) نظرية

س إذا كان قياس زاوية مركزية ٣٥° فأوجد قياس القوس على الدائرة المحصور بين ضلعيها

قياس القوس = قياس الزاوية المركزية = ٣٥° نظرية

نظرية (٢):

في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها



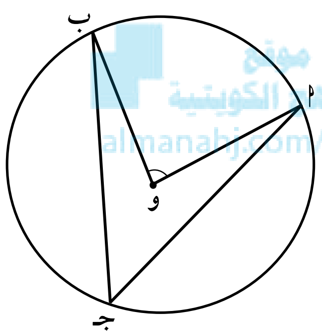
$$\text{ق}(\widehat{\text{أجب}}) = \frac{1}{2}\,\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أب}})$$

$$\text{ق}(\widehat{\text{أجب}}) = \frac{1}{2}\,\text{ق}(\widehat{\text{أوب}})$$

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

س في الشكل المجاور: إذا كان $\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أب}}) = ٨٠^\circ$

فأوجد $\text{ق}(\overset{\frown}{\text{بجأ}})$



$\widehat{\text{أجب}}$ زاوية محيطية

$\text{ق}(\widehat{\text{أجب}}) = \frac{1}{2}\,\text{ق}(\overset{\frown}{\text{أب}})$ نظرية

$= \frac{1}{2} \times ٨٠^\circ$

$= ٤٠^\circ$

س إذا كان قياس زاوية محيطية في دائرة يساوي ٥٤° فأوجد قياس القوس المحصور بين ضلعيها

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها (نظرية)

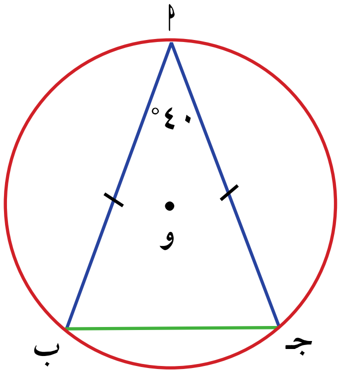
قياس القوس = $٢ \times ٥٤^\circ = ١٠٨^\circ$

س في الشكل المقابل: جـ ب أ مثلث متطابق الضلعين

حيث: أ , ب , جـ نقاط على الدائرة التي مركزها و ,

ق(ب أ̂ جـ) = ٤٠° المطلوب :

أوجد قياس كل من الاقواس: $\overset{\frown}{\text{أب}}$ ، $\overset{\frown}{\text{بجـ}}$ ، $\overset{\frown}{\text{أجـ}}$



ق(ب̂) = ق(جـ̂) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = ٧٠°

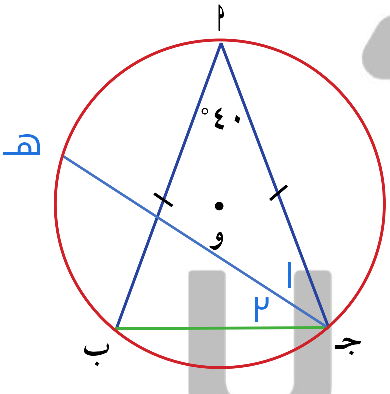
($\overset{\Delta}{\text{أبجـ}}$ متطابق الضلعين , مجموع قياسات زواياه ١٨٠°)

ق(أ̂) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{بجـ}}$) ⇐ ق($\overset{\frown}{\text{بجـ}}$) = ٨٠°

ق(جـ̂) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) ⇐ ق($\overset{\frown}{\text{أب}}$) = ١٤٠°

ق(ب̂) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{أجـ}}$) ⇐ ق($\overset{\frown}{\text{أجـ}}$) = ١٤٠°

س إذا كان $\overleftarrow{\text{جـهـ}}$, منصف الزاوية الداخلية أجـ̂ب و يقطع الدائرة في النقطة هـ ما قياس القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{أهـ}}$ ؟



ق(ب̂) = ق(جـ̂) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = ٧٠°

($\overset{\Delta}{\text{أبجـ}}$ متطابق الضلعين , مجموع قياسات زواياه ١٨٠°)

لدينا $\overleftarrow{\text{جـهـ}}$ منصف الزاوية أجـ̂ب بالتالي:

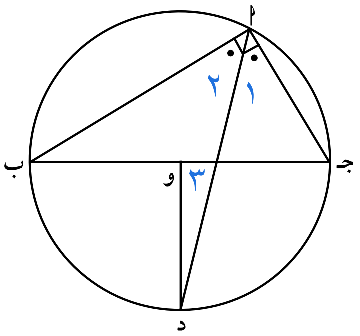
ق(١̂) = ق(٢̂) = $\frac{٧٠°}{٢}$ = ٣٥°

ق(١̂) = $\frac{١}{٢}$ ق($\overset{\frown}{\text{أهـ}}$) نظرية

ق($\overset{\frown}{\text{أهـ}}$) = ٣٥° × ٢ = ٧٠°

تمرن

س في الشكل المقابل دائرة مركزها و أثبت أن : ود ⊥ جب



∵ ق(جأ̂ب) = ٩٠° (معطى)

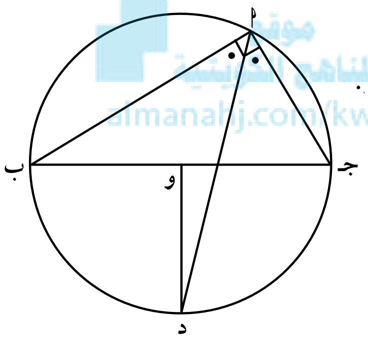
∴ ق(١̂) = ق(٢̂) = ٩٠°/٢ = ٤٥°

ق(١̂) = ½ ق(جد⌢) نظرية ⇐ ق(جد⌢) = ٩٠°

ق(٣̂) = ق(جد⌢) = ٩٠° نظرية

∴ دو ⊥ بج

س إذا كان ق(أبج⌢) = ٣٠°، أوجد ق(أدب⌢)



في △ أبج

ق(ج̂) = ١٨٠° − (٣٠° + ٩٠°) = ٦٠°

ق(ج̂) = ½ ق(أب⌢) نظرية

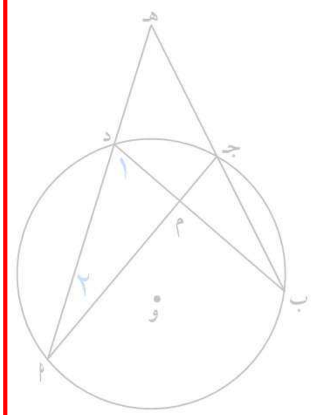
∴ ق(أب⌢) = ٦٠° × ٢ = ١٢٠°

ق(أد̂ب) = ½ ق(أب⌢) نظرية

= ½ × ١٢٠° = ٦٠°

تمرن

س أثبت أن $ق(\overset{\frown}{\text{أمب}}) = \dfrac{ق(\overset{\frown}{\text{دج}})+ق(\overset{\frown}{\text{ب أ}})}{2}$



$ق(\text{ب}\hat{\text{م}}\text{أ}) = ق(\hat{1}) + ق(\hat{2})$ زاوية خارجة من مثلث

$= \dfrac{ق(\overset{\frown}{\text{أب}})}{2} + \dfrac{ق(\overset{\frown}{\text{جد}})}{2}$ نظرية

$= \dfrac{ق(\overset{\frown}{\text{أب}}) + ق(\overset{\frown}{\text{جد}})}{2}$

س أثبت أن $ق(\widehat{\text{ب هـ أ}}) = \dfrac{ق(\overset{\frown}{\text{ب أ}}) - ق(\overset{\frown}{\text{جد}})}{2}$

$ق(\hat{1}) = ق(\hat{\text{ب}}) + ق(\hat{\text{هـ}})$ زاوية خارجة

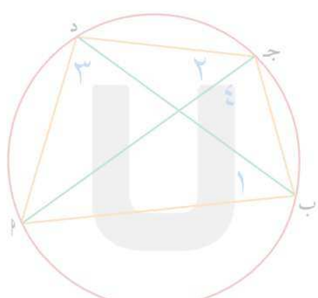
$ق(\hat{\text{هـ}}) = ق(\hat{1}) - ق(\hat{\text{ب}})$

$ق(\text{ب}\hat{\text{هـ}}\text{أ}) = \dfrac{ق(\overset{\frown}{\text{أب}})}{2} - \dfrac{ق(\overset{\frown}{\text{جد}})}{2}$ نظرية

ملغى

$= \dfrac{ق(\overset{\frown}{\text{أب}}) - ق(\overset{\frown}{\text{جد}})}{2}$

س أبجد شكل رباعي دائري. أثبت أن $ق(\widehat{\text{أبد}}) = ق(\widehat{\text{أجد}})$



$ق(\hat{1}) = ق(\text{أ}\hat{\text{ب}}\text{د}) = \frac{1}{2} ق(\overset{\frown}{\text{أد}})$ نظرية

$ق(\hat{2}) = ق(\text{أ}\hat{\text{ج}}\text{د}) = \frac{1}{2} ق(\overset{\frown}{\text{أد}})$ نظرية

$\therefore ق(\text{أ}\hat{\text{ب}}\text{د}) = ق(\text{أ}\hat{\text{ج}}\text{د})$

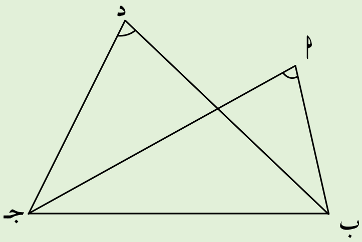
- أثبت أن $ق(\widehat{\text{أدب}}) = ق(\widehat{\text{أجب}})$

$ق(\hat{3}) = ق(\text{أ}\hat{\text{د}}\text{ب}) = \frac{1}{2} ق(\overset{\frown}{\text{أب}})$ نظرية

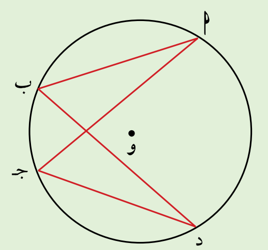
$ق(\hat{4}) = ق(\text{أ}\hat{\text{ج}}\text{ب}) = \frac{1}{2} ق(\overset{\frown}{\text{أب}})$ نظرية

$\therefore ق(\text{أ}\hat{\text{د}}\text{ب}) = ق(\text{أ}\hat{\text{ج}}\text{ب})$

نتائج :

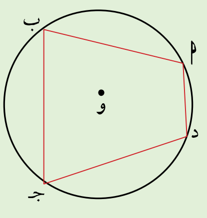


- كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.
- كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.
- كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة), تكون زواياه المتقابلة متكاملة.
- في الشكل إذا تطابقت الزاويتان $\hat{أ}$ ، $\hat{د}$ المرسومات على القاعدة $\overline{بج}$ و في جهة واحدة منها. كان الشكل أبجد رباعيا دائريا.



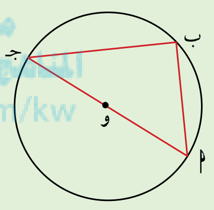
$\widehat{أبد}$ ، $\widehat{أجد}$ تحصران $\overset{\frown}{أد}$

$\therefore$ ق$(\widehat{أبد})$ = ق$(\widehat{أجد})$



ق$(\hat{أ})$ + ق$(\hat{ج})$ = ١٨٠°

ق$(\hat{ب})$ + ق$(\hat{د})$ = ١٨٠°



$\widehat{أبج}$ تحصر $\overset{\frown}{أج}$

(نصف دائرة)

$\therefore$ ق$(\widehat{أبج})$ = ٩٠

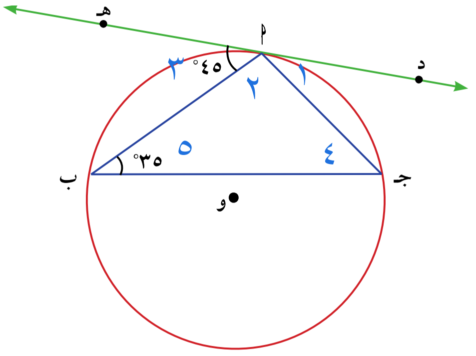
$(\widehat{أبج})$ زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة و هي زاوية قائمة

نظرية (٣) :

- قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.
- قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس و الوتر

تمرين

س اذا كان هـ د (↔) مماسا للدائرة عند النقطة أ
فأوجد: ق(ب$\hat{أ}$ج)



ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٥}$) = ٣٥° نظرية

ق($\hat{٣}$) = ق($\hat{٤}$) = ٤٥° نظرية

ق($\hat{٢}$) = ١٨٠° − (٤٥° + ٣٥°)

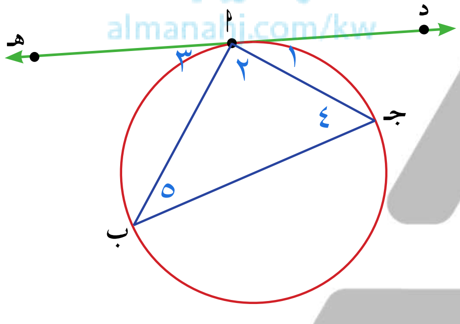
= ١٠٠° مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق(ج$\hat{أ}$ب) = ١٠٠°

س في الشكل المقابل:

ق(د$\hat{أ}$ج) = ٤٠° ، ق(هـ$\hat{أ}$ب) = ٥٠°

اوجد قياسات زوايا المثلث Δأبج



ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٥}$) = ٤٠° نظرية

ق($\hat{٣}$) = ق($\hat{٤}$) = ٥٠° نظرية

ق($\hat{٢}$) = ١٨٠° − (٤٠° + ٥٠°) = ٩٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

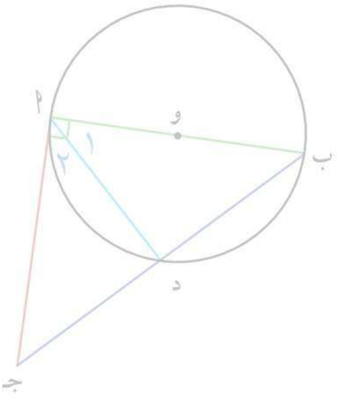
- أثبت أن $\overline{بج}$ قطر للدائرة

∵ ج$\hat{أ}$ب زاوية محيطيه قياسها ٩٠°

∴ ج$\hat{أ}$ب مرسومة على قطر الدائرة

∴ $\overline{جب}$ قطر للدائرة.

س أب قطر في دائرة مركزها و. نرسم أجـ مماساً للدائرة بحيث يكون أجـ = ٢ نو ، بجـ تقطع الدائرة في د. أثبت أن أد = جـ د



Δ أبجـ فيه

ق(أ) = ٩٠°

أب = أجـ = ٢نو

∴ Δ أبجـ قائم متطابق الضلعين

ق(ب) = ق(جـ) = ٤٥° (نظرية)

ق(٢) = ق(ب) = ٤٥°

∴ Δ أدجـ متطابق الضلعين

∴ أد = جـد

ملغى

س م ت مماس لدائرة مركزها و. م ن وتر في الدائرة بحيث يكون م ن = م ت . (م نقطة التماس) ت ن تقطع الدائرة في ل.

أثبت أن Δ ت ل م متطابق الضلعين (ل ت = ل م)

∵ م ن = م ت

∴ Δ م ت ن متطابق الضلعين

∴ ق(ت) = ق(ن)

ق(ن) = ق(١) نظرية

∴ ق(ت) = ق(١)

∴ Δ ت ل م متطابق الضلعين (ل ت = ل م)

تمرن

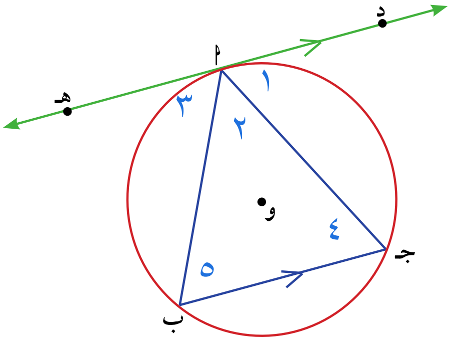
س في الشكل المجاور $\overleftrightarrow{هـ د}$ مماس للدائرة عند أ ، $\overline{جب}$ وتر في الدائرة ويوازي المماس $\overleftrightarrow{دهـ}$ أثبت ان المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين

$ق(\hat{1}) = ق(\hat{5})$ (نظرية)

$ق(\hat{1}) = ق(\hat{4})$ (تبادل و توازي)

$\therefore ق(\hat{4}) = ق(\hat{5})$

$\therefore$ المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين



س اذا كان لدينا $\overleftrightarrow{هـ د}$ مماس للدائرة عند النقطة أ. المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين (أ ب = أ جـ) أثبت أن $\overline{جب} // \overleftrightarrow{هـ د}$

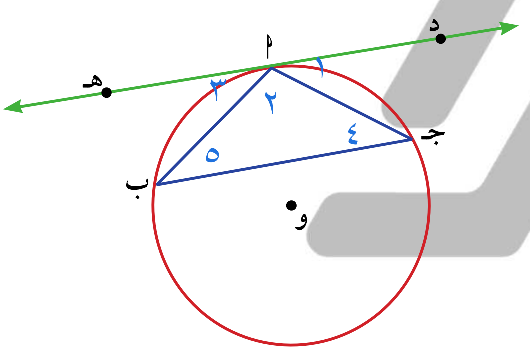
$ق(\hat{1}) = ق(\hat{5})$ (نظرية)

$ق(\hat{4}) = ق(\hat{5})$ ($\triangle$ أ ب جـ متطابق الضلعين)

$\therefore ق(\hat{1}) = ق(\hat{4})$

و هما في وضع التبادل

$\therefore \overleftrightarrow{دهـ} // \overline{بجـ}$



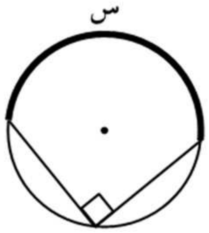
تمرن

أوجد قيمة المجهول في كل من الاشكال التالية :

س

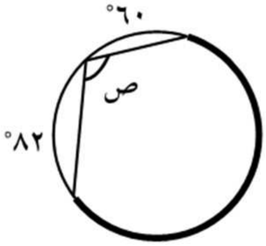
$\text{س} = ١١٦^\circ$

س



$\text{س} = ١٨٠^\circ$

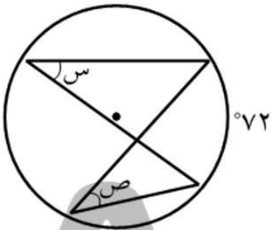
س



$\text{س} = ٣٦٠ - (٦٠ + ٨٢) = ٢١٨^\circ$

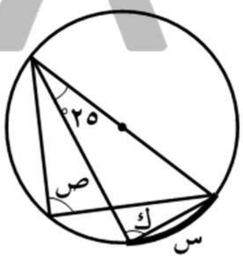
$\text{ص} = \frac{٢١٨}{٢} = ١٠٩^\circ$

س



$\text{س} = \text{ص} = \frac{٧٢}{٢} = ٣٦^\circ$

س



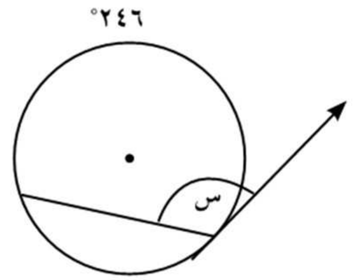
$\text{س} = ٥٠^\circ$

$\text{ك} = \text{ص} = ٩٠^\circ$

تمرن

أوجد قيمة المجهول في كل من الاشكال التالية :

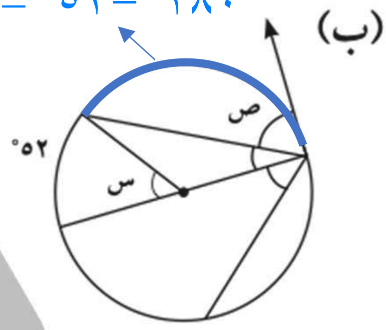
س



$س = \frac{٢٤٦}{٢}$

$= ١٢٣°$

(ب)

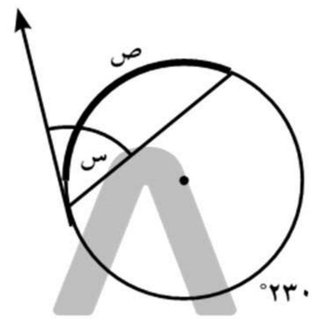


$١٨٠° - ٥٢° = ١٢٨°$

$س = ٥٢°$

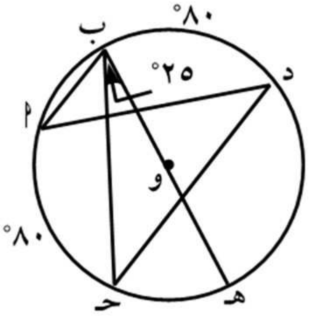
$ص = \frac{١٢٨}{٢} = ٦٤°$

س



$ص = ٣٦٠ - ٢٣٠ = ١٣٠°$

$س = \frac{١٣٠°}{٢} = ٦٥°$



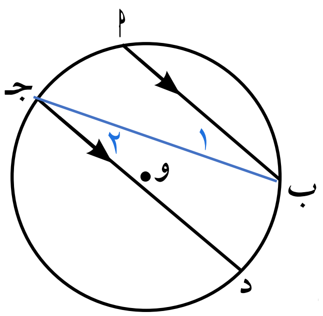
س ق(أ̂). $\frac{١}{٢} \times ٨٠° = ٤٠°$

س ق(جـهـ⌒). $٢٥° \times ٢ = ٥٠°$

س ق(جـ̂). $\frac{١}{٢} \times ٨٠° = ٤٠°$

س ق(أبَ̂هـ). $\frac{١}{٢} \times ١٣٠° = ٦٥°$

س في الشكل المقابل أثبت أن : $\overset{\frown}{أجـ} \cong \overset{\frown}{بد}$.



نرسم $\overline{بجـ}$

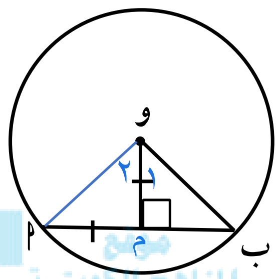
ق$(\hat{١})$ = ق$(\hat{٢})$ (بالتبادل و التوازي)

$\frac{١}{٢}$ ق$(\overset{\frown}{أجـ})$ = $\frac{١}{٢}$ ق$(\overset{\frown}{بد})$

ق$(\overset{\frown}{أجـ})$ = ق$(\overset{\frown}{بد})$

$\therefore$ $\overset{\frown}{أجـ} \cong \overset{\frown}{بد}$

س اوجد قياس القوس الأصغر $\overset{\frown}{أب}$



$\overline{وم} \perp \overline{أب}$

$\therefore$ ب م = م أ نظرية

$\therefore$ و م = م أ = م ب

$\therefore$ $\triangle$ و م ب قائم متطابق الضلعين

$\therefore$ ق$(\hat{١})$ = ٤٥°

$\triangle$ و م أ قائم متطابق الضلعين

$\therefore$ ق$(\hat{٢})$ = ٤٥°

ق(ب$\hat{و}$أ) = ٤٥° + ٤٥° = ٩٠°

$\therefore$ ق$(\overset{\frown}{أب})$ = ق(ب$\hat{و}$أ) = ٩٠° نظرية

تنظيم البيانات في مصفوفات

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

س $أ = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٤ \\ ٧- & ٣- & ٢ \\ ٩ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ٣ × ٣

س $ب = \begin{bmatrix} ٣- & \frac{٢}{٣} & ٤- \end{bmatrix}$ ٣ × ١

س $جـ = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$ ١ × ٤

س $أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٥ & ٤ \\ ٧ & ٠,٥ & ٢- \end{bmatrix}$ ٣ × ٢

س $ب = \begin{bmatrix} ١٠ & ٣ & ٨- \end{bmatrix}$ ٣ × ١

س $جـ = \begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ ٥- & ١ \\ ٩ & ٠,٦ \end{bmatrix}$ ٢ × ٣

س $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ١ & ١٢ \\ ٣,٥ & ٢ & ٦ & ٢ \\ ٤- & ١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ أوجد:

- $ب_{٢٢} =$ ٦
- $ب_{١٣} =$ ١
- $ب_{١١} =$ ١٢
- $ب_{٣١} =$ ٥
- $ب_{٤٣} =$ ٤-
- $ب_{٣٣} =$ ١

المصفوفات : المربعة , الأفقية , العمودية

- **المصفوفة المربعة :** هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة. وفي ما عدا ذلك , تسمي المصفوفة : مصفوفة مستطيلة.

$$\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٩ & -١ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ٥ & -١ \\ ٧ & ٢ \\ ٩ & ٠ \end{bmatrix}$$

- **المصفوفة الأفقية :** هي مصفوفة مكونة من صف واحد.

$$\begin{bmatrix} ٠ & -٢ & ٩ & ٧ \end{bmatrix}$$

- **المصفوفة العمودية :** هي مصفوفة مكونة من عمود واحد.

$$\begin{bmatrix} ١ \\ ٩ \end{bmatrix}$$

صنّف كلا من المصفوفات التالية:

س $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & -٥ & ١ \\ ٧ & ٤ & ٠ \\ ٨ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

مربعة

س $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠٫٢ \end{bmatrix}$

عمودية

س $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} -٥ & ٤ & ٣ \end{bmatrix}$

أفقية

س $\underline{د} = \begin{bmatrix} ١٫٤ & ٣ & -٢ \\ ٥ & ٨ & ١٢ \end{bmatrix}$

مستطيلة

المصفوفات المتساوية : Equal Matrices

تكون مصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها , و كانت عناصرهما المتناظرة متساوية و العكس صحيح.

س إذا كانت: $\begin{bmatrix} \text{٢س} - \text{٥} & \text{٤} \\ \text{٣} & \text{٣ص} + \text{١٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٢٥} & \text{٤} \\ \text{٣} & \text{ص} + \text{١٨} \end{bmatrix}$

فأوجد قيمة كل من س ، ص

$\text{٢س} - \text{٥} = \text{٢٥}$
$\text{٢س} = \text{٢٥} + \text{٥}$
$\frac{\text{٢س}}{\text{٢}} = \frac{\text{٣٠}}{\text{٢}}$
$\text{س} = \text{١٥}$

$\text{٣ص} + \text{١٢} = \text{ص} + \text{١٨}$
$\text{٣ص} - \text{ص} = -\text{١٢} + \text{١٨}$
$\frac{\text{٢ص}}{\text{٢}} = \frac{\text{٦}}{\text{٢}}$
$\text{ص} = \text{٣}$

س إذا كانت: $\begin{bmatrix} \text{٣٨} & \text{٥} \\ \text{٣} & \text{٤ص} - \text{١٠} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} + \text{٨} & \text{٥} \\ \text{٣} & -\text{ص} \end{bmatrix}$

فأوجد قيمة كل من س ، ص

$\text{س} + \text{٨} = \text{٣٨}$
$\text{س} = \text{٣٨} - \text{٨}$
$\text{س} = \text{٣٠}$

$\text{٤ص} - \text{١٠} = -\text{ص}$
$\text{٤ص} + \text{ص} = \text{١٠}$
$\frac{\text{٥ص}}{\text{٥}} = \frac{\text{١٠}}{\text{٥}}$
$\text{ص} = \text{٢}$

س إذا كانت: $\begin{bmatrix} \text{٣س} & \text{س} + \text{ص} & \text{س} - \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{٩} & \text{٤} & -\text{١٠} \end{bmatrix}$

فأوجد قيمة كل من س ، ص

$\text{٣س} = -\text{٩}$
$\text{س} = \frac{-\text{٩}}{\text{٣}}$
$\text{س} = -\text{٣}$

$\text{س} + \text{ص} = \text{٤}$
$-\text{٣} + \text{ص} = \text{٤}$
$\text{ص} = \text{٤} + \text{٣} = \text{٧}$

جمع وطرح المصفوفات

س أوجد ناتج ما يلي: $\begin{bmatrix} ٢٤ & -١٢ \\ ٥ & -٣ \\ ١٠ & -١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -١ & -٣ \\ ٤ & -٥ \\ -٧ & ١ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢٣ & -١٥ \\ ٩ & -٨ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$

س إذا كانت: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix}$

- أوجد $\underline{جـ} + \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٧ & -٣ \end{bmatrix}$

- $\left(\underline{جـ} + \underline{ب}\right) + \underline{أ} = \left(\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ٧ & -٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ٥ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ٢ & ٨ \\ ٧ & -٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$

خواص جمع المصفوفات :

إذا كان $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ ، $\underline{جـ}$ مصفوفات من الرتبة م×ن فإن:

- $\underline{أ} + \underline{ب}$ هي من الرتبة م×ن — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- $\underline{أ} + \underline{ب} = \underline{ب} + \underline{أ}$ — خاصية الإبدال Commutative
- $\left(\underline{أ} + \underline{ب}\right) + \underline{جـ} = \underline{أ} + \left(\underline{ب} + \underline{جـ}\right)$ — خاصية التجميع Associative
- $\underline{٠}_{م×ن} + \underline{أ} = \underline{أ} + \underline{٠}_{م×ن} = \underline{أ}$ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م×ن
- $\underline{أ} + \left(-\underline{أ}\right) = \underline{٠}_{م×ن}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي)

طرح المصفوفات :

يمكن طرح المصفوفات باستخدام خاصية مصفوفة المعكوس الجمعي.

إذا كان للمصفوفتين $\underline{أ}$، $\underline{ب}$ الرتبة نفسها , فإن $\underline{أ} - \underline{ب} = \underline{أ} + (-\underline{ب})$.

ملاحظة :

إذا كان $\underline{أ} \neq \underline{ب}$ ولهما الرتبة نفسها فإن : $\underline{أ} - \underline{ب} \neq \underline{ب} - \underline{أ}$ و بالتالي , عملية طرح المصفوفات ليست إبداليه.

أوجد ناتج كل مما يلي:

س $\begin{bmatrix} 6 & -9 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -12 & 7 \\ -8 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

س $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 14 \end{bmatrix}$

س $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 6 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 10 \\ 1 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -4 & 12 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$

حل المعادلات المصفوفية

أوجد قيمة <u>س</u> حيث :

س $$\begin{bmatrix} ٧ & ١٠ \\ ٤ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} - \underline{س}$$

$$\begin{bmatrix} ٧ & ٩ \\ ٩ & -٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٧ & ١٠ \\ ٤ & -٤ \end{bmatrix} = \underline{س}$$

س $$\begin{bmatrix} ٨ & ١ & ٥ \\ ٥ & ٠ & -٦ \end{bmatrix} = \underline{س} + \begin{bmatrix} -٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١١ & -١ & ٤ \\ ٢ & -١ & -٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٨ & ١ & ٥ \\ ٥ & ٠ & -٦ \end{bmatrix} = \underline{س}$$

س $$\begin{bmatrix} ٥٠ & ٥ \\ -١٠ & ٥٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٤ \\ -١ & ٧٥ \end{bmatrix} - \underline{س}$$

$$\begin{bmatrix} ٦٢ & ٩ \\ -١١ & ١٢٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٢ & ٤ \\ -١ & ٧٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥٠ & ٥ \\ -١٠ & ٥٠ \end{bmatrix} = \underline{س}$$

س $$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & -٥ \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ -٣ & ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٩ & ٥ & ٠ \\ -٣ & ٨ & ١٢ \end{bmatrix} + \underline{س} -$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٩ & ٥ & ٠ \\ -٣ & ٨ & ١٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & -٥ \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ -٣ & ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \underline{س} -$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٨ \\ ٧ & ٥ & -٢ \\ ٠ & ٣ & ١٢ \end{bmatrix} = \underline{س} \Leftarrow \begin{bmatrix} -١ & -٢ & -٨ \\ -٧ & -٥ & ٢ \\ ٠ & -٣ & -١٢ \end{bmatrix} = \underline{س} -$$

س

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٤ & -٢٤ \end{bmatrix} = \underline{س} - \begin{bmatrix} ١٣ & ٢٤ & ٥ \\ -٦ & -١٧ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٤ & -٢٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١٣ & ٢٤ & ٥ \\ -٦ & -١٧ & ١ \end{bmatrix} = \underline{س}$$

$$\begin{bmatrix} ١٣ & ٢٤ & ٥ \\ -٤ & -١٣ & -٢٣ \end{bmatrix} = \underline{س}$$

ضرب المصفوفات

إذا كانت $\text{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ فأوجد:

س $5\text{ب} - 4\text{أ}$

$$= 5\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 \\ -10 & -5 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 12 & -16 \\ 20 & 16 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -7 & 26 \\ -30 & -21 & 3 \end{bmatrix}$$

س $\text{أ} + 6\text{ب}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ -12 & -6 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 8 \\ -7 & -2 & 21 \end{bmatrix}$$

حل كل معادلة مما يلي:

س $٢\text{س} = \begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -٢ & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

$٢\text{س} = \begin{bmatrix} ٢ & ١٢ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$

$\text{س} = \frac{١}{٢} \times \begin{bmatrix} ٢ & ١٢ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$

س $-٣\text{س} + \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & -١ \\ ٢ & -٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ & ٨ \\ -١٩ & -١٨ & ١٠ \end{bmatrix}$

$-٣\text{س} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ & ٨ \\ -١٩ & -١٨ & ١٠ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٧ & ٠ & -١ \\ ٢ & -٣ & ٤ \end{bmatrix}$

$-٣\text{س} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ٩ \\ -٢١ & -١٥ & ٦ \end{bmatrix}$

$\text{س} = \frac{-١}{٣} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ٩ \\ -٢١ & -١٥ & ٦ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ & -٣ \\ ٧ & ٥ & -٢ \end{bmatrix}$

س أوجد ناتج $أ \times ب$: $أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٣ \\ -١ & -٤ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٠ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$

$$أ \times ب = \begin{bmatrix} ٠\times٤ + ٣\times(-٢) & ٠\times٠ + ٣\times١ \\ -١\times٤ + (-٤)\times(-٢) & ٠\times(-١) + (-٤)\times١ \\ ١\times٤ + ٢\times(-٢) & ١\times٠ + ٢\times١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٦ & ٣ \\ ٤ & -٤ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}_{٣\times٢}$$

س أوجد ناتج الضرب: $\underset{٢\times٢}{\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}} \times \underset{٢\times٢}{\begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}}$

$$\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -٣ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣\times(-١) + ٠\times٥ & ٣\times(-١) + ٠\times٠ \\ -٣\times٣ + (-٤)\times٥ & ٣\times٣ + (-٤)\times٠ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣ & -٣ \\ -٢٩ & ٩ \end{bmatrix}$$

س بفرض $أ = \begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٨ & ٠ & -١ & ٠ \\ ٢ & -٥ & ١ & ٨ \end{bmatrix}$

حدد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب $أ \times ب$ ، $ب \times أ$ معرفة أو غير معرفة

$$أ \times ب = \begin{bmatrix} ٨\times٤ + (-٢)\times٢ & ٠\times٤ + (-٢)\times(-٥) & -١\times٤ + (-٢)\times١ & ٠\times٤ + (-٢)\times٨ \\ ٨\times٥ + (-٤)\times٢ & ٠\times٥ + (-٤)\times(-٥) & -١\times٥ + (-٤)\times١ & ٠\times٥ + (-٤)\times٨ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢٨ & ١٠ & -٦ & -١٦ \\ ٣٢ & ٢٠ & -٩ & -٣٢ \end{bmatrix}_{٢\times٤}$$

$ب \times أ$ $\quad ب_{(٢\times٤)} \times أ_{(٢\times٢)}$ غير معرفة

مربع المصفوفة

س إذا كانت $\underline{ب} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ فأوجد: $\underline{ب}^2$

$$\underline{ب}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times2+1\times(-1) & 2\times1+1\times4 \\ -1\times2+4\times(-1) & -1\times1+4\times4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 15 \end{bmatrix}$$

س إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ فأوجد: $\underline{أ}^2$

$$\underline{أ}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times2+(-1)\times1 & -1\times2+(-1)\times0 \\ 2\times1+0\times1 & -1\times1+0\times0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)

مصفوفة الوحدة :

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي (١) وبقية العناصر (صفر)

$$\underline{و}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \text{ ، } \underline{و}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

النظير الضربي :

$$\underline{أ} \times \underline{أ}^{-١} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{أ} = \underline{و}$$

س أثبت أن المصفوفة: $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢\times٢+١\times٥ & ٢\times٢+١\times-٤ \\ -٢\times٢,٥+١\times٥ & ٢\times٢,٥+١\times-٤ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \underline{و}_{٢\times٢}$$

∴ المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي لـ $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

س أثبت أن: ب = $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$

$$\text{أ} \times \text{ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢\times٣+٢\times٣- & ١-\times٣+٢\times٢ \\ ٢\times٢+١\times٣- & ١-\times٢+١\times٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

أ × ب = و ∴ ب النظير الضربي أ

يمكن القول أن المصفوفة أ هي النظير الضربي للمصفوفة ب .

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية :

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} \text{ج} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ب} \end{bmatrix}$ هو $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{ج} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{ب} \end{vmatrix} = \text{أد} - \text{ب ج}$

تمرن: أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

س أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ← $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٤ \times ٢ - ٤ \times ٢ =$ صفر

∴ أ منفردة

س ب = $\begin{bmatrix} ٧ & ٨ \\ ١٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ← $|\text{ب}| = \begin{vmatrix} ٧ & ٨ \\ ١٠ & ٢ \end{vmatrix} = ٨ \times ١٠ - ٢ \times ٧ = ٦٦$

س ج = $\begin{bmatrix} ٣ & \text{ك} \\ ٣- & \text{ك}-٣ \end{bmatrix}$ ← $|\text{ج}| = \begin{vmatrix} ٣ & \text{ك} \\ ٣- & (٣-\text{ك}) \end{vmatrix} = -٣\text{ك} - ٣(٣-\text{ك})$

$= \cancel{-٣\text{ك}} - ٩ + \cancel{٣\text{ك}}$

$= -٩$

تمرن: أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

س $\underline{أ} = \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix} = |\underline{أ}| = \begin{vmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{vmatrix} = (-٣) \times (-٥) - ٤ \times ٢ = ٧$

س $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix} = |\underline{ب}| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{vmatrix} = (٢) \times (-٢) - (-٣) \times (٣) = ٥$

س $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ٠ & س \end{bmatrix} = |\underline{جـ}| = \begin{vmatrix} س & ٠ \\ ٠ & س \end{vmatrix} = س^٢ - ٠ = س^٢$

ملاحظة :

المصفوفة التي محددها الصفر ليس لها نظير ضربي وتسمى (مصفوفة منفردة)

س إذا كانت المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢س \end{bmatrix}$ منفردة فأوجد قيمة س

$\because$ $\underline{ب}$ منفردة $\quad \therefore |\underline{ب}| =$ صفر

$\begin{vmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢س \end{vmatrix} =$ صفر

$١٠س - - ٤٠ = ٠$

$١٠س + ٤٠ = ٠$

$١٠س = -٤٠ \Leftarrow س = -٤$

س إذا كانت المصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & س \\ ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$ منفردة فأوجد قيمة س

$|\underline{أ}| = ٠$

$\begin{vmatrix} ٤ & س \\ ٦ & ١٢ \end{vmatrix} = ٠$

$٦س - ٤٨ = ٠$

$٦س = ٤٨ \Leftarrow س = \frac{٤٨}{٦} = ٨$

خاصية :

بفرض أن : $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{bmatrix}$ إذا كان أد − ب جـ ≠ ٠ فإن $\underline{أ}$ لها نظير

ضربي $\underline{أ}^{-١}$ حيث :

$$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{|\underline{أ}|} \begin{bmatrix} -ب & د \\ أ & -جـ \end{bmatrix}$$

س هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسر اجابتك

$|\underline{ب}| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ١ \times ٤ - ٢ \times ٣ = -٢$

$\because -٢ \neq ٠$ $\therefore$ يوجد نظير ضربي

س هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٨ & ٦ \\ -٤ & -٣ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسر اجابتك

$|\underline{ب}| = \begin{vmatrix} ٨ & ٦ \\ -٤ & -٣ \end{vmatrix} = ٦ \times (-٤) - ٨ \times (-٣) =$ صفر

$\underline{ب}$ منفردة ليس لها نظير ضربي

س هل للمصفوفة: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربي؟

في حالة الايجاب أوجده:

$$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \times (-2) - 0 \times 8 = \frac{2}{1} = 2 \text{ ، } 2 \neq 0$$

يوجد نظير ضربي

$$\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

حدد أي من المصفوفات التالية لها نظير ضربي (معكوس) ، ثم أوجده

س $\underline{أ} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 1 = 2$$

$\because 2 \neq 0 \quad \therefore \underline{أ}^{-1}$ موجودة

$$\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

س $\underline{ب} = \begin{bmatrix} 0.5 & 2.3 \\ 3 & 7.2 \end{bmatrix}$

$$|\underline{ب}| = \begin{vmatrix} 0.5 & 2.3 \\ 3 & 7.2 \end{vmatrix} = 0.5 \times 7.2 - 2.3 \times 3 = \frac{-33}{10}$$

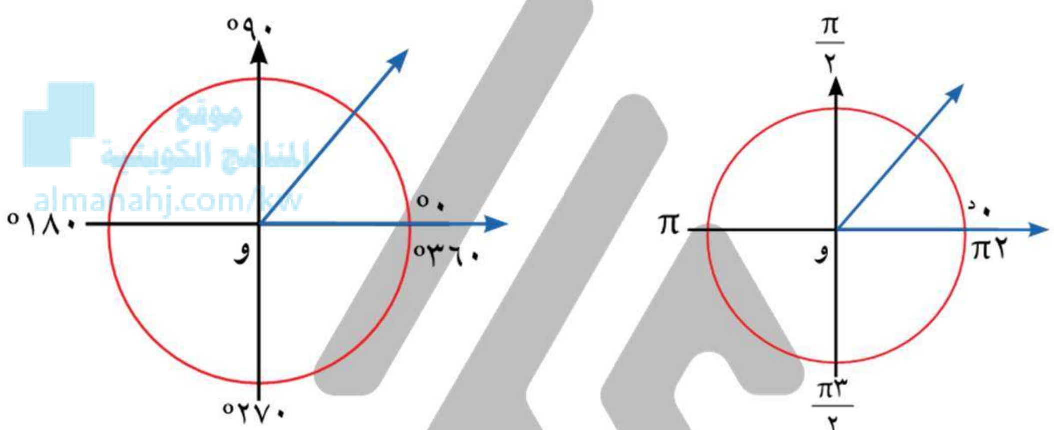
$\because |\underline{ب}| \neq$ صفر $\quad \therefore \underline{ب}^{-1}$ موجودة

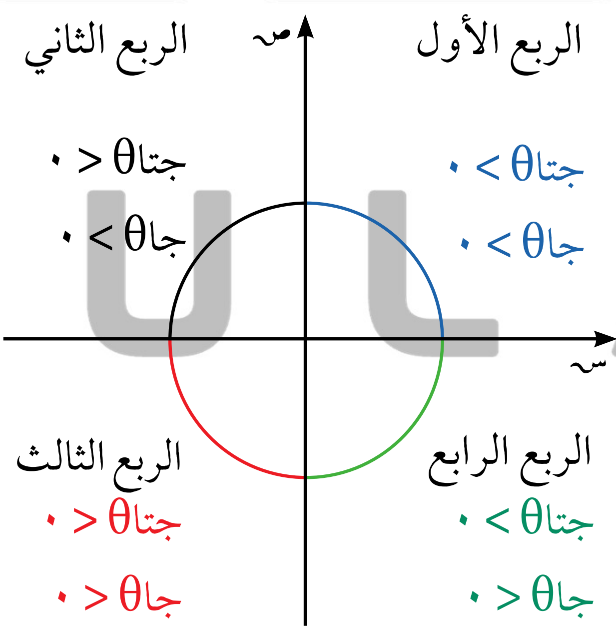
$$\underline{ب}^{-1} = -\frac{10}{33} \begin{bmatrix} 7.2 & -2.3 \\ -3 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-24}{11} & \frac{23}{33} \\ \frac{10}{11} & \frac{-5}{33} \end{bmatrix}$$

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي و الدوال المثلثية (الدائرية)

دائرة الوحدة

هي دائرة مركزها نقطة الأصل (و) وطول نصف قطرها واحد وحدة





تمرين: حدّد إشارة جا (θ) ,جتا (θ) في كل مما يلي :

س $\theta = ١٣٥^\circ$

θ في الربع٢ جا $\theta > ٠$ جتا $\theta < ٠$ ظا $\theta < ٠$

س $\theta = \frac{٧\pi}{٦}$

$\leftarrow \frac{٧ \times ١٨٠}{٦} = ٢١٠^\circ$ θ في الربع ٣ جا $\theta < ٠$ جتا $\theta < ٠$ ظا $\theta > ٠$

س $\theta = ٣٠٥^\circ$

θ في الربع٤ جتا $\theta > ٠$ جا $\theta < ٠$ ظا $\theta < ٠$

تمرين:

س إذا كانت $٩٠^\circ < \theta < ٢٧٠^\circ$ فما هي إشارة جتا(θ)؟

θ في الربع ٢ أو في الربع ٣

جتا $\theta < ٠$

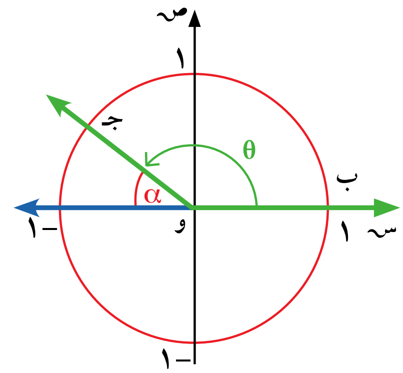
س : إذا كانت $٠ < \theta < \pi$ فما هي إشارة جا(θ) ؟

θ في الربع ١ أو في الربع ٢

$\therefore$ جا $\theta > ٠$

زاوية الاسناد :

هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات



عندما θ تقع في الربع الثاني

$\alpha^\circ = ١٨٠^\circ - \theta^\circ$

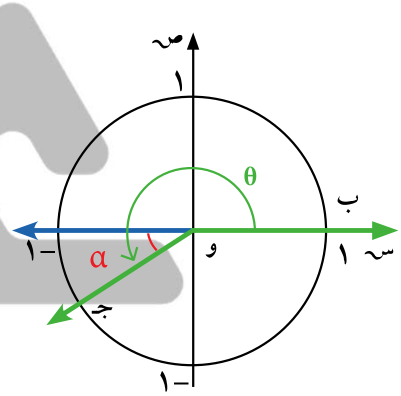
$\alpha^{د} = \pi - \theta^{د}$

$\theta = ١٢٠^\circ$ تقع في الربع ٢

$\alpha = ١٨٠^\circ - ١٢٠^\circ = ٦٠^\circ$

$\theta = \frac{٥\pi}{٦}$ تقع في الربع ٢

$\alpha = \pi - \frac{٥\pi}{٦} = \frac{\pi}{٦}$



عندما θ تقع في الربع الثالث

$\alpha^\circ = \theta^\circ - ١٨٠^\circ$

$\alpha^{د} = \theta^{د} - \pi$

$\theta = ٢٠٠^\circ$ تقع في الربع ٣

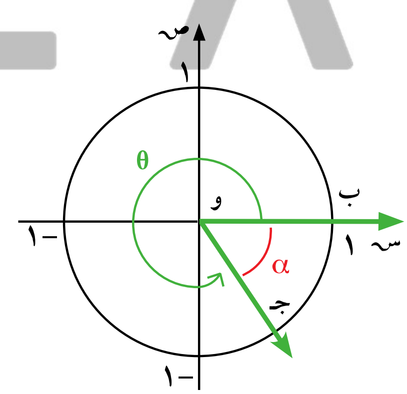
$\alpha = \theta - ١٨٠^\circ$

$= ٢٠٠ - ١٨٠ = ٢٠^\circ$

$\theta = \frac{٥\pi}{٤}$ تقع في الربع ٣

$\alpha = \theta - \pi$

$= \frac{٥\pi}{٤} - \pi = \frac{\pi}{٤}$



عندما θ تقع في الربع الرابع

$\alpha^\circ = ٣٦٠^\circ - \theta^\circ$

$\alpha^{د} = ٢\pi - \theta^{د}$

$\theta = ٣٢٠^\circ$ تقع في الربع ٤

$\alpha = ٣٦٠ - ٣٢٠^\circ = ٤٠^\circ$

$\theta = \frac{٥\pi}{٣}$ تقع في الربع ٤

$\alpha = ٢\pi - \theta$

$= ٢\pi - \frac{٥\pi}{٣} = \frac{\pi}{٣}$

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

النسب المثلثية للزاويتين θ، $-\theta$

جتا$(-\theta)$ = جتا(θ) ، جا$(-\theta)$ = − جا(θ) ، ظا$(-\theta)$ = − ظا(θ)

تمرين :

س إذا كان جتا$\left(\frac{\pi ٣}{٨}\right) = \frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}}{٢}$ فأوجد جتا$\left(-\frac{\pi ٣}{٨}\right)$

= جتا$\left(-\frac{\pi ٣}{٨}\right)$ = جتا$\left(\frac{\pi ٣}{٨}\right) = \frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}}{٢}$

س إذا كان جا(٣٦°) = ٠,٥٨٧٨ ، فأوجد جا(−٣٦°)

جا(−٣٦) = − جا٣٦ = −٠,٥٨٧٨

س إذا كان ظا(٤٥°) = ١ ، فأوجد ظا(−٤٥°) ظا(−٤٥) = −ظا٤٥ = −١

س إذا كان جا(م) = ٠,٣ ، فأوجد جا(−م) جا(−م) = −جام = −٠,٣

س إذا كان جتا(ل) = ٠,٣٨ ، فأوجد جتا(−ل) جتا(−ل) = جتال = ٠,٣٨

س إذا كان ظا(س) = ٣,١٤ ، فأوجد ظا(−س) ظا(−س) = −ظاس = −٣,١٤

س إذا كان جتا(−ص) = $\frac{١}{٤}$ فأوجد جتاص = $\frac{١}{٤}$

النسب المثلثية للزاويتين θ، $(\pi-\theta)$

جتا$(\pi - \theta)$ = −جتا(θ) ، جا$(\pi - \theta)$ = جا(θ) ، ظا$(\pi - \theta)$ = −ظا(θ)

س جتا(٣٠°) = $\frac{١}{٢}$ ، فإن جا(١٥٠°) = جا(١٨٠ − ٣٠) = جا٣٠ = $\frac{١}{٢}$

س جتا س = $\frac{٤}{٥}$ ، فإن جتا(π − س) = −جتا س = −$\frac{٤}{٥}$

س ظا $\frac{\pi}{١٢}$ = ٢ − $\sqrt{٣}$، فإن ظا $\frac{١١\pi}{١٢}$ = ظا$\left(\pi - \frac{\pi}{١٢}\right)$

= −ظا $\frac{\pi}{١٢}$ = −(٢ − $\sqrt{٣}$)

= −٢ + $\sqrt{٣}$

س جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$، أوجد جتا ١٢٠° = جتا(١٨٠ − ٦٠) = −جتا ٦٠ = −$\frac{١}{٢}$

س جا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$، أوجد جا $\frac{٣\pi}{٤}$ = جا$\left(\pi - \frac{\pi}{٤}\right)$ = +جا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

س ظاθ = $\frac{٣}{٥}$، أوجد ظا$(\pi-\theta)$ = −ظاθ = −$\frac{٣}{٥}$

النسب المثلثية للزاويتين θ، $(\theta+\pi)$

جتا$(\theta+\pi)=$ −جتا(θ) ، جا$(\theta+\pi)=$ −جا(θ) ، ظا$(\theta+\pi)=$ ظا(θ)

س بدون استخدام الآلة الحاسبة , إذا كان جتا ٤٠° ≃ ٠,٧٦٦ . فأوجد جتا ٢٢٠°

جتا ٢٢٠ = جتا(١٨٠ + ٤٠) = −جتا ٤٠ = −٠,٧٦٦

س جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ فأوجد جا ٢١٠° .

= جا(١٨٠ + ٣٠) = −جا ٣٠ = −$\frac{١}{٢}$

س ظا $\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$ فأوجد ظا $\frac{٩\pi}{٨}$.

= ظا$\left(\pi+\frac{\pi}{٨}\right)$ = ظا$\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$

س إذا كان جا٥٦° ≃ ٠,٨٢٩ . بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جا٢٣٦°

جا٢٣٦ = جا(١٨٠ + ٥٦) = −جا٥٦ = −٠,٨٢٩

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)$

جتا$\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)=$ جا(θ) ، جا$\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)=$ جتا(θ) ، ظا$\left(\frac{\pi}{٢}-\theta\right)=$ ظتا(θ)

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)$

جتا$\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)=$ −جا(θ) ، جا$\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)=$ جتا(θ) ، ظا$\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)=$ −ظتا(θ)

الدوال المثلثية (الدائرية) علي ع

جا$(\theta + ٣٦٠$ك$) =$ جاθ 　 جا$(\theta + ٢$ك$\pi) =$ جاθ

جتا$(\theta + ٣٦٠$ك$) =$ جتاθ 　 جتا$(\theta + ٢$ك$\pi) =$ جتاθ

ظا$(\theta + ١٨٠$ك$) =$ ظاθ 　 ظا$(\theta +$ك$\pi) =$ ظاθ

حيث ك عدد صحيح

تمرين : بسط التعبيرات التالية لأبسط شكل :

س جتا$(\theta + ٩\pi) =$ جتا$(\theta + \pi + \cancel{٨\pi})$

$=$ جتا$(\theta + \pi)$

$=$ جتا$(\pi + \theta)$

$= -$جتاθ

س جتا$(-\frac{\pi}{٢} - \theta) =$ جتا$\left(-\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)\right) =$ جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) = -$جا$\theta$

س جا س + جا$(٩٠^\circ +$ س$)$ + جا$(١٨٠^\circ +$ س$)$ + جا$(٩٠^\circ -$ س$) =$

$\cancel{\text{جاس}}$ + جتاس $-$ $\cancel{\text{جاس}}$ + جتاس $=$ ٢جتاس

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

قوانين مهمة

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} \qquad \text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$$

$$\text{قا}\,\theta = \frac{1}{\text{جتا}\,\theta} \qquad \text{قتا}\,\theta = \frac{1}{\text{جا}\,\theta}$$

$$\text{جا}^{2}(\theta) + \text{جتا}^{2}(\theta) = 1$$

$$1 + \text{ظا}^{2}(\theta) = \text{قا}^{2}(\theta)$$

$$1 + \text{ظتا}^{2}(\theta) = \text{قتا}^{2}(\theta)$$

س بدون استخدام الآلة الحاسبة , إذا كان $\text{جا}\,\theta = \frac{٣}{٥}$, $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ فأوجد

$\text{جتا}\,\theta$ ، $\text{ظا}\,\theta$

طريقة القوانين:

$$\text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta = ١$$

$$\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} + \text{جتا}^{٢}\theta = ١$$

$$\text{جتا}^{٢}\theta = ١ - \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢}$$

$$\text{جتا}\,\theta = \mp\sqrt{١ - \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢}} = \mp\frac{٤}{٥}$$

θ في الربع الأول : $\text{جتا}\,\theta = \frac{٤}{٥}$

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{\left(\frac{٣}{٥}\right)}{\left(\frac{٤}{٥}\right)} = \frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{٤} = \frac{٣}{٤}$$

طريقة المثلث:

$\hat{\theta}$ في الربع الأول :

$\text{جا}\,\theta = \frac{٣}{٥}$ ← المقابل ← الوتر

$\sqrt{٥^{٢} - ٣^{٢}} = ٤$

ملغى

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٤\text{ك}}{٥\text{ك}} = \frac{٤}{٥}$$

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٣\text{ك}}{٤\text{ك}} = \frac{٣}{٤}$$

س بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان جتا$(\theta) = ٠,٤$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ فأوجد جا(θ) ، ظا(θ)

طريقة القوانين:

$$\text{جا}^٢\theta + \text{جتا}^٢\theta = ١$$

$$\text{جا}^٢\theta + (٠,٤)^٢ = ١$$

$$\text{جا}^٢\theta = ١ - (٠,٤)^٢$$

$$\text{جا}\theta = \mp\sqrt{١ - (٠,٤)^٢} = \mp\frac{\sqrt{٢١}}{٥}$$

θ في الربع الأول : $\text{جا}\theta = \frac{\sqrt{٢١}}{٥}$

$$\text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{\left(\frac{\sqrt{٢١}}{٥}\right)}{٠,٤} = \frac{\sqrt{٢١}}{٢}$$

طريقة المثلث:

$\hat{\theta}$ في الربع الأول :

$\text{جتا}\theta = ٠,٤ = \frac{٢}{٥}$ ← المجاور ← الوتر

ملغى

$$\sqrt{٥^٢ - ٢^٢} = \sqrt{٢١}$$

$$\text{جا}\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{٢١}\text{ك}}{٥\text{ك}} = \frac{\sqrt{٢١}}{٥}$$

$$\text{ظا}\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sqrt{٢١}\text{ك}}{٢\text{ك}} = \frac{\sqrt{٢١}}{٢}$$

س بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان $ظا\theta = \frac{٣}{٤}$ ، $جا\theta < ٠$
فأوجد $جا\theta$ ، $جتا\theta$.

طريقة القوانين:

θ في الربع الثالث

$$١ + ظا^٢\theta = قا^٢\theta$$

$$١ + \left(\frac{٣}{٤}\right)^٢ = قا^٢\theta$$

$$\frac{٢٥}{١٦} = قا^٢\theta$$

$$\frac{١٦}{٢٥} = جتا^٢\theta$$

$$جتا\theta = \mp\sqrt{\frac{١٦}{٢٥}}$$

$$جتا\theta = \mp\frac{٤}{٥}$$

$$جتا\theta = -\frac{٤}{٥}$$ θ في الربع الثالث

$$ظا\theta = \frac{جا\theta}{جتا\theta}$$

$$\frac{٣}{٤} = \frac{جا\theta}{\left(-\frac{٤}{٥}\right)}$$

$$جا\theta = \frac{٣ \times \left(-\frac{٤}{٥}\right)}{٤} = \frac{-٣}{٥}$$

طريقة المثلث:

$\hat{\theta}$ في الربع الثالث

$ظا\theta = \frac{٣}{٤}$ ← مقابل ، ← مجاور

$\sqrt{٤^٢ + ٣^٢} = ٥$

ملغى

$جا\theta = \frac{المقابل}{الوتر}$ ، $جا\theta = \frac{-٣ك}{٥ك} = \frac{-٣}{٥}$

$جتا\theta = \frac{المجاور}{الوتر}$ ، $جتا\theta = \frac{-٤ك}{٥ك} = \frac{-٤}{٥}$

س بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظاθ = ٢$\sqrt{٢}$، جتاθ < ٠
فأوجد جا(θ) ، جتا(θ)

طريقة القوانين:

θ في الربع الثالث

١+ظا$^{٢}\theta$=قا$^{٢}\theta$

١+$(٢\sqrt{٢})^{٢}$=قا$^{٢}\theta$

قا$^{٢}\theta = ٩$

جتا$^{٢}\theta = \frac{١}{٩}$

جتا$\theta = \mp\sqrt{\frac{١}{٩}}$

جتا$\theta = -\frac{١}{٣}$ θ في الربع الثالث

ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

$\frac{٢\sqrt{٢}}{١}$ = $\frac{\text{جا}\theta}{\left(-\frac{١}{٣}\right)}$

جاθ = $\frac{٢\sqrt{٢}\times\left(\frac{-١}{٣}\right)}{١}$ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

طريقة المثلث:

$\hat{\theta}$ في الربع الثالث

ظاθ = $\frac{٢\sqrt{٢}}{١}$ ← مقابل ← مجاور

ملغى

$\sqrt{١^{٢}+(٢\sqrt{٢})^{٢}} = ٣$

جاθ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، جاθ = $\frac{-٢\sqrt{٢}\text{ك}}{٣\text{ك}}$ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

∵ θ في الربع الثالث. جاθ = $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$

جتاθ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ، جتاθ = $\frac{١\text{ك}}{٣\text{ك}}$ = $\frac{١}{٣}$

∵ θ في الربع الثالث: جتاθ = $-\frac{١}{٣}$

س بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظا$(\theta) = \frac{٢٤}{٧}$ ، جتا$(\theta) > ٠$
فأوجد جا(θ) ، جتا(θ)

طريقة القوانين:

θ في الربع الأول

$١ + \text{ظا}^٢\theta = \text{قا}^٢\theta$

$١ + \left(\frac{٢٤}{٧}\right)^٢ = \text{قا}^٢\theta$

$\text{قا}^٢\theta = \frac{٦٢٥}{٤٩}$

$\text{جتا}^٢\theta = \frac{٤٩}{٦٢٥}$

$\text{جتا}\theta = \mp\sqrt{\frac{٤٩}{٦٢٥}}$

$\text{جتا}\theta = +\frac{٧}{٢٥}$ θ في الربع الأول

$\text{ظا}\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

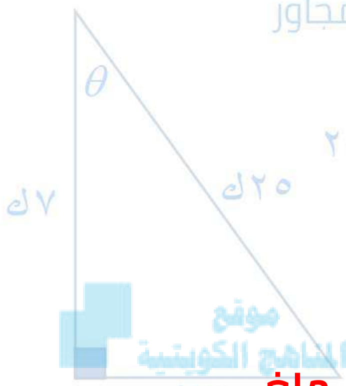
$\frac{٢٤}{٧} = \frac{\text{جا}\theta}{\left(\frac{٧}{٢٥}\right)}$

$\text{جا}\theta = \frac{٢٤ \times \left(\frac{٧}{٢٥}\right)}{٧} = \frac{٢٤}{٢٥}$

طريقة المثلث:

$\hat{\theta}$ في الربع الأول

$\text{ظا}\theta = \frac{٢٤}{٧}$ ← مقابل / ← مجاور



$\sqrt{٢٤^٢ + ٧^٢} = ٢٥$

ملغى

$\text{جا}\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٢٤ك}{٢٥ك} = \frac{٢٤}{٢٥}$

$\text{جتا}\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٧ك}{٢٥ك} = \frac{٧}{٢٥}$

س بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظتا$(\theta) = \frac{٥}{٨}$ ، جتا$(\theta) < ٠$
فأوجد جا(θ)

طريقة القوانين:

θ في الربع الأول

$١ +$ ظتا$^{٢}\theta =$ قتا$^{٢}\theta$

$١ + \left(\frac{٥}{٨}\right)^{٢} =$ قتا$^{٢}\theta$

قتا$^{٢}\theta = \frac{٨٩}{٦٤}$

قتا$\theta = \mp\sqrt{\frac{٨٩}{٦٤}} = \mp\frac{\sqrt{٨٩}}{٨} \Leftarrow$

جا$\theta = \pm\frac{٨}{\sqrt{٨٩}} = \pm\frac{٨\sqrt{٨٩}}{٨٩}$

جا$\theta = \frac{٨\sqrt{٨٩}}{٨٩}$ θ في الربع الأول

طريقة المثلث:

θ في الربع الأول

ظتا$\theta = \frac{٥}{٨}$ ← مجاور ← مقابل

$\sqrt{٨^{٢}+٥^{٢}} = \sqrt{٨٩}$

∴ جا$\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٨ك}{\sqrt{٨٩}ك} = \frac{٨}{\sqrt{٨٩}}$

$= \frac{٨\sqrt{٨٩}}{٨٩} \approx ٠,٨٤٨$

ملغى

س بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان جا $\theta = \frac{٣}{٧}$ ، جتا θ > ٠ فأوجد ظتا(θ) ، ظا(θ)

جا$^٢\theta$ + جتا$^٢\theta$ = ١

$\left(\frac{٣}{٧}\right)^٢$ + جتا$^٢\theta$ = ١

جتا$^٢\theta$ = ١ − $\left(\frac{٣}{٧}\right)^٢ = \frac{٤٠}{٤٩}$

جتا$\theta = \mp\sqrt{\frac{٤٠}{٤٩}} = \mp\frac{\sqrt{٤٠}}{٧}$

جتا$\theta = \frac{\sqrt{٤٠}}{٧}$ $\hat{\theta}$ في الربع الأول

ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{\left(\frac{٣}{٧}\right)}{\left(\frac{\sqrt{٤٠}}{٧}\right)}$

$= \frac{٣}{٧} \times \frac{٧}{\sqrt{٤٠}} = \frac{٣\sqrt{١٠}}{٢٠}$

ظتا$\theta = \frac{٢٠}{٣\sqrt{١٠}} = \frac{٢\sqrt{١٠}}{٣}$

تذكر أن

ظا$\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

ظتا$\theta = \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$

قا$\theta = \frac{١}{\text{جتا}\theta}$

قتا$\theta = \frac{١}{\text{جا}\theta}$

جا$^٢(\theta)$ + جتا$^٢(\theta)$ = ١

١ + ظا$^٢(\theta)$ = قا$^٢(\theta)$

١ + ظتا$^٢(\theta)$ = قتا$^٢(\theta)$

ملغى

س أثبت صحة المطابقة التالية: جا^٣(س) + جا(س) × جتا^٢(س) = جا(س)

الطرف الأيمن = جا^{٣}س + جاس × جتا^{٢}س

= جاس (جا^{٢}س + جتا^{٢}س)

= جاس (١)

= جاس

= الطرف الأيسر

س أثبت صحة المطابقة التالية: $\text{جتا}^4(\text{س})+\text{جا}^2(\text{س})\times\text{جتا}^2(\text{س})=\text{جتا}^2(\text{س})$

الطرف الأيمن $=\text{جتا}^4\text{س}+\text{جا}^2\text{س}\times\text{جتا}^2\text{س}$

$=\text{جتا}^2\text{س}\left(\text{جتا}^2\text{س}+\text{جا}^2\text{س}\right)$

$=\text{جتا}^2\text{س}\,(1)$

$=\text{جتا}^2\text{س}$ = الطرف الأيسر

س أثبت صحة المطابقة التالية: $\dfrac{(\text{قا}(\theta)+1)(\text{قا}(\theta)-1)}{\text{جا}^2(\theta)}=\text{قا}^2(\theta)$

الطرف الأيمن $=\dfrac{(\text{قا}\,\theta+1)(\text{قا}\,\theta-1)}{\text{جا}^2\theta}$

$=\dfrac{\text{قا}^2\theta-1}{\text{جا}^2\theta}$ $\qquad 1+\text{ظا}^2\theta=\text{قا}^2\theta$

$=\dfrac{\text{ظا}^2\theta}{\text{جا}^2\theta}=\dfrac{\left(\dfrac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta}\right)}{\left(\dfrac{\text{جا}^2\theta}{1}\right)}$

$=\dfrac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta}\cdot\dfrac{1}{\text{جا}^2\theta}=\dfrac{1}{\text{جتا}^2\theta}=\text{قا}^2\theta$ = الطرف الأيسر

س أثبت صحة المطابقة التالية:

$\left(\text{قا}^2(\theta)+\text{قتا}^2(\theta)\right)-\left(\text{ظا}^2(\theta)+\text{ظتا}^2(\theta)\right)=2$

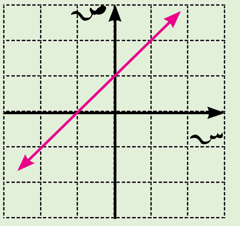
الطرف الأيمن $=\left(\text{قا}^2\theta+\text{قتا}^2\theta\right)-\left(\text{ظا}^2\theta+\text{ظتا}^2\theta\right)$

$=\text{قا}^2\theta+\text{قتا}^2\theta-\text{ظا}^2\theta-\text{ظتا}^2\theta$

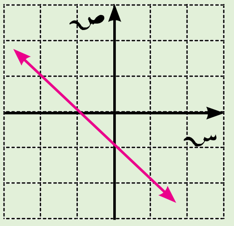
$=1+\cancel{\text{ظا}^2\theta}+1+\cancel{\text{ظتا}^2\theta}-\cancel{\text{ظا}^2\theta}-\cancel{\text{ظتا}^2\theta}$

$=2$ = الطرف الأيسر

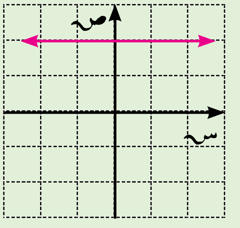
ميل الخط المستقيم



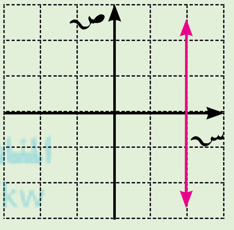
ميل المستقيم موجب



ميل المستقيم سالب



ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا



المستقيم الرأسي ليس له ميل

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$$

أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بكل زوج من النقاط:

س أ(−٢ ، ١) ، ب(٥ ، ٧)

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(٧) - (١)}{(٥) - (-٢)} = \frac{٦}{٧}$$

س جـ(٢ ، ٥) ، د(٤ ، ٧)

$$\text{الميل} = \frac{(٧) - (٥)}{(٤) - (٢)} = ١$$

س ق(−١ ، ٤) ، ك(٣ ، −٢)

∵ الميل = $\frac{(-٢) - (٤)}{(٣) - (-١)} = \frac{-٣}{٢}$

س م(٤ ، ٣) ، ن(−٧ ، ٣)

الميل = $\frac{(٣) - (٣)}{(-٧) - (٤)} =$ صفر (مستقيم أفقي)

س أثبت أن النقاط أ(٢ ، −١) ، ب(−١ ، ٥) ، جـ(٣ ، −٣) علي استقامة واحدة.

ميل $\overline{أب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(٥) - (-١)}{(-١) - (٢)} = -٢$

ميل $\overline{أجـ}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(-٣) - (-١)}{(٣) - (٢)} = -٢$

∴ $\overline{أب} // \overline{أجـ}$ ، مشتركان في أ

∴ أ ، ب ، جـ علي استقامة واحدة

س أ(١ ، −١) ، ب(٢ ، ٢) ، جـ(−١ ، −٧) أثبت أن النقاط أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

$م_١$ = ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢ - (-١)}{٢ - ١} = ٣$

$م_٢$ = ميل $\overleftrightarrow{أجـ}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{-٧ - (-١)}{-١ - ١} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$

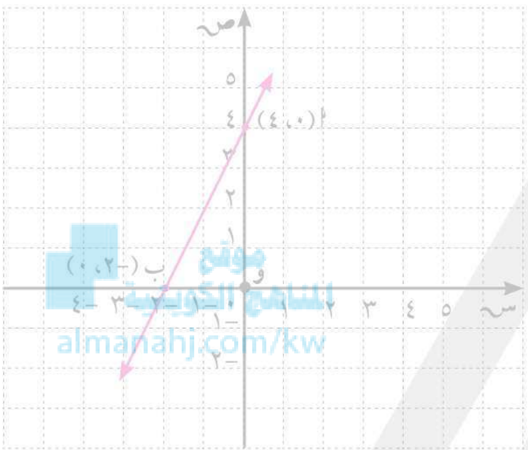
∴ $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{أجـ}$ ، و لكنهما يشتركان في النقطة أ

∴ تكون النقاط أ ، ب ، جـ علي استقامة واحدة .

تذكر أن

العلاقة بين ظل الزاوية θ التي يصنعها مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات و ميل هذا المستقيم م هي : م = ظاθ

س أوجد ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ حيث أ(٠ ، ٤) ، ب(−٢ ، ٠) و قارنه بظل الزاوية $\hat{\text{ب}}$ في المثلث قائم الزاوية ب و أ



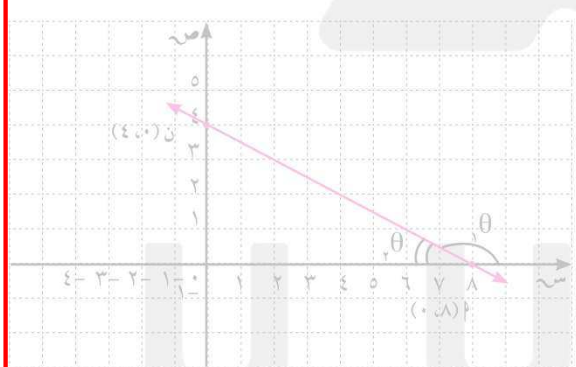
$$م = \overline{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(٠) - (٤)}{(-٢) - (٠)} = ٢$$

$$ظا ب = \frac{المقابل}{المجاور} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

$$ظا ب = الميل = ٢$$

ملغى

س أوجد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أن}}$ وقارنه بظل الزاوية الحادة التي قياسها $\theta_٢$ وظل الزاوية المنفرجة التي قياسها $\theta_١$



$$م = \overline{أن} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(٤) - (٠)}{(٠) - (٨)} = \frac{-١}{٢}$$

$$ظا\theta_٢ = \frac{المقابل}{المجاور} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

$$\theta_١ + \theta_٢ = ١٨٠$$

$$\theta_١ = ١٨٠ - \theta_٢$$

$$ظا\theta_١ = ظا(١٨٠ - \theta_٢) = -ظا\theta_٢ = -\frac{١}{٢}$$

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم الذي ميله (م) و يمر بالنقطة ($س_١$، $ص_١$)

$$ص - ص_١ = م(س - س_١)$$

س اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٢}$ ويمر بالنقطة (٤ ، − ١)

$$ص - ص_١ = م(س - س_١)$$

$$ص - (-١) = \frac{٣}{٢}(س - ٤)$$

$$ص + ١ = \frac{٣}{٢}س - ٦$$

$$ص = \frac{٣}{٢}س - ٦ - ١$$

$$ص = \frac{٣}{٢}س - ٧$$

س اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{-٢}{٣}$ ويمر بالنقطة (−٦ ، ٥)

$$ص - ص_١ = م\left(س - س_١\right)$$

$$ص - ٥ = \frac{-٢}{٣}\left(س - (-٦)\right)$$

$$ص - ٥ = \frac{-٢}{٣}س - ٤$$

$$ص = \frac{-٢}{٣}س - ٤ + ٥$$

$$ص = \frac{-٢}{٣}س + ١$$

س اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين: أ(١ ، ٣) ، ب(−٢ ، ٠)

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(٠) - (٣)}{(-٢) - (١)} = ١$$

$$ص - ص_١ = م\left(س - س_١\right)$$

$$ص - ٣ = س - ١$$

$$ص = س - ١ + ٣$$

$$ص = س + ٢$$

س اكتب معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين: جـ(٣ ، −١) ، د(٢ ، −٢)

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{(-٢) - (-١)}{(٢) - (٣)} = ١$$

$$ص - ص_١ = م\left(س - س_١\right)$$

$$ص + ١ = س - ٣$$

$$ص = س - ٣ - ١$$

$$ص = س - ٤$$

س إذا كان المستقيم ل: $\text{ص} = ٢\text{س} + ١$ فأوجد : معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٢ ، − ٣) .

$\text{م}_١ = ٢$ $\qquad (\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$

$(٢ ، −٣)$

∵ المستقيمين متوازيان $\text{م}_٢ = \text{م}_١ = ٢$

المستقيم هـ : $\text{ص} − \text{ص}_١ = \text{م}_٢ (\text{س} − \text{س}_١)$

$\text{ص} − −٣ = ٢ (\text{س} − ٢)$

$\text{ص} + \cancel{٣} = ٢\text{س} − ٤ − ٣$

$\text{ص} = ٢\text{س} − ٧$

س إذا كان المستقيم ل: $\text{ص} = ٢\text{س} + ١$ فأوجد :
معادلة المستقيم ف العمودي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة: (٤ ، − ٣)

$\text{م}_١ = ٢$ $\qquad (\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$

$(٤ ، −٣)$

∵ المستقيمين متعامدان ∴ $\text{م}_١ \times \text{م}_٢ = −١$

$\text{م}_٢ = \frac{−١}{\text{م}_١} = \frac{−١}{٢}$

معادلة المستقيم ف : $\text{ص} − \text{ص}_١ = \text{م}_٢ (\text{س} − \text{س}_١)$

$\text{ص} − −٣ = \frac{−١}{٢} (\text{س} − ٤)$

$\text{ص} = −\frac{١}{٢}\text{س} + ٢ − ٣$

$\text{ص} = −\frac{١}{٢}\text{س} − ١$

س إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س + ٣ = ٠ فأوجد :

$\text{م}_1 = \frac{-١}{٣}$

$٣\text{ص} = -\text{س} - ٣$

$\text{ص} = \frac{-١}{٣}\text{س} - ١$

- معادلة المستقيم ل الموازي للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة (−٣ ، ٢)

∵ المستقيمين متوازيان $\text{م}_2 = \text{م}_1 = \frac{-١}{٣}$

معادلة المستقيم ل $\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}_2 \left(\text{س} - \text{س}_1\right)$

$\text{ص} - ٢ = \frac{-١}{٣}\left(\text{س} - -٣\right)$

$\text{ص} \cancel{-٢} = \frac{-١}{٣}\left(\text{س} + ٣\right) + ٢$

$\text{ص} = -\frac{١}{٣}\text{س} - ١ + ٢ \leftarrow \text{ص} = \frac{-١}{٣}\text{س} + ١$

س إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س + ٣ = ٠ فأوجد :

$\text{م}_1 = \frac{-١}{٣}$

$٣\text{ص} = -\text{س} - ٣$

$\text{ص} = \frac{-١}{٣}\text{س} - ١$

- معادلة المستقيم ن العمودي علي للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة (١ ، ٤)

∵ المستقيمين متعامدان ∴ $\text{م}_1 \times \text{م}_2 = -١$

$\text{م}_2 = \frac{-١}{\text{م}_1} = \frac{-١}{\left(-\frac{١}{٣}\right)} = ٣$

معادلة المستقيم ن $\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}_2 \left(\text{س} - \text{س}_1\right)$

$\text{ص} - ٤ = ٣\left(\text{س} - ١\right)$

$\text{ص} = ٣\left(\text{س} - ١\right) + ٤$

$\text{ص} = ٣\text{س} - ٣ + ٤ \leftarrow \text{ص} = ٣\text{س} + ١$

البعد بين نقطة ومستقيم

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: $\text{أ}\text{س} + \text{ب}\text{ص} + \text{جـ} = ٠$

فإن البعد ف بين النقطة د$(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ و المستقيم ل

$$\text{ف} = \frac{|\text{أ}\text{س}_١ + \text{ب}\text{ص}_١ + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$$

س أوجد البعد بين المستقيم ل: $\text{ص} = ٣\text{س} - ٤$ و النقطة هـ $(٢ ، ١)$

المستقيم $\text{أ}\text{س} + \text{ب}\text{ص} + \text{جـ} = ٠$

$\text{ص} = ٣\text{س} - ٤$

$٣\text{س} - \text{ص} - ٤ = ٠$

(١) (٢)

$$\text{ف} = \frac{|٣\cancel{\text{س}} - \cancel{\text{ص}} - ٤|}{\sqrt{(٣)^٢ + (-١)^٢}} = \frac{\sqrt{١٠}}{١٠} \simeq ٠{,}٣١٦ \text{ وحدة طول}$$

س أوجد البعد بين المستقيم ل: $\text{ص} = -\text{س} + ٣$ و النقطة د$(٢ ، ٥)$

$\text{ص} = -\text{س} + ٣$

$-\text{س} - \text{ص} + ٣ = ٠$

(٢) (٥)

$$\text{ف} = \frac{|-\cancel{\text{س}} - \cancel{\text{ص}} + ٣|}{\sqrt{(-١)^٢ + (-١)^٢}} = ٢\sqrt{٢} \simeq ٢{,}٨٢٨ \text{ وحدة طول}$$

س أوجد البعد من النقطة د(−٤ ، −٣) الى المستقيم : ٢ص = ٣س − ٧

$$\text{٢ص} = \text{٣س} - ٧$$

$$\text{٣س} - \text{٢ص} - ٧ = ٠$$

(−٤) (−٣)

$$\text{ف} = \frac{|\text{٣س} - \text{٢ص} - ٧|}{\sqrt{(٣)^٢ + (-٢)^٢}} = \sqrt{١٣} \text{ وحدة طول}$$

س أوجد البعد من النقطة ط(٣ ، −٤) الى المستقيم: ص = $-\frac{٤}{٣} + \frac{\text{س}}{٦}$

$$\text{ص} = -\frac{٤}{٣} + \frac{\text{س}}{٦} \quad (\times ٦)$$

$$\text{٦ص} = -٨ + \text{س}$$

$$\text{س} - \text{٦ص} - ٨ = ٠$$

(٣) (−٤)

$$\text{ف} = \frac{|\text{س} - \text{٦ص} - ٨|}{\sqrt{(١)^٢ + (-٦)^٢}} \simeq ٣,١٢٤ \text{ وحدة طول}$$

س أوجد البعد بين نقطة الأصل و المستقيم : ٢ص = ٣س + ٤

$$\frac{|3(0) - 2(0) + 4|}{\sqrt{(3)^2 + (-2)^2}}$$

1.109400392

$$\text{٢ص} = \text{٣س} + ٤$$

$$\text{٣س} - \text{٢ص} + ٤ = ٠$$

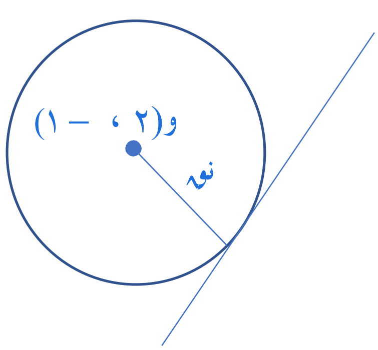
(٠) (٠)

$$\text{ف} = \frac{|\text{٣س} - \text{٢ص} + ٤|}{\sqrt{(٣)^٢ + (-٢)^٢}} \simeq ١,١٠٩ \text{ وحدة طول}$$

س أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و(٢ ، −١) إذا كان المستقيم : ٣س − ٤ص + ٧ = ٠ مماسا لها.

(٢) (−١)

$$\text{نو} = \frac{|\text{٣س} - \text{٤ص} + ٧|}{\sqrt{(٣)^٢ + (-٤)^٢}} = \frac{١٧}{٥} \text{ وحدة طول}$$



س أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، -٣) على المستقيم : -٢س + ص - ٤ =٠

$$ف = \frac{|-٢(٢) + (-٣) - ٤|}{\sqrt{(-٢)^٢ + (١)^٢}} \simeq ٤,٩٢ \text{ وحدة طول}$$

س أوجد طول العمود المرسوم من نقطة (-٤ ، ٧) على المستقيم : ص = -٥س + ١

ص = −٥س + ١

−٥س − ص + ١ = ٠

$$ف = \frac{|-٥(-٤) - (٧) + ١|}{\sqrt{(-٥)^٢ + (-١)^٢}} \simeq ٢,٧٥ \text{ وحدة طول}$$

$$\frac{|-5(-4)-(7)+1|}{\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}}$$

2.74562589193

س أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على المستقيم المار بالنقطتين (٧، ٣) ، (-٥ ، ١).

نقطة الأصل (٠ ، ٠) .

المستقيم المار بالنقطتين $(٧ ، ٣)$ ، $(-٥ ، ١)$.
($س_١ = ٧$ ، $ص_١ = ٣$ ، $س_٢ = -٥$ ، $ص_٢ = ١$)

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ٣}{-٥ - ٧} = \frac{١}{٦}$$

المستقيم $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$$ص - ٣ = \frac{١}{٦}(س - ٧)$$

$$ص = \frac{١}{٦}س - \frac{٧}{٦} + ٣$$

$$ص = \frac{١}{٦}س + \frac{١١}{٦}$$

$$\frac{١}{٦}س - ص + \frac{١١}{٦} = ٠$$

$$ف = \frac{\left|\frac{١}{٦}(٠) - (٠) + \frac{١١}{٦}\right|}{\sqrt{\left(\frac{١}{٦}\right)^٢ + (-١)^٢}}$$

$\simeq ١,٨١$ وحدة طول

معادلة الدائرة

$$(\text{س} - \text{د})^{\text{٢}} + (\text{ص} - \text{هـ})^{\text{٢}} = \text{نق}^{\text{٢}}$$

وتسمى هذه الصورة القياسية لمعادلة الدائرة بمعلومية المركز (د ، هـ)
وطول نصف القطر نق

س أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، − ٢) وطول نصف قطرها (٧) وحدات

(٣ ، − ٢) ‏ ‏ ‏ ٧
د ‏ هـ ‏ ‏ ‏ نق

$$(\text{س} - \text{د})^{\text{٢}} + (\text{ص} - \text{هـ})^{\text{٢}} = \text{نق}^{\text{٢}}$$

$$(\text{س} - \text{٣})^{\text{٢}} + (\text{ص} - - \text{٢})^{\text{٢}} = \text{٧}^{\text{٢}}$$

$$(\text{س} - \text{٣})^{\text{٢}} + (\text{ص} + \text{٢})^{\text{٢}} = \text{٤٩}$$

س أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥ ، − ٣) وطول نصف قطرها (٥) وحدات

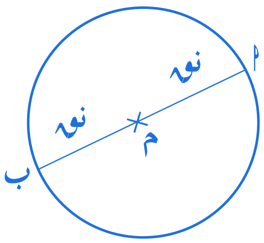
(٥ ، − ٣) ‏ ‏ ‏ ٥
د ‏ هـ ‏ ‏ ‏ نق

$$(\text{س} - \text{د})^{\text{٢}} + (\text{ص} - \text{هـ})^{\text{٢}} = \text{نق}^{\text{٢}}$$

$$(\text{س} - \text{٥})^{\text{٢}} + (\text{ص} - - \text{٣})^{\text{٢}} = \text{٥}^{\text{٢}}$$

$$(\text{س} - \text{٥})^{\text{٢}} + (\text{ص} + \text{٣})^{\text{٢}} = \text{٢٥}$$

س أوجد معادلة الدائرة التي قطرها $\overline{\text{أب}}$ حيث أ(−٣ ، ٦) ، ب(١ ، −٢)



مركز الدائرة هو منتصف $\overline{\text{أب}}$

$$\text{م}\left(\frac{-٣+١}{٢} \text{ ، } \frac{٦+-٢}{٢}\right) \leftarrow \text{م}(\overset{\text{د}}{-١} \text{ ، } \overset{\text{هـ}}{٢})$$

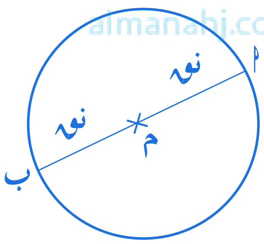
$$\text{نق} = \text{أم} = \sqrt{(-١ - -٣)^{٢} + (٢ - ٦)^{٢}} = ٢\sqrt{٥} \text{ وحدة طول}$$

$$\text{معادلة الدائرة } (\text{س} - \text{د})^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢} = \text{نق}^{٢}$$

$$(\text{س} - -١)^{٢} + (\text{ص} - ٢)^{٢} = (٢\sqrt{٥})^{٢}$$

$$(\text{س} + ١)^{٢} + (\text{ص} - ٢)^{٢} = ٢٠$$

س أوجد معادلة الدائرة التي قطرها $\overline{\text{أب}}$ حيث أ(٤ ، −٢) ، ب(٢ ، ٤)



مركز الدائرة هو منتصف $\overline{\text{أب}}$

$$\text{م}\left(\frac{٤+٢}{٢} \text{ ، } \frac{-٢+٤}{٢}\right) \leftarrow \text{م}(٣ \text{ ، } ١)$$

$$\text{نق} = \text{أم} = \sqrt{(٣ - ٤)^{٢} + (١ - -٢)^{٢}} = \sqrt{١٠} \text{ وحدة طول}$$

$$\text{معادلة الدائرة } (\text{س} - \text{د})^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢} = \text{نق}^{٢}$$

$$(\text{س} - ٣)^{٢} + (\text{ص} - ١)^{٢} = (\sqrt{١٠})^{٢}$$

$$(\text{س} - ٣)^{٢} + (\text{ص} - ١)^{٢} = ١٠$$

س أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٤ وحدات

س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}

س^{٢} + ص^{٢} = ١٦

س أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦ سم

القطر = ٦ وبالتالي نق = ٣ سم

س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}

س^{٢} + ص^{٢} = ٩

س أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، ٤) و تمس محور الصادات

(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢} نق = |د| = |٣| = ٣

(س − ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٣^{٢}

(س − ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٩

س أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، ٤) و تمس محور السينات

(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢} نق = |هـ| = |٤| = ٤

(س − ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٤^{٢}

(س − ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ١٦

أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

س $(س + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٩$

$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

$\left\{\begin{array}{l} - د = ٢ \Leftarrow د = -٢ \\ -هـ = -٣ \Leftarrow هـ = ٣ \end{array}\right.$ مركز الدائرة $(-٢ ، ٣)$

$نق^٢ = ٩ \Leftarrow نق = \sqrt{٩} = ٣$

أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

س $س^٢ + ص^٢ = ٤٩$

$\left\{\begin{array}{l} د = ٠ \\ هـ = ٠ \end{array}\right.$ مركز الدائرة $(٠ ، ٠)$

$نق = \sqrt{٤٩} = ٧$

س $(س - ٤)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٣٦$

$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

$د = ٤ \quad هـ = -٥ \Leftarrow$ مركز الدائرة $(٤ ، -٥)$

$نق = \sqrt{٣٦} = ٦$

الصورة العاملة لمعادلة الدائرة :

$$\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} + \text{ل س} + \text{ك ص} + \text{ب} = ٠$$

حيث ل ، ك ، ب ثوابت

مركز الدائرة $\left(\frac{-\text{ل}}{٢} ، \frac{-\text{ك}}{٢} \right)$

نصف القطر $\text{نق} = \frac{١}{٢}\sqrt{\text{ل}^{2} + \text{ك}^{2} - ٤\text{ب}}$ حيث $\text{ل}^{2} + \text{ك}^{2} - ٤\text{ب} > ٠$

س عين مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة:

$$٢\text{س}^{2} + ٢\text{ص}^{2} - ١٢\text{س} - ٤\text{ص} - ٣٠ = ٠$$

بالقسمة على ٢ : $\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} - \underbrace{٦}_{\text{ل}}\text{س} - \underbrace{٢}_{\text{ك}}\text{ص} - \underbrace{١٥}_{\text{ب}} = ٠$

مركز الدائرة $\left(\frac{-\text{ل}}{٢} ، \frac{-\text{ك}}{٢} \right) = \left(\frac{٦}{٢} ، \frac{٢}{٢} \right) = (٣ ، ١)$

$$\text{نق} = \frac{١}{٢}\sqrt{\text{ل}^{2} + \text{ك}^{2} - ٤\text{ب}} = \frac{١}{٢}\sqrt{(-٦)^{2} + (-٢)^{2} - ٤(-١٥)} = ٥$$

س عين مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة:

$$٣\text{س}^{2} + ٣\text{ص}^{2} - ٦\text{س} + ٩\text{ص} - ١٢ = ٠$$

بالقسمة على ٣ : $\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} - \underbrace{٢}_{\text{ل}}\text{س} + \underbrace{٣}_{\text{ك}}\text{ص} - \underbrace{٤}_{\text{ب}} = ٠$

مركز الدائرة $\left(\frac{-\text{ل}}{٢} ، \frac{-\text{ك}}{٢} \right) = \left(\frac{٢}{٢} ، \frac{-٣}{٢} \right) = \left(١ ، \frac{-٣}{٢} \right)$

$$\text{نق} = \frac{١}{٢}\sqrt{\text{ل}^{2} + \text{ك}^{2} - ٤\text{ب}} = \frac{١}{٢}\sqrt{(-٢)^{2} + (٣)^{2} - ٤(-٤)} = \frac{\sqrt{٢٩}}{٢}$$

$$س^2 + ص^2 + ل س + ك ص + ب = 0$$

حيث ل ، ك ، ب ثوابت

- عندما $ل^2 + ك^2 - 4ب < 0$ فإن المعادلة لا تمثل دائرة.
- عندما $ل^2 + ك^2 - 4ب = 0$ فإن المعادلة تمثل نقطة.
- عندما $ل^2 + ك^2 - 4ب > 0$ فإن المعادلة تمثل دائرة.

هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسر.

س $س^2 + ص^2 - 4س + 7ص + 17 = 0$

$ل^2 + ك^2 - 4ب = (-4)^2 + (7)^2 - 4(17) = -3$

$\because -3 <$ صفر

$\therefore$ ليست دائرة.

ل = −٦
ك = −٢
ج = −١٥

س $س^2 + ص^2 + 5س - 6ص - 4 = 0$

$ل^2 + ك^2 - 4ب = (5)^2 + (-6)^2 - 4(-4) = 77$

$\because 77 >$ صفر $\therefore$ معادلة دائرة.

مركزها $\left(\frac{-ل}{2} ، \frac{-ك}{2}\right) = \left(\frac{-5}{2} ، \frac{6}{2}\right) = \left(\frac{-5}{2} ، 3\right)$

نق $= \frac{1}{2}\sqrt{ل^2 + ك^2 - 4ب} = \frac{1}{2}\sqrt{77}$

ل = −٢
ك = ٣
ج = −٤

س $س^2 + ص^2 - 2س - 2ص + 2 = 0$

$ل^2 + ك^2 - 4ب = (-2)^2 + (-2)^2 - 4 \times (2) =$ صفر

$\therefore$ تمثل نقطة. $\left(\frac{-ل}{2} ، \frac{-ك}{2}\right)$

$\left(\frac{2}{2} ، \frac{2}{2}\right)$

$(1 ، 1)$

س $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٣\text{س} + ٥\text{ص} - \frac{١٥}{٤} = ٠$

ل ك ب

$\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - ٤\text{ب} = ٩ + ٢٥ - ٤\left(\frac{-١٥}{٤}\right) = ٩ + ٢٥ + ١٥ = ٤٩ > ٠$

$٤٩ > ٠$ ∴ المعادلة تمثل معادلة دائرة.

مركزها $\left(\frac{-\text{ل}}{٢} ، \frac{-\text{ك}}{٢}\right) = \left(\frac{٣}{٢} ، \frac{-٥}{٢}\right)$

$\text{نق} = \frac{١}{٢}\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - ٤\text{ب}} = \frac{١}{٢}\sqrt{٤٩} = \frac{٧}{٢}$

س $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ٤\text{س} - ٧\text{ص} + ٢٠ = ٠$

ل ك ب

$\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - ٤\text{ب} = ١٦ + ٤٩ - ٤ \times ٢٠ = -١٥ < ٠$

∴ المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

س $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٦\text{س} + ٨\text{ص} + ٢٥ = ٠$

ل ك ب

$\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - ٤\text{ب} = ٣٦ + ٦٤ - ٤ \times ٢٥ = ٠$

∴ المعادلة تمثل نقطة $\left(\frac{-\text{ل}}{٢} ، \frac{-\text{ك}}{٢}\right)$

$\left(\frac{٦}{٢} ، \frac{-٨}{٢}\right)$

$(٣ ، -٤)$

معادلة مماس لدائرة بالصورة القياسية :

س أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها (س – ٢)^{٢} + (ص – ١)^{٢} = ٢٥
عند نقطة التماس أ(٦ ، ٤)

المركز (٢ ، ١)

نق = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

ميل نصف القطر = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

= $\frac{١ - ٤}{٢ - ٦}$ = $\frac{٣}{٤}$

المماس ⊥ نصف القطر

م المماس = $\frac{-١}{\left(\frac{٣}{٤}\right)}$ = $\frac{-٤}{٣}$

معادلة المماس :

ص – ص$_{١}$ = م (س – س$_{١}$)

ص – ٤ = $\frac{-٤}{٣}$ (س – ٦)

ص = $\frac{-٤}{٣}$ س + ٨ + ٤

ص = $\frac{-٤}{٣}$ س + ١٢

س أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها (س – ١)^{٢} + (ص – ٢)^{٢} = ٥
عند نقطة التماس أ(٣ ، ١)

المركز (١ ، ٢)

نق = $\sqrt{٥}$

ميل نصف القطر = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

= $\frac{٢ - ١}{١ - ٣}$ = $\frac{-١}{٢}$

∵ المماس ⊥ نصف القطر

ميل المماس = $\frac{-١}{\left(\frac{-١}{٢}\right)}$ = ٢

معادلة المماس :

ص – ص$_{١}$ = م (س – س$_{١}$)

ص – ١ = ٢ (س – ٣)

ص = ٢س – ٦ + ١

ص = ٢س – ٥

معادلة مماس لدائرة بالصورة العامة :

س أثبت أن النقطة أ(١ ، ١) تنتمى الى الدائرة التي مركزها (و)
ومعادلتها: $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ٦\text{س} + ٨\text{ص} - ١٦ = ٠$
ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

بالتعويض: $(١)^{٢} + (١)^{٢} + ٦(١) + ٨(١) - ١٦ = ٠$

∴ أ(١ ، ١) تنتمي إلي الدائرة

مركزها $\left(\frac{-\text{ل}}{٢} ، \frac{-\text{ك}}{٢}\right)$

$\left(\frac{-٦}{٢} ، \frac{-٨}{٢}\right)$

$(-٣ ، -٤)$

نق $= \frac{١}{٢}\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - ٤\text{ب}}$

$= \frac{١}{٢}\sqrt{٦^{٢} + ٨^{٢} - ٤(-١٦)} = \sqrt{٤١}$

ميل نصف القطر $= \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

$= \frac{-٤ - ١}{-٣ - ١} = \frac{٥}{٤}$

∵ المماس ⊥ نصف القطر

ميل المماس $= \frac{-١}{\left(\frac{٥}{٤}\right)} = \frac{-٤}{٥}$

معادلة المماس:

$\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}\left(\text{س} - \text{س}_{١}\right)$

$\text{ص} - ١ = \frac{-٤}{٥}\left(\text{س} - ١\right)$

$\text{ص} = \frac{-٤}{٥}\text{س} + \frac{٤}{٥} + ١$

$\text{ص} = \frac{-٤}{٥}\text{س} + \frac{٩}{٥}$

س أثبت أن النقطة أ(٦ ، −٤) تنتمي الى الدائرة التي مركزها (و) ومعادلتها:

$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٤\text{س} + ٢\text{ص} - ٢٠ = ٠$

ثم أوجد معادلة المماس لهذه الدائرة عند هذه النقطة

بالتعويض عن النقطة $(٦ ، -٤)$: $(٦)^{٢} + (-٤)^{٢} - ٤(٦) + ٢(-٤) - ٢٠ = ٠$

∴ أ$(٦ ، -٤)$ تنتمي إلي الدائرة

مركزها $\left(\frac{-\text{ل}}{٢} ، \frac{-\text{ك}}{٢}\right)$

$(٢ ، -١)$

$\text{نق} = \frac{١}{٢}\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - ٤\text{ب}}$

$= \frac{١}{٢}\sqrt{(-٤)^{٢} + ٢^{٢} - ٤(-٢٠)} = ٥$

ميل نصف القطر $= \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

$= \frac{(-١) - (-٤)}{٢ - ٦} = \frac{-٣}{٤}$

∵ المماس ⊥ نصف القطر

م المماس $= \frac{-١}{\left(\frac{-٣}{٤}\right)} = \frac{٤}{٣}$

معادلة المماس:

$\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}(\text{س} - \text{س}_{١})$

$\text{ص} - (-٤) = \frac{٤}{٣}(\text{س} - ٦)$

$\text{ص} = \frac{٤}{٣}\text{س} - ٨ - ٤$

$\text{ص} = \frac{٤}{٣}\text{س} - ١٢$