تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الكويتية

almanahj.com/kw

موقع المناهج الكويتية

الملف حل كراسة التمارين مع مجموعة من الأسئلة المهمة
موقع المناهج ⇦ المناهج الكويتية ⇦ الصف الثاني عشر العلمي ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الأول

روابط مواقع التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر العلمي

روابط مواد الصف الثاني عشر العلمي على تلغرام

التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر العلمي والمادة رياضيات في الفصل الأول

1	نموذج اختبار أول ثانوية الرشيد بنين
2	تجميع اختبارات قدرات
3	تمارين الاتصال(موضوعي)في مادة الرياضيات
4	اوراق عمل الاختبار القصير في مادة الرياضيات
5	حل كتاب التمارين في مادة الرياضيات

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) $\lim_{t\to -4^-} g(t) = 5$ (b) $\lim_{t\to -4^+} g(t) = 2$ (c) $\lim_{t\to -4} g(t)$ غير موجودة

لأنّ النهايتين من جهة اليمين وجهة اليسار مختلفتان.

(d) $g(-4) = 2$

(2) (a) $\lim_{h\to 0^-} f(h) = -4$ (b) $\lim_{h\to 0^+} f(h) = -4$

(c) $\lim_{h\to 0} f(h) = -4$ (d) $f(0) = -4$

(3) (a) 6 (b) 0

(c) 9 (d) -3

(4) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} (3x^2(2x-1)) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right] = 3\left(\frac{1}{4}\right)(-2) = -\frac{3}{2}$

(5) $\lim_{y\to -3} \frac{y^2+4y+3}{y^2-3} = \frac{(-3)^2+4(-3)+3}{(-3)^2-3} = \frac{0}{6} = 0$

(6) $\lim_{x\to -4} (x+3)^{1998} = (-4+3)^{1998} = (-1)^{1998} = 1$

(7) $\lim_{x\to 3} \sqrt{x-2} = \sqrt{3-2} = 1$

(8) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$ $\therefore$ $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$

(9) (a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ $\therefore$ $\lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

(b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$

(10) (a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$ $\therefore$ $\lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

(b) $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

(11) $\lim_{x\to 0} \frac{(4+x)^2-16}{x} = \lim_{x\to 0} (x+8) = 8$

(12) $\lim_{t\to 2} \frac{t-1}{t+2} = \frac{1}{4}$

(13) $\lim_{x\to 0} \frac{(3+x)^3-27}{x} = \lim_{x\to 0} ((3+x)^2+3(3+x)+9) = 27$

(14) $\lim_{x\to -2^-} \frac{|x+2|}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{-1}{x+1} = 1$; $\lim_{x\to -2^+} \frac{|x+2|}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x+1} = -1$

(15) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+7-16}{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)} = \frac{3}{8}$

(16) $\lim_{x\to -3} \frac{(x+3)\left(\sqrt[3]{(9x)^2}-3\sqrt[3]{9x}+9\right)}{(\sqrt[3]{9x}+3)\left(\sqrt[3]{(9x)^2}-3\sqrt[3]{9x}+9\right)} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)\left(\sqrt[3]{(9x)^2}-3\sqrt[3]{9x}+9\right)}{9(x+3)} = 3$

(17) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x^2-7x+6}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x^2-5x+3)=17$

(18) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2-9)(x^2+2)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)(x^2+2)=66$

(19) $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2+3x+6)=28$

(20) $=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

(21) $=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1-3}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=1$

(22) $=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{4x}{(x-2)(x+2)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)x-4x}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{(x+2)}=\dfrac{1}{2}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (a)	**(3)** (b)	**(4)** (a)	**(5)** (a)
(6) (a)	**(7)** (d)	**(8)** (c)	**(9)** (d)	**(10)** (c)
(11) (c)	**(12)** (d)	**(13)** (a)	**(14)** (a)	

نهايات تشتمل على ∞–، ∞   تمرّنْ 2–1

المجموعة A تمارين مقالية

(1) 0   **(2)** 0   **(3)** $\frac{1}{2}$

(4) $(2-1)\times 1=1$ **(5)** ∞ **(6)** ∞

(7) $-\infty$

(8) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} \dfrac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^8}} = \infty$

(9) (a) $x = 0 \ , \ x = -\frac{5}{2}$ $\qquad y = \frac{3}{2}$

(10) (a) $x = 1 \ , \ x = -\frac{5}{2}$ $\qquad y = 0$

(11) (a) $x = 0 \ , \ x = -1$ $\qquad y = 4$

(12) (a) $x = \frac{1}{2} \ , \ x = 2$ $\qquad y = 0$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (a)	(3) (a)	(4) (b)
(5) (b)	(6) (b)	(7) (c)	(8) (b)
(9) (b)	(10) (d)	(11) (a)	(12) (c)
(13) (d)			

صيغ غير معينة — تمرَّنْ 3–1

المجموعة A تمارين مقالية

(1) ∞	(2) $-\infty$	(3) $-\infty$	(4) ∞	(5) -2
(6) $-\frac{2}{5}$	(7) 0	(8) 0	(9) 1	(10) -1

(11) $a = 0 \ , \ \frac{b}{3} = -1 \Longrightarrow b = -3$

(12) $a = 0 \ , \ \frac{2}{b} = -1 \Longrightarrow b = -2$

(13) $\frac{3}{\sqrt{a}} = 2 \Longrightarrow a = \frac{9}{4}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	(2) (b)	(3) (a)	(4) (a)
(5) (a)	(6) (b)	(7) (c)	(8) (d)
(9) (b)	(10) (d)	(11) (a)	(12) (a)

نهايات بعض الدوال المثلثية — تمرَّنْ 1–4

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\frac{5}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} = 0$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2}$

(4) $\frac{0}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x - \cos x} = -1$

(6) -2

(7) 5

(8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x} = 2$

(10) $\frac{4}{7}$

(11) $\frac{3}{2}$ **(12)** 1 **(13)** 3 **(14)** $\frac{3}{2}$ **(15)** 2

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (a)	**(5)** (b)
(6) (a)	**(7)** (c)	**(8)** (d)	**(9)** (a)	**(10)** (b)

الاتّصال — تمرَّنْ 1–5

المجموعة A تمارين مقالية

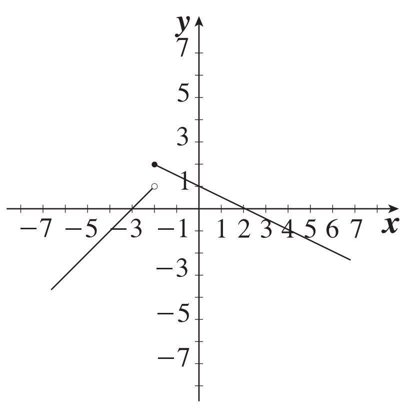
(1) $x = 0$ لا تنتمي إلى المجال، إذاً f غير متصلة عند $x = 0$.

(2) $f(1) = 1 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2 \neq 1$ — f غير متصلة عند $x = 1$

(3) $f(2) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$ — f متصلة عند $x = 2$

(4) لا، لأن النهاية لجهة اليمين لا تساوي النهاية لجهة اليسار عند النقطة صفر.

(5) إجابة ممكنة:



(6) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 5$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 5$

إذًا الدالة f متصلة عند $x = 0$

(7) $h(-1) = -1$

$\lim\limits_{x\to -1} h(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x-4)}{x+1} = -5$

$\because \lim\limits_{x\to -1} h(x) \neq h(-1)$

$\therefore$ الدالة h ليست متصلة عند $x = -1$

(8) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x(x-3)}{-x} = 3$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(x-3)}{x} = -3 = f(0)$

إذًا الدالة f ليست متصلة عند $x = 0$. (f متصلة جهة اليمين عند $x = 0$).

(9) $g(1) = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

إذًا الدالة متصلة عند $x = -1$.

(10) نحتاج إلى $f(3) = \lim\limits_{x\to 3^+} (2ax) = \lim\limits_{x\to 3^-} (x^2-1)$

$2a(3) = 3^2 - 1$

$6a = 8$

$a = \dfrac{4}{3}$

(11) الدالة $y = \dfrac{x-1}{x^2-4x+3}$ هي $y = \dfrac{x-1}{(x-1)(x-3)}$، وهي متصلة على مجالها لأنها دالة نسبية، وتقع نقاط انفصالها حيث هي غير معرفة. المقام $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$ يساوي صفرًا عند $x = 1$، $x = 3$.

هناك انفصال لا يمكن التخلص منه عند $x = 3$ وانفصال يمكن التخلص منه بإعادة تعريف الدالة عند $x = 1$

(12) الدالة $y = 2x - 1$ هي دالة متصلة على مجالها $(-\infty, \infty)$، لا يوجد نقاط انفصال.

(13) $x = -1$، يمكن التخلص من الانفصال بجعل $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1) = 0$

(14) لِـ $x \neq -3$ ، $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = x-3$ ، فالدالة هي: $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & , \ x \neq -3 \\ -6 & , \ x = -3 \end{cases}$

(15) حيث $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4(1) = 4$ ، الدالة هي: $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & , \ x \neq 0 \\ 4 & , \ x = 0 \end{cases}$

(16) $\begin{cases} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} & , \ x \neq 4 \\ 4 & , \ x = 4 \end{cases}$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (a) **(3)** (a) **(4)** (a) **(5)** (c) **(6)** (a) **(7)** (d) **(8)** (d)

(9) (b) **(10)** (a) **(11)** (a) **(12)** (d) **(13)** (d) **(14)** (b) **(15)** (c)

نظريات الاتصال تمرَّنْ 6–1

المجموعة A تمارين مقالية

(1) f متصلة عند $x = 2$

(2) g : $g(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ دالة حدودية نسبية متصلة عند $x = -1$

h : $h(x) = \frac{3}{x}$ دالة حدودية نسبية متصلة عند $x = -1$

$\therefore$ دالة الطرح f متصلة عند $x = -1$

(3) g : $g(x) = x^2 + 3x$ متصلة عند $x = 3$

h : $h(x) = |x|$ متصلة عند $x = 3$

$\therefore$ $f(x) = g(x) + h(x)$ متصلة عند $x = 3$

(4) الدالة g : $g(x) = \sqrt[3]{x}$ دالة جذرية متصلة عند $x = -1$

الدالة h : $g(x) = x^2 + 1$ دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = -1$

$g(-1) = 2 \ , \ 2 \neq 0$

$\therefore$ دالة ناتج القسمة f متصلة عند $x = -1$

(5) نفرض أن $g(x) = x^2 + 5x + 4$

g دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = -5$

$g(-5) = 4 \ , \ 4 > 0$ $\therefore$ $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x = -5$

(6) **(a)** $(g \circ f)(x) = g(-x+2) = (-x+2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$ **(b)** $(g \circ f)(-1) = 6$

(c) $(f \circ g)(x) = f(x^2 - 3) = -x^2 + 5$ **(d)** $(f \circ g)(-1) = 4$

(7) **(a)** $(f \circ g)(x) = f(x^2 + 4) = \sqrt{x^2+4}$ **(b)** $(f \circ g)(2) = 2\sqrt{2}$

(c) $(g \circ f)(x) = (\sqrt{x})^2 + 4 = x + 4$ **(d)** $(g \circ f)(2) = 6$

(8) **(a)** $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2+7}$ **(b)** $(g \circ f)(4) = \frac{1}{23}$, $(g \circ f)(-4) = \frac{1}{23}$

(9) f دالة كثيرة حدود $\therefore$ f متصلة عند $x = -2$

$f(-2) = 5 \Leftarrow$ g متصلة عند $x = 5$

$\therefore$ $g \circ f$ متصلة عند $x = -2$

(10) نفرض أن: $h(x) = |x|$ ، $g(x) = \sqrt{x} - 3$

حيث $f(x) = (h \circ g) = h(g(x))$

$= h(\sqrt{x} - 3)$

$= |\sqrt{x} - 3|$

نفرض أن: $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$

حيث $g_1(x) = \sqrt{x}$ ، $g_2(x) = 3$

g_1 متصلة عند $x = 4$

g_2 دالة ثابتة متصلة عند $x = 4$

الدالة $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ متصلة عند $x = 4$ (1)

$g(4) = \sqrt{4} - 3 = -1$

h دالة مطلق x متصلة عند $x = -1$ (2)

من (1)، (2) نجد أن: الدالة f متصلة عند $x = 4$

(11) نفرض أن $h(x) = |x - 3|$ ، $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ حيث $g(x) = f(x) - h(x)$

لتكن $f(x) = \sqrt{f_1(x)}$ حيث $f_1(x) = x^2 + 1$

f_1 متصلة عند $x = 3$ ، $f_1(3) = 9 + 1 = 10 > 0$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 3$ (1)

لتكن: $h_1(x) = x - 3$ ، $h_2(x) = |x|$

$\therefore \; h(x) = (h_2 \circ h_1)(x) \; = h_2(h_1(x)) \; = h_2(x - 3) \; = |x - 3|$

h_1 متصلة عند $x = 3$ ، $h_1(3) = 0$

h_2 متصلة عند $x = 0$

$\therefore$ h متصلة عند $x = 3$ (2)

من (2)، (1) نجد أن g دالة متصلة عند $x = 3$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (a)	**(5)** (a)	**(6)** (d)
(7) (a)	**(8)** (c)	**(9)** (d)	**(10)** (a)	**(11)** (d)	**(12)** (a)

الاتّصال على فترة — تمرَّنْ 7–1

المجموعة A تمارين مقالية

(1) f دالة كثيرة حدود متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$ $\therefore$ f متصلة على $[-2 , 5]$

(2) f دالة حدودية نسبية متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$ $\therefore$ f متصلة على $[1 , 3]$

(3) f غير متصلة عند $x = 3$ $\therefore$ f متصلة على الفترة $[0 , 3)$ والفترة $(3 , 5]$

(4) f غير متصلة عند $x = 1$, $x = 4$ $\therefore$ f متصلة على كل من الفترات $[4 , 6]$, $(1 , 4)$, $[-2 , 1)$

(5) f متصلة على $(-3 , 4)$، $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -5 = f(-3)$, $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -12 \neq f(4)$

$\therefore$ f متصلة على $[-3 , 4)$

(6) $f(7) = -3$, $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = -3$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 7$

و f متصلة على كل من الفترتين $(-\infty , 7)$ ، $(7 , \infty)$ $\therefore$ f متصلة على $\mathbb{R}$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 3 = f(0)$

$\therefore$ f متصلة على كل من $(0,\infty)$, $(-\infty,0]$.

(8) f متصلة على كل من الفترات $(4 , \infty)$, $(-2 , 4)$, $(-\infty , -2)$

$f(-2) = -9$, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -9$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -9$

$\therefore$ f متصلة عند $x = -2$.

$f(4) = 9$, $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 9$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 4$ لجهة اليمين.

$\therefore$ f متصلة على كل من $[4,\infty)$, $(-\infty,4)$.

(9) f متصلة على كل من الفترات $(1 , \infty)$, $(-4 , 1)$, $(-\infty , -4)$

$f(-4) = -2$, $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = -2$

$\therefore$ f متصلة عند $x = -4$.

$f(1) = -2$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 1$

$\therefore$ f متصلة على $(-\infty,\infty)$

(10) $f(1) = b$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3 + a$

$\therefore\ a = -3$, $b = 0$

(11) $f(-2) = \dfrac{4-a}{-2-b}$, $\lim\limits_{x\to (-2)^-} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to (-2)^+} f(x) = \dfrac{4-a}{-2-b}$

$f(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{1-a}{1-b}$

$\therefore\ \dfrac{4-a}{-2-b} = 4$, $\dfrac{1-a}{1-b} = 1$

$\therefore\ a = b = -4$

(12) $D_f = [-1 , 6]$

لتكن g : $g(x) = -x^2 + 5x + 6$ $g(x) > 0$ لكل $x \in [0 , 4]$

$\therefore$ f متصلة على $[0 , 4]$

(13) $D_f = [-2 , 2]$ f متصلة على مجالها.

(14) $D_f = (-\infty , -1] \cup [1 , \infty)$

f متصلة على كل من الفترتين $[1 , \infty)$, $(-\infty , -1]$.

(15) f متصلة لكل قيم $x \in \mathbb{R}$

(16) g متصلة لكل قيم $x \in \mathbb{R}$ حيث $g(x) = 3x^2 + 4x - 1$ $\therefore$ f حيث $f(x) = |g(x)|$ متصلة لكل قيم $x \in \mathbb{R}$.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (a) **(3)** (b) **(4)** (b)

(5) (b) **(6)** (c) **(7)** (c) **(8)** (b)

(9) (d) **(10)** (c) **(11)** (a)

اختبار الوحدة الأولى

(1) $\lim\limits_{x \to -2}(x^3 - 2x^2 + 1) = (-2)^3 - 2(-2)^2 + 1 = -15$

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 1}{3x^2 - 2x + 5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$

(3) $\lim\limits_{x \to -4} \sqrt{1 - 2x} = 3$

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - (2+x)}{2x(2+x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{2x(2+x)} = \lim\limits_{x \to 0}\left(-\dfrac{1}{2(2+x)}\right) = -\dfrac{1}{2(2+0)} = -\dfrac{1}{4}$

(5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{4x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} = \dfrac{1}{2}(1) = \dfrac{1}{2}$

(6) اضرب البسط والمقام بـ $\sin x$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\csc x + 1}{x\csc x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \to 0}\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= \left(\lim_{x \to 0} 1\right) + \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right) = 1 + 1 = 2$$

(7) $\lim\limits_{x \to 1} |x - 2| + 2x = \lim\limits_{x \to 1}(-x + 2 + 2x) = 3$

(8) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{9-x} - 2}{x - 5} \times \dfrac{\sqrt{9-x} + 2}{\sqrt{9-x} + 2} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{-1}{\sqrt{9-x} + 2} = -\dfrac{1}{4}$

(9) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1} \times \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \dfrac{1}{3}$

(10) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 7x + 12} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x-5)}{(x-3)(x-4)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 5}{x - 4} = 2$

(11) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \sin x}{x + \cos x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{\cos x}{x}\right)} = \dfrac{1 + 0}{1 + 0} = 1$

(12) **(a)** f غير معرّفة عند $x = -2$ ، $x = 2$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x = -2$ ، $x = 2$.

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} & , \quad x \neq 2 \quad , \quad x \neq -2 \\ -\dfrac{1}{4} & , \quad x = 2 \end{cases}$

(13) $x = -2$

(14) $x = -2 \quad , \quad x = 0$

(15) **(a)** عند $x = -1$

النهاية لجهة اليسار: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (1) = 1$

النهاية لجهة اليمين: $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (-x) = 1$

$\therefore \lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1$

عند $x = 0$

النهاية لجهة اليسار: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x) = 0$

النهاية لجهة اليمين: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x) = 0$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

عند $x = 1$

النهاية لجهة اليسار: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-x) = -1$

النهاية لجهة اليمين: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (1) = 1$

$\therefore \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ غير موجودة

(b) عند $x = -1$: متصلة لأن النهاية تساوي $f(-1)$

عند $x = 0$، غير متصلة لأن النهاية لا تساوي $f(0)$

عند $x = 1$، غير متصلة لأن النهاية غير موجودة.

(16) $x = -2 \quad , \quad x = 2$

(17) لا وجود لنقاط عدم اتصال.

(18) $y = 0 \quad , \quad x = 1$

(19) $y = 2 \quad , \quad x = -2 \quad , \quad x = 0$

(20) $\dfrac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} = \dfrac{(x-3)(x+5)}{x-3} = x + 5 \quad ; \quad k = 8$

(21) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sin x}{x} \right) = \dfrac{1}{2} \quad ; \quad k = \dfrac{1}{2}$

(22) **(a)** $(g \circ f)(x) = x^2$

(b) $(g \circ f)(0) = 0$

(c) $(f \circ g)(x) = \sqrt{(x^2 - 5)^2 + 5} \quad , \quad (f \circ g)(0) = \sqrt{30}$

(23) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 1$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 2$

f غير معرّفة عند $x = 15$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x = 15$

f متصلة على كل من الفترتين: $(15\ ,\ \infty)\ ,\ (-\infty\ ,\ 15)$

تمارين إثرائية

(1) f معرفة عند $x = 2$، إذًا $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = \sqrt{3(2)-2} = 2$

(2) **(a)** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0\ ,\ \lim\limits_{x\to 0} (f\cdot g)(x) = 1$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0\ ,\ \lim\limits_{x\to 0} (f\cdot g)(x) = -8$

(c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0\ ,\ \lim\limits_{x\to 2} (f\cdot g)(x) = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 3} g(x)$ غير موجودة

$\lim\limits_{x\to 3} (f\cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to 3} = \dfrac{5}{x-3} = -\infty\ ;\ \lim\limits_{x\to 3^+} (f\cdot g)(x) = \infty$

(3) لنفرض أن هذا غير صحيح. فتكون f سالبة في مكان ما من الفترة وموجبة في مكان آخر. وبنظرية القيمة المتوسطة يكون للدالة f صفرًا في مكان ما من هذه الفترة وهذا ما لا يتلاءم مع المعطيات.

(4) بما أن الدالة f هي متصلة، باستخدام نظرية الاتصال فإن الدالة المركبة لدالة متصلة هي متصلة فتكون بذلك $|f|$ متصلة.

(5) **(a)** النهاية لجهة اليسار: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} |x^3-4x| = |(1)^3-4(1)| = |-3| = 3$

النهاية لجهة اليمين: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-2x-2) = (1)^2-2(1)-2 = -3$

(b) كلّا، لأن النهايتين من كل جهة مختلفتان.

(c) كلّا.

(6) **(a)** $3x-4 \geqslant -\frac{1}{2}\ ;\ x \geqslant \frac{7}{6}\ ,\ D_{f\circ g} = \left[\frac{7}{6}\ ,\ \infty\right)\ ,\ D_{g\circ f} = \left[-\frac{1}{2}\ ,\ \infty\right)$

(b) $(f\circ g)(x) = \sqrt{2(3x-4)+1} = \sqrt{6x-7}\ ,\ (g\circ f)(x) = 3\sqrt{2x+1}-4$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} (f\circ g)(x) = \infty\ ,\ \lim\limits_{x\to\infty} (g\circ f)(x) = \infty$

(7) $a = 0\ ,\ \dfrac{b}{-2} = 2 \Rightarrow b = 2$

(8) نقاط الانفصال $-2\ ,\ 2$. لا يمكن التخلص من هذا الانفصال لأن $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$ كذلك $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \pm\infty$.

(9) **(a)** فترة الانفصال: $[-2\ ,\ 2]$

(b) المقارب الأفقي: $y = 1$

المقاربات الرأسية: $x = -2 \quad , \quad x = 2$

(10) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 5 \quad , \quad \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = f(4) = 5$

$\therefore$ f متصلة عند $x = 4$

$f(18) = \frac{333}{5} = \lim\limits_{x \to 18^-} f(x) \quad , \quad \lim\limits_{x \to 18^+} f(x) = -36$

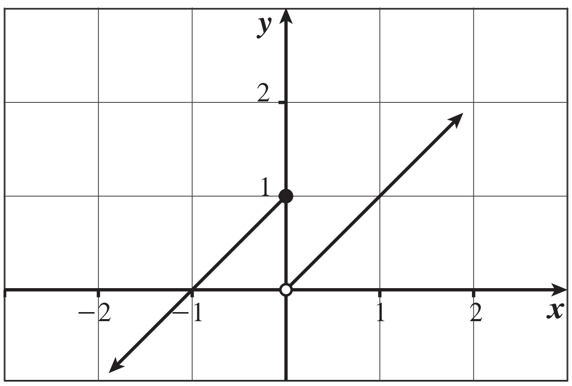
$\therefore$ f غير متصلة عند $x = 18$

$\therefore$ f متصلة على $(18\ ,\ \infty)\ ,\ (-\infty\ ,\ 18]$

(11) -4 **(12)** 0 **(13)** $3x^2$

(14) $\frac{1}{2}$ **(15)** 0 **(16)** ∞

(17) **(a)**



(b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1 \quad , \quad \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة

(18) **(a)** $x = -2$, لا يمكن التخلص منه

(b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \quad , \quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -2 \quad , \quad \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1 \quad , \quad \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1$

عند $x = 0$ انفصال لا يمكن التخلص منه.

(c) $x = 2 \quad , \quad x = 3$

يمكن التخلص من الانفصال عند $x = 2$.

عند $x = 3$ انفصال لا يمكن التخلص منه.

(d) $x = 1 \quad , \quad x = -1$

يمكن التخلص من الانفصال عند $x = 1$

عند $x = -1$ انفصال لا يمكن التخلص منه.

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+h}-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{1+h}=-1$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-4(1+h)+3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h-2)}{h}=-2$

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{2+h+2}{2+h-3}+4}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5h}{h(h-1)}=-5$

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4-(1+h)^2-3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(-2-h)}{h}=-2$

(5) (a) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\frac{2}{a+h}-\frac{2}{a}}{h}=\dfrac{-2h}{ah(a+h)}=\dfrac{-2}{a(a+h)}$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-2}{a(a+h)}=\dfrac{-2}{a^2}$

(b) يتغير المماس ولكن يبقى ميله سالبًا مهما كانت قيمة a.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (a) **(3)** (b) **(4)** (b)

(5) (a) **(6)** (b) **(7)** (c)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{3}{3+h}-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{h(3+h)}=-\dfrac{1}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=6$

(3) $f_-'(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x+1)=3$

$f_+'(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x-1}=1$

$\because\ f_-'(1)\neq f_+'(1)$

$\therefore$ ليس للدالة f مشتقة عند $x=1$.

(4) $f'_{-}(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = 4$

$f'_{+}(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{4x - 1 - 3}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{4(x-1)}{x-1} = 4$

$\because \; f'_{-}(1) = f'_{+}(1)$

$\therefore$ f قابلة للاشتقاق عند $x = 1$ و $f'(1) = 4$.

(5) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = |3 - 3| = 0 \;\; ; \;\; f(3) = 0$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = 3$.

$f'_{+}(3) = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{x - 3 - 0}{x - 3} = 1$

$f'_{-}(3) = \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{-x + 3 - 0}{x - 3} = -1$

$\because \; f'_{-}(3) = f'_{+}(3)$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 3$.

(6) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 \;\; ; \;\; \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x = 0$ وبالتالي f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

(7) $g'_{-}(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{(x+1)^2 - 1}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x(x+2)}{x} = 2$

$g'_{+}(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2x + 1 - 1}{x} = 2$

$\therefore \; g'(0) = 2$

(8) $f'_{-}(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} (x + 2) = 4$

$f'_{+}(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{4x - 4 - 4}{x - 2} = 4$

$\therefore \; f'(2) = 4$

(9) $f'_{-}(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + x + 1) = 3$

$f'_{+}(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{3x + k - 1}{x - 1}$

$\because$ f قابلة للاشتقاق عند $x = 1$.

$\therefore \; \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{3x + k - 1}{x - 1} = 3$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{3\left(x + \frac{k-1}{3}\right)}{x - 1} = 3 \;\; ; \;\; \frac{k-1}{3} = -1 \;\; ; \;\; k = -2$

(10) **(a)** $f(1) = a + b$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \quad ; \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = a + b$$

$\therefore \; a + b = 2 \qquad (1)$

(b) $2a + b = -1 \qquad (2)$

من (1) و(2) نحصل على: $b = 5$, $a = -3$.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (b)
(5) (b)	**(6)** (b)	**(7)** (b)	**(8)** (a)
(9) (d)	**(10)** (a)	**(11)** (d)	**(12)** (b)

قواعد الاشتقاق — تمرّنْ 3–2

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right) - \frac{d}{dx}(x) = x^2 - 1$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(1) = 2 + 0 = 2$

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) - \frac{d}{dx}(7x^3) + \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(15)$

$= 4x^3 - 21x^2 + 4x + 0 = 4x^3 - 21x^2 + 4x$

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4x^{-2}) - \frac{d}{dx}(8x) + \frac{d}{dx}(1)$

$= -8x^{-3} - 8 + 0 = -8x^{-3} - 8$

(5) $f'(x) = (2x - 5)(x^3 + 2x^2 + 1) + (3x^2 + 4x)(x^2 - 5x + 6)$

$= 5x^4 - 12x^3 - 12x^2 + 26x - 5$

(6) $f(x) = 10x^5 - 2x^7 + 20 - 4x^2$

$f'(x) = 50x^4 - 14x^6 - 8x$

(7) **(a)** $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+3}{x}\right) = \frac{x\frac{d}{dx}(x^2+3) - (x^2+3)\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$

$= \frac{x(2x) - (x^2+3)}{x^2} = \frac{x^2 - 3}{x^2}$

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+3}{x}\right) = \frac{d}{dx}(x + 3x^{-1}) = 1 - 3x^{-2} = 1 - \frac{3}{x^2}$

متكافئة مع إجابة السؤال **(a)**.

(8) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1-x^3}\right) = \frac{(1-x^3)(2x) - x^2(-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \frac{x^4+2x}{(1-x^3)^2}$

(9) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) = \frac{(\sqrt{x}+1)\frac{1}{2\sqrt{x}} - (\sqrt{x}-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}$

$= \frac{(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$

(10) **(a)** عند $x = 0$ ؛ $\frac{d}{dx}(uv) = u(0)v'(0) + v(0)u'(0) = (5)(2) + (-1)(-3) = 13$

(b) عند $x = 0$ ؛ $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(0)u'(0) - u(0)v'(0)}{[v(0)]^2} = \frac{(-1)(-3) - (5)(2)}{(-1)^2} = -7$

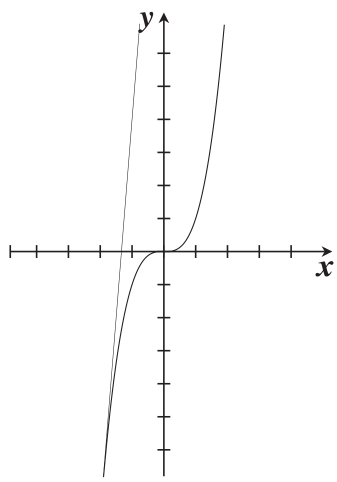
(c) عند $x = 0$ ؛ $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{u(0)v'(0) - v(0)u'(0)}{[u(0)]^2} = \frac{(5)(2) - (-1)(-3)}{(5)^2} = \frac{7}{25}$

(d) عند $x = 0$ ؛ $\frac{d}{dx}(7v - 2u) = 7v'(0) - 2u'(0) = 7(2) - 2(-3) = 20$

(11) $f'(x) = 3x^2 + 1$; $f'(1) = 4$; $y = 4x - 2$

(12) $y'(x) = 3x^2$

$y'(-2) = 12$



ميل خط المماس 12 ويمر هذا الخط عبر $(-2 , -8)$، معادلته هي:

$y = 12(x+2) - 8$ أو $y = 12x + 16$ التقاطع مع محور السينات

هو $-\frac{4}{3}$ والتقاطع مع محور الصادات هو 16.

(13) $f'(x) = \frac{-16x}{(4+x^2)^2}$; $f'(2) = \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2}$

معادلة المماس: $y = -\frac{1}{2}x + 2$

معادلة الناظم: $y = 2x - 3$

$$(14)\quad f'(x)=\begin{cases}1+\dfrac{4}{x^2} & : \ x\geqslant 2\\ 2x & : \ x<2\end{cases}$$

مجال f' : $(-\infty,\infty)$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (a) **(3)** (b) **(4)** (a) **(5)** (a)

(6) (b) **(7)** (b) **(8)** (c) **(9)** (b) **(10)** (c)

(11) (c) **(12)** (d) **(13)** (c) **(14)** (d)

(15) (d) **(16)** (c)

مشتقات الدوال المثلثية

تمرَّنْ 4–2

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\frac{d}{dx}(2\sin x-\tan x)=2\cos x-\sec^2 x$

(2) $$\frac{d}{dx}(4-x^2\sin x)=\frac{d}{dx}(4)-\left[x^2\frac{d}{dx}(\sin x)+(\sin x)\frac{d}{dx}(x^2)\right]$$
$$=0-[x^2\cos x+(\sin x)(2x)]$$
$$=-x^2\cos x-2x\sin x$$

(3) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cot x}{1+\cot x}\right)=\frac{(1+\cot x)\frac{d}{dx}(\cot x)-(\cot x)\frac{d}{dx}(1+\cot x)}{(1+\cot x)^2}$$
$$=\frac{(1+\cot x)(-\csc^2 x)-(\cot x)(-\csc^2 x)}{(1+\cot x)^2}$$
$$=-\frac{\csc^2 x}{(1+\cot x)^2}$$

(4) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)=\frac{(1+\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x)-(\cos x)\frac{d}{dx}(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$
$$=\frac{(1+\sin x)(-\sin x)-(\cos x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$
$$=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}=\frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$
$$=-\frac{1}{1+\sin x}$$

(5) $$y'(x)=\frac{x\frac{d}{dx}(\tan x)-\tan x\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\pi}{4}(\sqrt{2})^2 - 1}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{8\pi - 16}{\pi^2}$$

(6) $\frac{1}{\cos x}\tan x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ تساوي 0 عند $x = 0$، ميل خط المماس هو 0.

$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ تساوي 0 عند $x = 0$، ميل خط المماس هو 0.

(7) $y'(x) = \frac{d}{dx}\left(1 + \sqrt{2}\csc x + \cot x\right)$

$$= 0 + \sqrt{2}(-\csc x\cot x) + (-\csc^2 x)$$

$$= -\sqrt{2}\csc x\cot x - \csc^2 x$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\csc\frac{\pi}{4}\cot\frac{\pi}{4} - \csc^2\frac{\pi}{4}$$

$$= -\sqrt{2}(\sqrt{2})(1) - (\sqrt{2})^2$$

$$= -2 - 2 = -4$$

ميل خط المماس -4 ويمر هذا الخط عبر $P\left(\frac{\pi}{4}, 4\right)$

المعادلة هي: $y = -4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 4$ أو $y = -4x + \pi + 4$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (a)	**(5)** (c)
(6) (d)	**(7)** (d)	**(8)** (a)	**(9)** (c)	

قاعدة السلسلة — تمرَّنْ 5–2

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x) = (2)(6x) = 12x$

(2) $(f\circ g)'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}\times 2x = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

(3) $(f\circ g)'(x) = 10(x^{15})\times 15(x^{14}) = 150x^{29}$

(4) $(f\circ g)'(1) = f'(g(1))\cdot g'(1) = (5)(1)^2\times\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

(5) $(f\circ g)'(x) = \left(1 + \frac{2\sin\pi x}{\cos^3\pi x}\right)\times\pi$; $(f\circ g)'\left(\frac{1}{4}\right) = \left(1 + \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)\times\pi = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}\right)\times\pi = 5\pi$

(6) $(f \circ g)'(x) = \dfrac{2(-(10x^2+x+1)^2+1)}{((10x^2+x+1)^2+1)^2} \times (20x+1)$; $(f \circ g)'(0) = 0$

(7) (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$

$= (-\sin u)(6)$

$= -6\sin u = -6\sin(6x+2)$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = 15u^2 \times 6x = 90(3x^2+1)^2 \times x$

(8) $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{3\pi}{2} \times \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}t\right) - \dfrac{7\pi}{4} \times \sin\left(\dfrac{7\pi}{4}t\right)$

(9) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\tan(2x-x^3) = [\sec^2(2x-x^3)]\dfrac{d}{dx}(2x-x^3)$

$= [\sec^2(2x-x^3)](2-3x^2) = (2-3x^2)\sec^2(2x-x^3)$

(10) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\sin(3x+1) = [\cos(3x+1)]\dfrac{d}{dx}(3x+1)$

$= [\cos(3x+1)](3) = 3\cos(3x+1)$

(11) $\dfrac{dy}{dx} = 2(\tan x + \sec x)(\sec^2 x + \sec x \times \tan x)$

(12) $\dfrac{dy}{dx} = 2\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\left(\dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2}\right) = \dfrac{4(x-1)}{(x+1)^3}$

(13) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(1-6x)^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3}(1-6x)^{\left(\frac{2}{3}-1\right)}\dfrac{d}{dx}(1-6x)$

$= \dfrac{2}{3}(-6)(1-6x)^{-\frac{1}{3}}$

$= -4(1-6x)^{-\frac{1}{3}}$

(14) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$= \dfrac{(\sqrt{1+x^2})\dfrac{d}{dx}(x) - x\dfrac{d}{dx}(\sqrt{1+x^2})}{(\sqrt{1+x^2})^2}$

$= \dfrac{(\sqrt{1+x^2})(1) - x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\dfrac{d}{dx}(1+x^2)}{1+x^2} = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\right)(2x)}{1+x^2}$

$= \dfrac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)(\sqrt{1+x^2})} = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$

(15) تستخدم في الخطوة الأخيرة المتطابقة $2\sin a\cos a = \sin 2a$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(\sin^2(3x-2))$

$= 2\sin(3x-2)\dfrac{d}{dx}\sin(3x-2) = 2\sin(3x-2)\cos(3x-2)\dfrac{d}{dx}(3x-2)$

$= 2\sin(3x-2)\cos(3x-2)(3) = 6\sin(3x-2)\cos(3x-2)$

(16) **(a)** $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$; $f'(2)=\dfrac{2}{3}$

معادلة المماس عند النقطة $(2,3)$ هي: $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{5}{3}$

(b) معادلة الناظم: $y=-\dfrac{3}{2}x+6$

(17) **(a)** $g'(x)=24x^2(x^3+1)^7$

$g'(0)=0$

معادلة المماس عند النقطة $(0,1)$ هي: $y=1$

(b) معادل الناظم: $x=0$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (a) **(3)** (b) **(4)** (a) **(5)** (d)

(6) (b) **(7)** (d) **(8)** (b) **(9)** (c)

المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني تمرَّنْ 6–2

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\dfrac{dy}{dx}=8x^3-3x^2+2x-3$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=24x^2-6x+2$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}=48x-6$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-5x^4+6x^2-4$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-20x^3+12x$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}=-60x^2+12$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-3}{(x-2)^2}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{6}{(x-2)^3}$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{-18}{(x-2)^4}$

(4) $\dfrac{dy}{dx}=2\cos 2x$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-4\sin 2x$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}=-8\cos 2x$

(5) $\dfrac{dy}{dx}=-4\sin 4x$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-16\cos 4x$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}=64\sin 4x$

(6) $\dfrac{dy}{dx}=2\sin x\cos x$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=2\cos^2 x-2\sin^2 x$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}=-4\cos x\sin x-4\sin x\cos x$

(7) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+4}{2y}=\dfrac{x+2}{y}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{y-y'(x+2)}{y^2}=\dfrac{y^2-(x+2)^2}{y^3}$

(8) $2ydy-4dy=dx$; $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2y-4}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-2}{(2y-4)^3}$

(9) $\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$; $\dfrac{dy}{dx}=-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$

(10) $2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 0$; $y' = 5$

معادلة المماس: $y = 5x - 7$

معادلة الناظم: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$

(11) $y' = -\frac{6}{5}$

معادلة المماس: $y = -\frac{6}{5}x - \frac{6}{5}$

معادلة الناظم: $y = \frac{5}{6}x + \frac{5}{6}$

(12) $y' = -\frac{\pi}{2}$

معادلة المماس: $y = -\frac{\pi}{2}x + \pi$

معادلة الناظم: $y = \frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}$

(13) $y' = A\cos x - B\sin x$

$y'' = -A\sin x - B\cos x$

$y'' - y = -2A\sin x - 2B\cos x = \sin x \implies A = -\frac{1}{2}$; $B = 0$

(14) $\frac{dy}{dx} = \frac{-(\sin x + \sec x) - \sin x\tan x}{(1+\tan x)^2}$; $y = -x + 1$

(15) $f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$; $f''(x) = \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}$

$4x^2 f''(x) - 3f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$

(16) $f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$; $f''(x) = \frac{2(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}$; $f'''(x) = \frac{24x(1+x^2)}{(1-x^2)^4}$

$(1-x^2)f'''(x) - 6xf''(x) - 6f'(x) = \frac{24x + 24x^3 - 36x^3 - 12x - 12x + 12x^3}{(1-x^2)^3} = 0$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) (2) (a) (3) (a) (4) (c)

(5) (d) (6) (a) (7) (c)

اختبار الوحدة الثانية

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^5 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x\right) = 5x^4 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3 - 7x^3 + 3x^7) = -21x^2 + 21x^6$

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sin x\cos x)$

$$= 2(\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x) + 2(\cos x)\frac{d}{dx}(\sin x) = -2\sin^2 x + 2\cos^2 x$$

حل بديل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sin x\cos x) = \frac{d}{dx}\sin 2x = (\cos 2x)(2)$$
$$= 2\cos 2x$$

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right) = \frac{(2x-1)(2)-(2x+1)(2)}{(2x-1)^2} = -\frac{4}{(2x-1)^2}$

(5) $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}[\cos(1-2t)] = -\sin(1-2t)(-2) = 2\sin(1-2t)$

(6) $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\cot\left(\frac{2}{t}\right)\right] = -\csc^2\left(\frac{2}{t}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{t}\right) = -\csc^2\left(\frac{2}{t}\right)\left(-\frac{2}{t^2}\right) = \frac{2}{t^2}\csc^2\left(\frac{2}{t}\right)$

(7) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}} + 1 + x^{-\frac{1}{2}}\right)$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

(8) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{2x+1}\right) = (x)\left(\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}\right)(2) + \left(\sqrt{2x+1}\right)(1)$

$$= \frac{x+(2x+1)}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$$

(9) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{\sin(5x)}\right) = \frac{d}{dx}(x^2\csc 5x)$

$$= (x^2)(-\csc 5x\cot 5x)(5) + (\csc 5x)(2x) = -5x^2\csc 5x\cot 5x + 2x\csc 5x$$

(10) (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2-2x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x}}(2x-2) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$

عند $x = 3$ نحصل على: $y = \sqrt{3^2-2(3)} = \sqrt{3}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{3-1}{\sqrt{3^2-2(3)}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

خط المماس: $y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-3) + \sqrt{3}$ أو $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \sqrt{3}$

(b) الخط العمودي (الناظم): $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-3) + \sqrt{3}$ أو $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{5\sqrt{3}}{2}$

(11) (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4 + \cot x - 2\csc x) = -\csc^2 x + 2\csc x\cot x$

عند $x = \frac{\pi}{2}$ نحصل على: $y = 4 + \cot\frac{\pi}{2} - 2\csc\frac{\pi}{2} = 4 + 0 - 2 = 2$

$$\frac{dy}{dx} = -\csc^2\frac{\pi}{2} + 2\csc\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi}{2} = -1 + 2(1)(0) = -1$$

خط المماس: $y = -1\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ أو $y = -x + \frac{\pi}{2} + 2$

(b) الخط العمودي (الناظم): $y = 1\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ أو $y = x - \frac{\pi}{2} + 2$

(12) $f'_-(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x - 1}{x - 1} = 1$

$f'_+(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2 - x - 1}{x - 1} = -1$

$\because \; f'_-(1) \neq f'_+(1)$

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

(13) $\dfrac{dy}{dx} = 12x^3 - 10x + 2 \; ; \; \dfrac{d^2y}{dx^2} = 36x^2 - 10 \; ; \; \dfrac{d^3y}{dx^3} = 72x$

(14) $\dfrac{dy}{dx} = 3\cos 3x \; ; \; \dfrac{d^2y}{dx^2} = -9\sin 3x \; ; \; \dfrac{d^3y}{dx^3} = -27\cos 3x$

(15) $\dfrac{dy}{dx} = -2\sin 4x \; ; \; \dfrac{d^2y}{dx^2} = -8\cos 4x \; ; \; \dfrac{d^3y}{dx^3} = 32\sin 4x$

(16) $\dfrac{dy}{dx} = 9x^2 - 16x + 5 \; ; \; \dfrac{d^2y}{dx^2} = 18x - 16 \; ; \; \dfrac{d^3y}{dx^3} = 18$

(17) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{6y - 1}$

(18) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y^2 + 2x + 2}{2xy - 3}$

(19) $y' = -2$

معادلة المماس: $y = -2x + 3$

معادلة الناظم: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

تمارين إثرائية

(1) يتقاطع منحنى الدالة مع محور السينات إذا $-x^2 + 5x - 6 = 0$، فنحصل على $x = 2$ أو $x = 3$، عند $x = 2$ الميل $= 1$، عند $x = 3$ الميل $= -1$

(2) $s(t) = t^3 - 3t^2$

السرعة المتجهة: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t$

$v(2) = 12 - 12 = 0 \text{ m/s}$

$a(t) = V'(t) = 6t - 6$

$a(2) = 6(2) - 6 = 6 \text{ m/s}^2$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x\sqrt{4 - x^2} + \dfrac{2x}{2\sqrt{4 - x^2}} \times x^2}{4 - x^2} = \dfrac{2x(4 - x^2) + x^3}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}} = \dfrac{8x - 2x^3 + x^3}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{8x - x^3}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$

(4) يتقاطع منحنى الدالة مع محور الصادات عند النقاط $y = 0$، $y = 4$، $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y-4}$، عند النقطة $(0,0)$ يكون الميل $= -\frac{1}{4}$، عند النقطة $(0,4)$ يكون الميل $= \frac{1}{4}$.

(5) $\frac{du}{dx} = \frac{2x}{3(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{dy}{du} = \frac{4u}{(u^2+1)^2}$

أي $\frac{du}{dx} = \frac{2x}{3u^2}$ باستخدام قاعدة السلسلة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{4u}{(u^2+1)^2} \times \frac{2x}{3u^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{3u(u^2+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{3(x^2+2)\sqrt[3]{(x^2+2)^2} + 3\sqrt[3]{x^2+2} + 6x^2 + 12}$$

(6) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y\sin 2x + \sin 2y}{2x\cos 2y - \cos 2x}$

معادلة المماس: $y = 2x$

معادلة الناظم: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5\pi}{8}$

(7) الدالة g متصلة عند $x = 0$ $\therefore$ $b = 1$

$$g'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x + 1 - 1}{x} = 1$$

$$g'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$\because$ $g'_-(1) \neq g'_+(1)$

$\therefore$ g غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$

(8) $y' = 2\cos x \cos x - 2\sin x \sin x$

$= 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= 2\cos 2x$

(9) $AC = \sqrt{x^2 + 1600}$ $\qquad x \in (0, 50)$

$$t = \frac{\sqrt{x^2+1600}}{45} + \frac{50-x}{75}$$

$$t' = \frac{x}{45 \times \sqrt{x^2+1600}} - \frac{1}{75}$$

$t' = 0 \quad : \quad 5x = 3\sqrt{x^2+1600}$

$25x^2 = 9(x^2 + 1600)$

$16x^2 = 9 \times 1600$

$x^2 = 900$

$x = 30$

$$t(30)=\frac{\sqrt{900+1600}}{45}+\frac{50-30}{75}\simeq 83\text{ min}$$

$$t(0)=\frac{\sqrt{0+1600}}{45}+\frac{50-0}{75}\simeq 93\text{ min}$$

$$t(50)=\frac{\sqrt{2\,500+1600}}{45}+\frac{50-50}{75}\simeq 85\text{ min}$$

يستطيع السائق الوصول إلى الموقع D بأقل وقت ممكن إذا سار بخط مستقيم في الصحراء من نقطة A إلى نقطة C على الطريق الرملي (التي تبعد 30 km عن نقطة B)، ثم يسير على الطريق المعبد من C إلى D فيصل بحوالي 83 دقيقة وبالتالي أقل من 85 دقيقة ويستطيع الحصول على الجائزة.

(10) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+5y}{5x-5y^4}$

(11) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2y-3}{2x-4}$

الميل = $-\frac{11}{2}$

معادلة الناظم: $y=\frac{2}{11}x-\frac{46}{11}$

(12) $\frac{dc}{dt}=\frac{dc}{dp}\times\frac{dp}{dt}=\left(\frac{1}{2}(0.5p^2+17)^{-\frac{1}{2}}(0.5)(2p)\right)(0.2t)$

(a) إذا كان $t=3$ فإن $P(3)=3.1+0.1\times 3^2=4$

معدل التغير يصبح: $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=3}=0.24$

إن معدل التغير بعد مرور 3 سنوات لأول أكسيد الكربون هو 0.24 جزء من مليون وهو يتزايد لأن إشارة $\frac{dc}{dt}$ موجبة.

(b) عدد السكان 8 000 يعني أن $p=8$ وبالتالي $8=3.1+0.1t^2$ نحصل على $t=7$

$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=7}=0.8$

إن معدل التغير بعد مرور 7 سنوات لعدد سكان 8 000 هو 0.8 جزء من مليون.

(13) لتكن $A(t,9-t^2)$ نقطة على منحنى الدالة.

$y'_A=-2t$

معادلة المماس عند A : $y=-2tx+t^2+9$

يمر هذا المماس بالنقطة $(1,12)$ عندما $12=-2t(1)+t^2+9$

$t^2+9t-14=0$

$t^2-2t-3=0$

$t=-1\;,\;t=3$

يمر مماسان بالنقطة $(1,12)$.

المجموعة A تمارين مقالية

(1) قيمة عظمى مطلقة عند $(0,5)$، لا توجد قيم صغرى.

(2) قيمة عظمى مطلقة عند $(1,2)$، قيمة صغرى مطلقة عند $(0,-1)$

(3) القيمة العظمى عند $x=b$ والقيمة الصغرى عند $x=c_2$

تطبق نظرية القيمة القصوى لأن f متصلة على الفترة $[a,b]$، إذًا كلتا القيمتين العظمى والصغرى موجودتان.

(4) لا توجد قيمة عظمى أو صغرى، لا تطبق نظرية القيمة القصوى لأن الدالة غير متصلة.

(5) قيمة عظمى عند $x=c$ وقيمة صغرى عند $x=a$، لا تطبق نظرية القيمة القصوى لأن الدالة غير متصلة.

(6) قيمة عظمى عند $x=a$ وقيمة صغرى عند $x=c$، لا تطبق نظرية القيمة القصوى لأن الدالة غير متصلة على فترة مغلقة.

(7) النقاط الحرجة: $(0,0)$، $\left(-\frac{4}{3},\frac{32}{27}\right)$

(8) النقطة الحرجة: $(2,2)$

(9) النقاط الحرجة: $(0,3)$، $(1,4)$

(10) قيمة عظمى مطلقة عند هي 9 وقيمة صغرى مطلقة هي 1

(11) قيمة عظمى مطلقة هي 1.933 تقريبًا وقيمة صغرى مطلقة هي 1.515− تقريبًا

(12) قيمة عظمى مطلقة هي 0 وقيمة صغرى مطلقة هي $-\frac{1}{2}$

(13) قيمة عظمى مطلقة هي 2 وقيمة صغرى مطلقة هي 0

(14) قيمة عظمى مطلقة هي $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ وقيمة صغرى مطلقة هي 1

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (b) **(3)** (a) **(4)** (b) **(5)** (b) **(6)** (b)

(7) (c) **(8)** (b) **(9)** (d) **(10)** (c) **(11)** (a) **(12)** (d)

(13) (c) **(14)** (b) **(15)** (d) **(16)** (a)

تزايد وتناقص الدوال تمرَّنْ 2–3

المجموعة A تمارين مقالية

(1) f متصلة على الفترة $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0,1)$

$$2c+2=\frac{2-(-1)}{1} \quad ; \quad c=\frac{1}{2}$$

يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = \frac{1}{2}$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(1,2)$, $(0,-1)$

(2) f متصلة على الفترة $\left[\frac{1}{2}\ ,\ 2\right]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $\left(\frac{1}{2}\ ,\ 2\right)$

$1 - \frac{1}{c^2} = 0 \quad ; \quad c = 1$

يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = 1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $\left(2\ ,\ \frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{5}{2}\right)$ وأيضًا يوازي محور السينات.

(3) متزايدة على الفترة $\left(-\infty\ ,\ \frac{5}{2}\right)$ ومتناقصة على الفترة $\left(\frac{5}{2}\ ,\ \infty\right)$

(4) متزايدة على كل من الفترتين $(6,\infty)$، $(-\infty,0)$ ومتناقصة على الفترة $(0,6)$

(5) متناقصة على الفترة $(0,\infty)$ ومتزايدة على الفترة $(-\infty,0)$

(6) متزايدة على كل من الفترتين $(2,\infty)$، $(-\infty,-2)$ ومتناقصة على الفترة $(-2,2)$

(7) متزايدة على كل من الفترتين $(1,\infty)$، $(-1,0)$ ومتناقصة على كل من الفترتين $(0,1)$، $(-\infty,-1)$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (b) **(3)** (a) **(4)** (a)

(5) (b) **(6)** (c) **(7)** (b) **(8)** (d)

ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f — تمرَّنْ 3–3

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4)$

النقاط الحرجة هي: $(2,20)$, $(4,16)$

جدول التغير:

الفترات	$(-\infty,2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
إشارة f'	+ +	− −	+ +
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

القيمة العظمى المحلية هي: $f(2) = 20$

القيمة الصغرى المحلية هي: $f(4) = 16$

الدالة تتزايد على الفترة $(-\infty,2)$ والفترة $(4,\infty)$ وتتناقص على الفترة $(2,4)$

(2) $g'(x) = -6x^2 + 12x = -6x(x-2)$

النقاط الحرجة هي: $(2,5)$, $(0,-3)$

جدول التغير:

الفترات	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
إشارة g'	$- -$	$+ +$	$- -$
سلوك الدالة g	↘	↗	↘

القيمة العظمى المحلية هي: $g(2) = 5$

القيمة الصغرى المحلية هي: $g(0) = -3$

الدالة تتزايد على الفترة $(0,2)$ وتتناقص على الفترة $(-\infty,0)$ والفترة $(2,\infty)$.

(3) $h'(x) = -4x^3 - 12x^2 - 8x = -4x(x+1)(x+2)$

النقاط الحرجة هي: $(0,1)$, $(-1,0)$, $(-2,1)$

جدول التغير:

الفترات	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
إشارة h'	$+ +$	$- -$	$+ +$	$- -$
سلوك الدالة h	↗	↘	↗	↘

القيمة العظمى المحلية هي: $h(-2) = 1$, $h(0) = 1$

القيمة الصغرى المحلية هي: $h(-1) = 0$

الدالة تتزايد على الفترة $(-\infty,-2)$ والفترة $(-1,0)$ وتتناقص على الفترة $(-2,-1)$ والفترة $(0,\infty)$

(4) $g'(x) = 6x^3 + 6x^2 - 6x - 6 = 6(x+1)^2(x-1)$

النقاط الحرجة هي: $(1,-1)$, $(-1,7)$

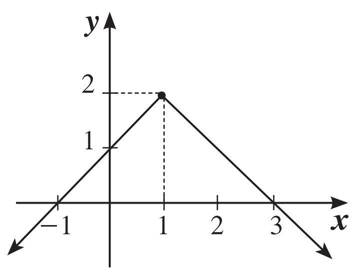
جدول التغير:

الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
إشارة g'	$- -$	$- -$	$+ +$
سلوك الدالة g	↘	↘	↗

القيمة الصغرى المحلية هي: $g(1) = -1$

الدالة تتزايد على الفترة $(1,\infty)$ وتتناقص على الفترة $(-\infty,1)$

(5) $h(x) = 2 - |x-1| = \begin{cases} x+1 & : \quad x < 1 \\ -x+3 & : \quad x \geqslant 1 \end{cases}$



النقطة الحرجة هي: $(1,2)$

القيمة العظمى المحلية هي: $h(1) = 2$

الدالة تتزايد على الفترة $(-\infty,1)$ وتتناقص على الفترة $(1,\infty)$

(6) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$

لا نقاط حرجة.

جدول التغير:

$-\infty$ ... 2 ... ∞		
الفترات	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
إشارة f'	$- -$	$- -$
سلوك الدالة f	↘	↘

لا يوجد قيم قصوى.

الدالة تتناقص على الفترة $(-\infty,2)$ والفترة $(2,\infty)$

(7) **(a)** لا يوجد قيمة عظمى محلية.

(b) القيمة الصغرى المحلية عند $x = 2$.

جدول إشارة y':

$-\infty$ ... 1 ... 2 ... ∞			
الفترات	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
إشارة y'	$-$	$-$	$+$
سلوك الدالة y	↘	↘	↗

(c) $y'' = (x-1)(3x-5)$

نقطة انعطاف عند $x = 1$, $x = \dfrac{5}{3}$

(8) **(a)** قيمة عظمى محلية عند $x = 2$

(b) قيمة صغرى محلية عند $x = 4$

جدول التغير:

الفترات	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
إشارة g'	$+$	$+$	$-$	$+$
سلوك الدالة g	↗	↗	↘	↗

(c) $y'' = 2(x-1)(2x^2-10x+11)$

نقطة انعطاف عند $x = 1$ ، $x = \frac{5+\sqrt{3}}{2} \approx 3.366$ ، $x = \frac{5-\sqrt{3}}{2} \approx 1.634$

(9) كلّا، للدالة f مماس أفقي عند هذه النقطة ولكن يمكن أن تكون متزايدة (أو متناقصة) على كل من الفترتين (a, c) و(c, b) ولا يوجد قيمة قصوى محلية عند $x = c$

مثال: $f(x) = x^3$ حيث $f'(0) = 0$ ولا قيمة عظمى أو صغرى محلية عند $x = 0$

(10) $f'(x) = 6x - 6x^2$

$f'' = 6 - 12x = 6(1-2x)$

$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad , \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

جدول التغير:

الفترات	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
إشارة f''	$+\ +$	$-\ -$
تقعر الدالة f	∪ تقعر لأعلى	∩ تقعر لأسفل

بيان الدالة f يكون مقعرًا لأعلى على الفترة $\left(-\infty , \frac{1}{2}\right)$ ومقعرًا لأسفل على الفترة $\left(\frac{1}{2} , \infty\right)$، نقطة الانعطاف $\left(\frac{1}{2} , \frac{1}{2}\right)$

(11) $g'(x) = x^2 - 4x + 1$

$g''(x) = 2x - 4$

$g''(2) = 0 \quad , \quad g(2) = -\frac{25}{3}$

جدول التغير:

الفترات	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
إشارة g''	$- \; -$	$+ \; +$
تقعر الدالة g	تقعر لأسفل	تقعر لأعلى

بيان الدالة f يكون مقعرًا لأعلى على الفترة $(2,\infty)$ ومقعرًا لأسفل على الفترة $(-\infty,2)$، نقطة الانعطاف $\left(2\ ,\ -\frac{25}{3}\right)$

(12) $f'(x) = -4x^3$

$f''(x) = -12x^2$

$f''(x) = 0$ عند $x = 0$ ولكن بيان f لا يغير تقعره على جانبي 0 (بيان f مقعر لأسفل على جانبي 0).

$\therefore$ منحنى f ليس له نقطة انعطاف.

(13) $f(0) = 0 \quad \therefore \quad c = 0$

$f(4) = 16 \implies 4^3 + a(4)^2 + b(4) + c = 16$

$4a + b = -12 \qquad (1)$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(4) = 0 \implies 48 + 8a + b = 0$

$8a + b = -48 \qquad (2)$

من (1)، (2) نحصل على: $a = -9 \ ,\ b = 24$

$\therefore \ a = -9 \ ,\ b = 24 \ ,\ c = 0$

(14) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(2) = 0 \implies 12 + 4a + b = 0$

$4a + b = -12 \qquad (1)$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \implies 6\left(\frac{1}{2}\right) + 2a = 0$

$a = -\frac{3}{2}$

وبالتعويض في (1) نحصل على: $b = -6$

$\therefore \ a = -\frac{3}{2} \ ,\ b = -6$

(15) $f'(x) = 2x - 6$

$f'(3) = 0$

$f''(x) = 2$

$f''(3) = 2 > 0$

$f(3) = (3)^2 - 6(3) + 11 = 2$

فتكون للدالة f قيمة صغرى محلية 2 عند $x = 3$

(16) $f'(x) = 4x^3 - 36x = 4x(x^2 - 9) = 4x(x-3)(x+3)$

$f''(x) = 12x^2 - 36$

$f''(0) = -36 \;\; ; \;\; -36 < 0 \;\; ; \;\; f(0) = 0$

للدالة f قيمة عظمى محلية 0 عند $x = 0$

$f''(3) = 72 \;\; ; \;\; f''(-3) = 72$

$f(3) = f(-3) = -81$

للدالة f قيمة صغرى محلية -81 عند كل من $x = -3$, $x = 3$

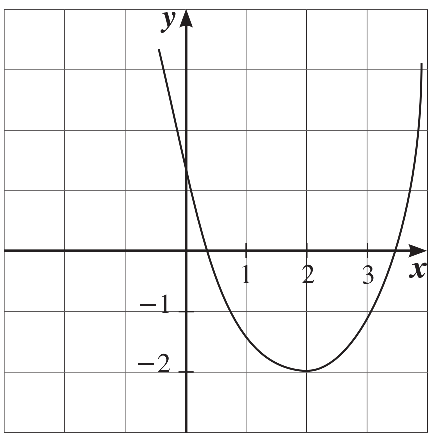
المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)	**(2)** (b)	**(3)** (b)	**(4)** (b)	**(5)** (a)
(6) (b)	**(7)** (b)	**(8)** (a)	**(9)** (d)	**(10)** (a)
(11) (d)	**(12)** (b)	**(13)** (c)	**(14)** (a)	**(15)** (b)

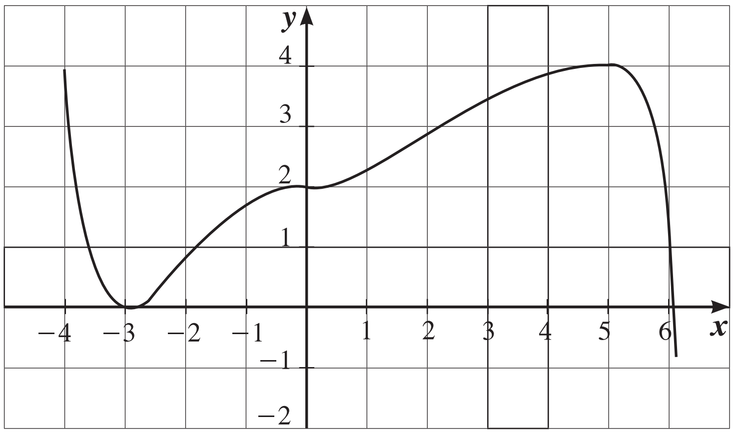
رسم بيان دوال كثيرات الحدود — تمرّنْ 4–3

المجموعة A تمارين مقالية

(1) مجال $f = (-\infty, \infty)$



(2) مجال $f = (-\infty, \infty)$



(3) $\therefore$ f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$

نوجد النقاط الحرجة:

f دالة كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$

نضع $f'(x) = 0 \implies x = 2 \; ; \; x = -\frac{2}{3}$

نقاط حرجة: $(2, -1)$, $\left(-\frac{2}{3}, \frac{229}{27}\right)$ $\therefore$ $f(2) = -1$, $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{229}{27}$

$-\infty \quad -\frac{2}{3} \quad 2 \quad \infty$

الفترات	$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$	$\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	+ +	− −	+ +
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

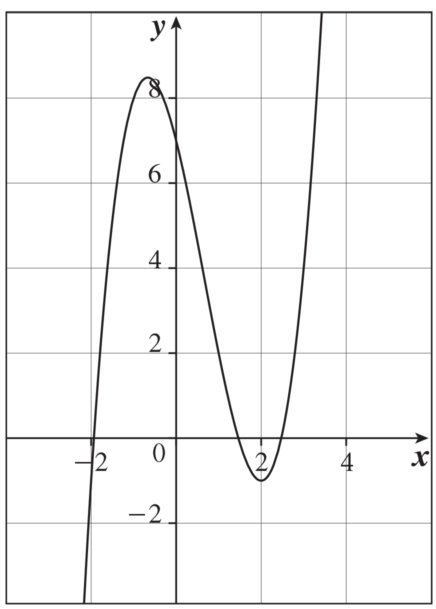
$f''(x) = 6x - 4$

$f''(x) = 0 \implies x = \frac{2}{3}$

$-\infty \quad \frac{2}{3} \quad \infty$

الفترات	$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
إشارة f''	− −	+ +
التقعر	∩	∪

نقطة انعطاف: $I\left(\frac{2}{3}, \frac{101}{27}\right)$ ، $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{101}{27}$



(4) $\therefore$ g دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4}{4} = \infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4}{4} = \infty$

$g'(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$

النقاط الحرجة: $\quad (-2,1) \,,\, (2,1) \,,\, (0,5)$

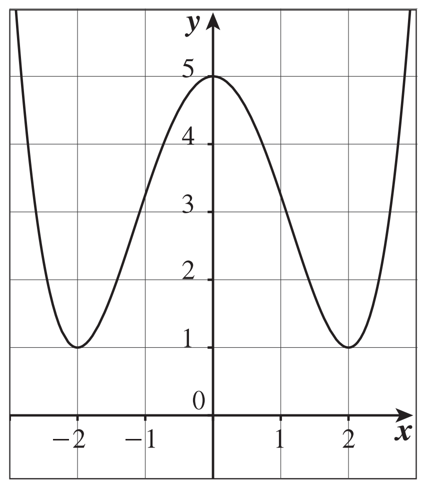
جدول التغير:

$-\infty \qquad -2 \qquad 0 \qquad 2 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
إشارة g'	$- \; -$	$+ \; +$	$- \; -$	$+ \; +$
سلوك الدالة g	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$g''(x) = 3x^2 - 4$

نقاط الانعطاف: $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} \,,\, \frac{25}{9}\right) \quad , \quad \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \,,\, \frac{25}{9}\right)$



(5) $\therefore$ h دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^4 = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to\infty} -x^4 = -\infty$

$h'(x) = -4x(x-2)(x+2)$

النقاط الحرجة: $\quad (2,8) \,,\, (0,-8) \,,\, (-2,8)$

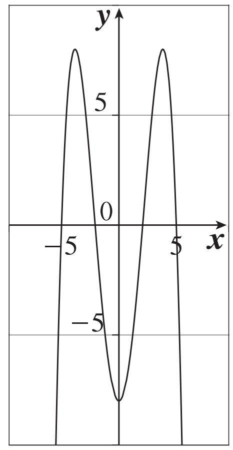
جدول التغير:

$-\infty \qquad -2 \qquad 0 \qquad 2 \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
إشارة h'	$+ \; +$	$- \; -$	$+ \; +$	$- \; -$
سلوك الدالة h	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

$h''(x) = 4(4 - 3x^2)$

نقاط الانعطاف: $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \,,\, \frac{8}{9}\right) \quad , \quad \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} \,,\, \frac{8}{9}\right)$



(6) $\therefore$ f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} -x^3 = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^3 = \infty$$

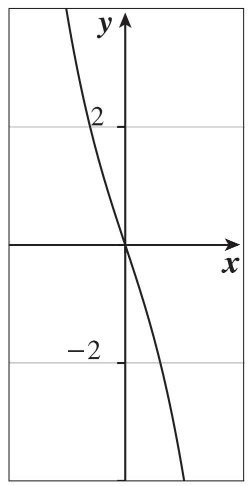
$$f'(x) = -3x^2 - 3 < 0$$

لا نقاط حرجة.

f دالة مطردة متناقصة.

$$f''(x) = -6x$$

نقطة الانعطاف: $(0, 0)$



(7) $f'(x) = 2x^2 - 4x = 2x(x-2)$

(a) جدول التغير:

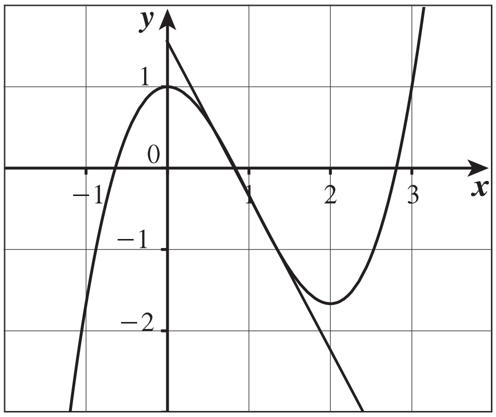
$-\infty$ 0 2 ∞

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	$+\ +$	$-\ -$	$+\ +$
سلوك الدالة f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

(b) $A\left(1, -\frac{1}{3}\right)$; $f'(1) = -2$

معادلة (1): $y = -2x + \frac{5}{3}$

(c)



(8) $f(0) = 1 \implies d = 1$

$f(-2) = 5 \implies -8a + 4b - 2c + 1 = 5$

$-8a + 4b - 2c = 4$

$-4a + 2b - c = 2 \qquad (1)$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(-2) = 0 \implies 12a - 4b + c = 0 \qquad (2)$

$f'(0) = 0 \implies c = 0 \qquad (3)$

من (1)، (2)، (3) نحصل على $b = 3$, $a = 1$

(9) جدول التغير:

	$-\infty$ ... -1	-1 ... 1	1 ... ∞
الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
إشارة f'	$- -$	$+ +$	$- -$
سلوك الدالة f	↘	↗	↘

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) **(2)** (a) **(3)** (a) **(4)** (a) **(5)** (a)

(6) (c) **(7)** (c) **(8)** (c) **(9)** (a) **(10)** (b)

(11) (d) **(12)** (d) **(13)** (b) **(14)** (a)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) لتكن الأعداد x و $20-x$ حيث $0 \leqslant x \leqslant 20$

(a) مجموع مربعيهما هو: $f(x) = x^2 + (20-x)^2 = 2x^2 - 40x + 400$ ، ثم $f'(x) = 4x - 40$

النقطة الحرجة والنقاط الطرفية تحدث عند $x = 0$ و $x = 10$ و $x = 20$، ثم $f(0) = 400$ و $f(10) = 200$ و $f(20) = 400$ مجموع المربعين هو أصغر ما يمكن للأعداد 10 و 10

(b) يعطى مجموع عدد واحد مع الجذر التربيعي للعدد لآخر بالدالة $g(x) = x + \sqrt{20-x}$، ثم $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{20-x}}$

تحدث النقطة الحرجة عندما $2\sqrt{20-x} = 1$، إذًا $20 - x = \frac{1}{4}$ و $x = \frac{79}{4}$، بعد التدقيق في النقاط الطرفية والنقطة الحرجة، نجد أن: $g(0) = \sqrt{20} \approx 4.47$ و $g\left(\frac{79}{4}\right) = \frac{81}{4} = 20.25$ و $g(20) = 20$

الجمع هو أكبر ما يمكن عند الأعداد $\frac{79}{4}$ و $\frac{1}{4}$

(2) ترمز x و y إلى ضلعي القائمة في المثلث ولاحظ أن $0 < x < 6$، ثم $x^2 + y^2 = 36$، إذًا $y = \sqrt{36 - x^2}$ (حيث إن $y > 0$)

المساحة هي: $A = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}$، إذًا $\dfrac{dA}{dx} = \dfrac{1}{2}x\dfrac{1}{2\sqrt{36-x^2}}(-2x) + \dfrac{1}{2}\sqrt{36-x^2} = \dfrac{36-2x^2}{2\sqrt{36-x^2}}$

تحدث النقطة الحرجة عند $36 - 2x^2 = 0$ مما يعني أن $x = 3\sqrt{2}$ (حيث إن $x > 0$) تعود هذه القيمة إلى أكبر مساحة ممكنة حيث إن $\frac{dA}{dx} > 0$ لـ $0 < x < 3\sqrt{2}$ و $\frac{dA}{dx} < 0$ لـ $3\sqrt{2} < x < 6$ حيث $x = 3\sqrt{2}$، لدينا:

$y = \sqrt{36 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$ و $A = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}(3\sqrt{2})^2 = 9$ لذا، المساحة الأكبر الممكنة هي $9\,\text{cm}^2$ وبعدا الضلعين هما: $3\sqrt{2}\,\text{cm} \times 3\sqrt{2}\,\text{cm}$

(3) ترمز x إلى طول المستطيل بالمتر $(0 < x < 4)$. ثم العرض هو: $4 - x$ والمساحة هي: $A(x) = x(4-x) = 4x - x^2$.

حيث إن $A'(x) = 4 - 2x$، تحدث النقطة الحرجة عند $x = 2$ حيث إن $A'(x) > 0$ لـ $0 < x < 2$ و $A'(x) < 0$ لِـ $2 < x < 4$ هذه النقطة الحرجة تعود إلى المساحة العظمى.

مقياس المستطيل حسب الأطوال الكبيرة هو $2\,\text{m} \times 2\,\text{m}$، إذًا إنه مربع ومساحته العظمى هي $4\,\text{m}^2$

(4) لاحظ أن القيمتين a و b يجب أن تحققا $a^2 + b^2 = 20^2$ وهكذا، تعطى المساحة بـ: $A = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a\sqrt{400-a^2}$

لِـ $0 < a < 20$ $\quad \dfrac{dA}{da} = \dfrac{1}{2}a\left(\dfrac{1}{2\sqrt{400-a^2}}\right)(-2a) + \dfrac{1}{2}\sqrt{400-a^2} = \dfrac{-a^2 + (400-a^2)}{2\sqrt{400-a^2}} = \dfrac{200-a^2}{\sqrt{400-a^2}}$

تحدث النقطة الحرجة عندما $a^2 = 200$ حيث $\frac{dA}{da} > 0$ لِـ $0 < a < \sqrt{200}$ و $\frac{dA}{da} < 0$ لِـ $\sqrt{200} < a < 20$

تناظر هذه النقطة الحرجة المساحة العظمى، بالتالي $a = \sqrt{200}$، ثم $b = \sqrt{400-a^2} = \sqrt{200}$

إذًا المساحة العظمى عند $a = b = 10\sqrt{2}$

(5) x هي الطول بالأمتار للجهة العمودية للنهر فيكون قياس الجهة الموازية للنهر هو $(800-2x)\,\text{m}$ والمساحة هي $A(x)=x(800-2x)=800x-2x^2$ لـ $0<x<400$. بالتالي، $A'(x)=800-4x$ وتحدث النقطة الحرجة عند $x=200$ حيث إن النقطة الحرجة تناظر المساحة العظمى. المساحة الأكبر الممكنة هي $A(200)=80\,000\,\text{m}^2$ والأطوال هي $200\,\text{m}$ (عمودية على النهر) بـ $400\,\text{m}$ (الموازية للنهر).

(6) لتكن x طول كل جهة من قاعدة المربع بالمتر، الارتفاع $\frac{500}{x^2}\,\text{m}$ والمساحة الإجمالية للخزان (باستثناء الفتحة) هي: $S(x)=x^2+4x\left(\frac{500}{x^2}\right)=x^2+2\,000x^{-1}$، بالتالي $S'(x)=2x-2\,000x^{-2}=\frac{2(x^3-1000)}{x^2}$ وتحدث النقطة الحرجة عند $x=10$ حيث إن $S'(x)<0$ لـ $0<x<10$ و $S'(x)>0$ لِـ $x>10$ تناظر النقطة الحرجة أقل كمية مستخدمة من الحديد يجب أن تكون الأبعاد $10\,\text{m}\times10\,\text{m}\times5\,\text{m}$ حيث الارتفاع $5\,\text{m}$

أكّد أن الوزن ينخفض عندما ينخفض مجموع المساحة المكوّن من مساحة القاعدة ومساحات الجوانب الأربعة.

(7) بافتراض أن a و b ثابتتان، ثم $A(\theta)=\frac{1}{2}ab\sin\theta$ و $A'(\theta)=\frac{1}{2}ab\cos\theta$ تحدث النقطة الحرجة (في $0<\theta<\pi$) عند $\theta=\frac{\pi}{2}$ حيث $A'(\theta)>0$ لـ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ و $A'(\theta)<0$ لـ $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ فإن النقطة الحرجة تناظر المساحة العظمى. الزاوية التي تجعل مساحة المثلث أكبر هي: $\theta=\frac{\pi}{2}$ (أو $90°$)

(8) نصف قطر العلبة r هو بالـ cm وارتفاعها h هو بالـ cm، ثم $\pi r^2h=1000$ إذًا $h=\frac{1000}{\pi r^2}$

مساحة المعدن المستخدم هي: $A=\pi r^2+2\pi rh=\pi r^2+\frac{2\,000}{r}$ إذًا $\frac{dA}{dr}=2\pi r-2\,000r^{-2}=\frac{2\pi r^3-2\,000}{r^2}$

تحدث النقطة الحرجة عند $r=\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}=10\pi^{\frac{-1}{3}}\,\text{cm}$، حيث $\frac{dA}{dr}<0$ لِـ $0<r<10\pi^{\frac{-1}{3}}$ و $\frac{dA}{dr}>0$ لِـ $r>10\pi^{\frac{-1}{3}}$، تناظر النقطة الحرجة أقل كمية من المواد المستخدمة لصنع العلبة الأقل سماكة.

الأبعاد هي: $r=10\pi^{\frac{-1}{3}}\approx6.83\,\text{cm}$ و $h=10\pi^{\frac{-1}{3}}\approx6.83\,\text{cm}$

(9) لتكن x طول نصف قطر قاعدة المخروط وارتفاعه $y+3$. بالعودة إلى مقدمة المسألة، حيث $x^2+y^2=9$ لدينا $x=\sqrt{9-y^2}$ حجم المخروط يعطى حسب:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi x^2(y+3)=\frac{1}{3}\pi(9-y^2)(y+3)=\frac{\pi}{3}(-y^3-3y^2+9y+27)$$ لِـ $0<y<3$ لذلك،

$$\frac{dV}{dy}=\frac{\pi}{3}(-3y^2-6y+9)=-\pi(y^2+2y-3)=-\pi(y+3)(y-1)$$ إذًا النقطة على الفترة $(0,3)$ هي $y=1$ حيث

$\frac{dV}{dy}>0$ لِـ $0<y<1$ و $\frac{dV}{dy}<0$ لِـ $1<y<3$ تناظر النقطة الحرجة القيمة العظمى، التي تساوي $V(1)=\frac{32\pi}{3}(\text{units}^3)$

(10) تربيع المسافة هو: $D(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(\sqrt{x}+0)^2=x^2-2x+\frac{9}{4}$، إذًا $D'(x)=2x-2$ وتحدث النقطة الحرجة عند $x=1$ حيث $D'(x)<0$ لـ $x<1$ و $D'(x)>0$ لـ $x>1$ تناظر النقطة الحرجة المسافة الأصغر، التي هي $\sqrt{D(1)}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ units

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) **(2)** (b) **(3)** (c) **(4)** (d) **(5)** (a) **(6)** (b)

اختبار الوحدة الثالثة

(1) $f' = 3x^2 - 18x - 21 = 3(x+1)(x-7)$

$f(-1) = 0 \quad , \quad f(-2) = -13 \quad , \quad f(0) = -11$

0 قيمة عظمى مطلقة عند $x = -1$

-13 قيمة صغرى مطلقة عند $x = -2$

(2) $f'(x) = \dfrac{-10x}{(x^2+1)^2}$

$f(0) = 5 \quad , \quad f(-2) = 1 \quad , \quad f(3) = \dfrac{1}{2}$

5 قيمة عظمى مطلقة عند $x = 0$

$\dfrac{1}{2}$ قيمة صغرى مطلقة عند $x = 3$

(3) $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$

جدول التغير:

الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	$+\ +$	$-\ -$	$+\ +$
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

$f(2) = -10$

$f(-2) = 22$

(a) فترات التزايد: $(2, \infty)$ ، $(-\infty, -2)$

فترة التناقص: $(-2, 2)$

(b) القيم القصوى المحلية: قيمة عظمى محلية 22 عند $x = -2$؛ قيمة صغرى محلية -10 عند $x = 2$

(4) $g'(x) = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$

جدول التغير:

الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
إشارة f'	$-\ -$	$+\ +$	$-\ -$
سلوك الدالة f	↘	↗	↘

$f(1) = \dfrac{1}{2}$

$f(-1) = -\dfrac{1}{2}$

(a) فترة التزايد: $(-1,1)$

فترات التناقص: $(-\infty,-1)$ ، $(1,\infty)$

(b) القيم القصوى المحلية: قيمة عظمى محلية $\frac{1}{2}$ عند $x = 1$؛

قيمة صغرى محلية $-\frac{1}{2}$ عند $x = -1$

(5) $h'(x) = \dfrac{-x^2+9}{(x^2+2x+9)^2} = \dfrac{-(x-3)(x+3)}{(x^2+2x+9)^2}$

جدول التغير:

الفترات	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,\infty)$
إشارة f'	$- -$	$+ +$	$- -$
سلوك الدالة f	↘	↗	↘

$f(3) = \frac{1}{8}$

$f(-3) = -\frac{1}{4}$

(a) فترة التزايد: $(-3,3)$

فترات التناقص: $(-\infty,-3)$ ، $(3,\infty)$

(b) القيم القصوى المحلية: قيمة عظمى محلية $\frac{1}{8}$ عند $x = 3$؛

قيمة صغرى محلية $-\frac{1}{4}$ عند $x = -3$

(6) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$

$f'(x) = 6x^2 - 12x$

$f''(x) = 12x - 12 = 12(x-1)$

جدول التقعر:

الفترات	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
إشارة f''	$- -$	$+ +$
تقعر الدالة f	$\frown$	$\smile$

$f(1) = -1$

(a) فترات التقعر: مقعرة لأعلى على الفترة $(1,\infty)$

مقعرة لأسفل على الفترة $(-\infty,1)$

(b) نقطة الانعطاف: $(1,-1)$

(7) $g(x) = x^4 - 2x^3 + 5x - 6$

$g'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5$

$g''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$

جدول التقعر:

$-\infty \quad 0 \quad 1 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
إشارة g''	$+\,+$	$-\,-$	$+\,+$
تقعر الدالة g	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$g(1) = -2 \qquad g(0) = -6$

(a) فترات التقعر: مقعرة لأعلى على الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(1, \infty)$

مقعرة لأسفل على الفترة $(0, 1)$

(b) نقاط الانعطاف: $(1, -2)$, $(0, -6)$

(8) $h(x) = \dfrac{3}{x-1}$

$h'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$

$h''(x) = \dfrac{6}{(x-1)^3}$

جدول التقعر:

$-\infty \quad 1 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
إشارة h''	$-\,-$	$+\,+$
تقعر الدالة h	$\cap$	$\cup$

(a) فترات التقعر: مقعرة لأعلى على الفترة $(1, \infty)$ ، مقعرة لأسفل على الفترة $(-\infty, 1)$.

(b) لا نقاط انعطاف.

(9) $y'' = 6(2x - 1)$

(a) $x = -1 \qquad x = 2$ قيم x

(b) $x > \frac{1}{2} \qquad y'' > 0$

فترة التقعر لأعلى: $\left(\frac{1}{2} , \infty\right)$

(c) $x < \frac{1}{2} \qquad y'' < 0$

فترة التقعر لأسفل: $\left(-\infty , \frac{1}{2}\right)$

(10) $y'' = 18x(x-2)$

	0		2	
$++$		$--$		$++$

(a) $x = -1$

(b) مقعر لأعلى على الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(2, \infty)$

(c) مقعر لأسفل على الفترة $(0, 2)$

(11) ليس للدالة نقطة انعطاف عند $x = 3$ ، وهناك نقطة انعطاف عند $x = 0$

(12) $f(x) = x^3 + 8$

$f'(x) = 3x^2$

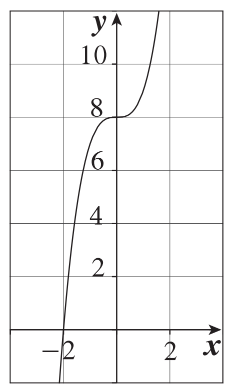
$f'(0) = 8$

جدول التغير:

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
إشارة f'	$++$	$++$
سلوك الدالة f	↗	↗

$f''(x) = 6x \quad ; \quad f(0) = 8$

النقطة $(0, 8)$ نقطة انعطاف.



(13) $g'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$

جدول التغير:

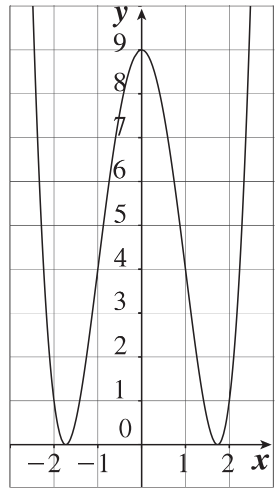
الفترات	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
إشارة g'	$--$	$++$	$--$	$++$
سلوك الدالة g	↘	↗	↘	↗

$g(0) = 9 \qquad g(-\sqrt{3}) = g(\sqrt{3}) = 0$

$g''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 12(x-1)(x+1)$

$g(-1) = 4 \qquad g(1) = 4$

نقاط الانعطاف: $(1,4)$, $(-1,4)$



(14) $h'(x) = 2(x^2 + 4x + 4)(2x + 4) = 4(x+2)^3$

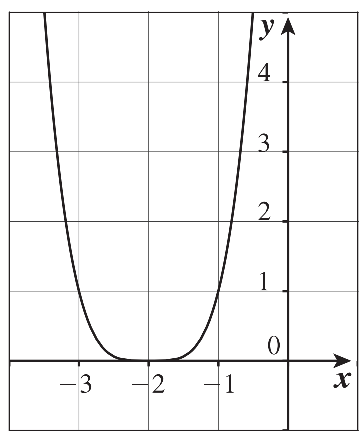
جدول التغير:

	$-\infty$	-2	∞
الفترات	$(-\infty, -2)$		$(-2, \infty)$
إشارة h'	$- -$		$+ +$
سلوك الدالة h	↘		↗

$h(-2) = 0$

$h''(x) = 12(x+2)^2$

النقطة $(-2,0)$ ليست نقطة انعطاف.



(15) **(a)** f دالة كثيرة حدود متصلة على الفترة $[0,3]$، قابلة للاشتقاق على الفترة $(0,3)$

$\therefore$ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[0,3]$

(b) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$$

$$3c^2 - 6c = \frac{5-5}{3} = 0$$

$$3c(c-2) = 0$$

$$c = 2 \quad , \quad c = 0 \notin (0,3)$$

(16) $f(-2) = -1 \implies 4 - 2b + c = -1$

$$-2b + c = -5 \qquad (1)$$

$$f'(x) = 2x + b$$

$$f'(-2) = 0 \implies 2(-2) + b = 0 \quad ; \quad b = 4$$

من (1) نحصل على $-2(4) + c = -5$

$$c = 3$$

تمارين إثرائية

(1) **(a)** عند $t = \frac{\pi}{3}\,s$ أو عند $t = \frac{4\pi}{3}\,s$

(b) المسافة القصوى بين الجسيم A والجسيم B. نحصل عليها من:

$$f(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) - \sin t$$

$$f(t) = \sin t \times \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} \times \cos t - \sin t$$

$$f(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$$

$$f'(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t$$

$$f'(t) = 0 \implies \tan t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$t = \frac{11\pi}{6}$ أو $t = \frac{5\pi}{6}$

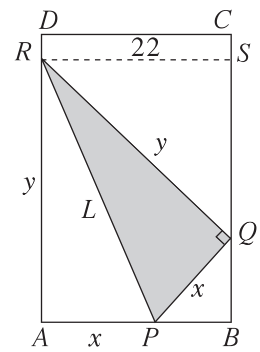
وبالتالي أبعد مسافة هي $1\,\text{m}$

(c) نوجد $f''(t)$ عند $t = \frac{\pi}{3}\,s$ أو $t = \frac{4\pi}{3}\,s$

(2) **(a)** نرسم القطعة RS كما هو موضّح، ونجعل y طول QR. $PB = 22 - x$

$$QB = \sqrt{x^2 - (22-x)^2} = \sqrt{22(2x - 22)}$$

إن المثلثين QRS، PQB متشابهان إذًا:



$$\frac{y}{x}=\frac{22}{\sqrt{22(2x-22)}}$$

$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{22^2}{22(2x-22)}$$

$$y^2=\frac{22x^2}{2x-22}$$

$$y^2=\frac{11x^2}{x-11}$$

$L^2=x^2+y^2$ نظرية فيثاغورث

$$L^2=x^2+\frac{11x^2}{x-11}$$

$$L^2=\frac{x^2(x-11)+11x^2}{x-11}$$

$$L^2=\frac{x^3}{x-11}$$

(b) $L^2=\dfrac{x^3}{x-11}$ نوجد مشتقة L^2

$$\frac{d(L^2)}{dx}=\frac{3x^2(x-11)-1(x^3)}{(x-11)^2}=\frac{2x^3-33x^2}{(x-11)^2}$$

$$=\frac{x^2(2x-33)}{(x-11)^2}\quad ;\quad x^2>0$$

$$\frac{d(L^2)}{dx}=0\Rightarrow 2x-33=0\Rightarrow x=\frac{33}{2}$$

(c) $L^2\left(\dfrac{33}{2}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{33}{2}\right)^3}{\dfrac{33}{2}-11}=\dfrac{3\times(33)^2}{4}$

$$L=\frac{33\sqrt{3}}{2}\approx 28.5788\text{ cm}$$

(3) قيمة مبيع السلعة: $nx=\dfrac{ax}{x-10}+bx(100-x)$

كلفة الإنتاج: $10n=\dfrac{10a}{x-10}+10b(100-x)$

الربح: $P(x)=nx-10n$

$$P(x)=\frac{ax}{x-10}+bx(100-x)-\frac{10a}{x-10}-10b(100-x)$$

$$P'(x)=\frac{a(x-10)-ax}{(x-10)^2}+b(100-x)-bx+\frac{10a}{(x-10)^2}+10b$$

$$P'(x)=110b-2bx$$

يحدث الربح الأكبر إذا $P'(x)=0$ أي $x=55$ (دينارًا كويتيًّا)

(4) **(a)** $f'(x)=-4x^3+4x+1$

$f''(x)=-12x^2+4$

نقاط الانعطاف: $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-0.02\right),\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1.13\right)$

جدول التغير:

	$-\infty$ … -0.838	-0.838 … -0.269	-0.269 … 1.1	1.1 … ∞
الفترات	$(-\infty, -0.838)$	$(-0.838, -0.269)$	$(-0.269, 1.1)$	$(1.1, \infty)$
إشارة f'	+ +	− −	+ +	− −
سلوك الدالة f	↗	↘	↗	↘

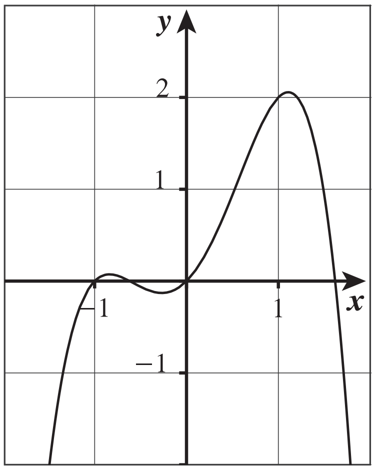
(b) $f'(x) = 1 \implies -4x^3 + 4x + 1 = 1$

$-4x(x^2 - 1) = 0$

$x = 0 \ , \ x = 1 \ , \ x = -1$

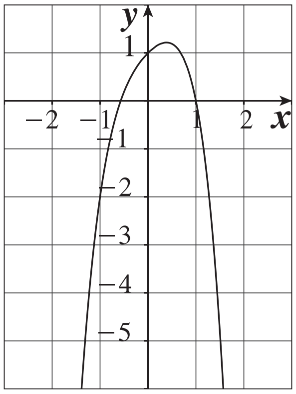
$f(0) = 0 \ , \ f(1) = 2 \ , \ f(-1) = 0$

النقاط: $(0,0) \ , \ (1,2) \ , \ (-1,0)$



(c) معادلة المماس عند كل من النقطتين $(1,2)$, $(-1,0)$: $y = x + 1$

(5) $y' = 1 - 2x - 4x^3$ تكون الدالة y' صفرًا عند $x \approx 0.385$



الفترات	$x < 0.385$	$x > 0.385$
إشارة y'	+	−
سلوك y	متزايدة	متناقصة

$y'' = -2 - 12x^2 = -2(1 + 6x^2)$ المشتقة الثانية هي دائمًا سالبة إذًا هي مقعرة لأسفل لكل قيم x .

(a) $(-\infty, 0.385]$ تقريبًا.

(b) $[0.385, \infty)$ تقريبًا.

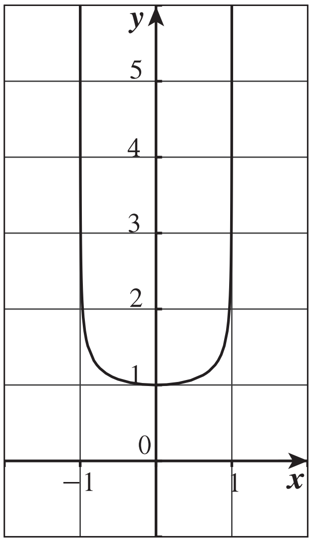
(c) غير موجودة.

(d) $(-\infty, \infty)$

(e) عظمى مطلقة عند $(0.385 \ , \ 1.215)$

(f) غير موجودة.

(6) لاحظ أن المجال هو $(-1,1)$



$$y=(1-x^2)^{\frac{-1}{4}}$$

$$y'=-\frac{1}{4}(1-x^2)^{\frac{-5}{4}}(-2x)=\frac{x}{2(1-x^2)^{\frac{5}{4}}}$$

الفترات	$(-1,0)$	$(0,1)$
إشارة y'	$-$	$+$
سلوك y	متناقصة	متزايدة

$$y''=\frac{2(1-x^2)^{\frac{5}{4}}(1)-(x)(2)\left(\frac{5}{4}\right)(1-x^2)^{\frac{1}{4}}(-2x)}{4(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$=\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}[2-2x^2+5x^2]}{4(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{3x^2+2}{4(1-x^2)^{\frac{9}{4}}}$$

المشتقة الثانية هي دائمًا موجبة، إذًا الدالة هي مقعرة لأعلى في مجالها $(-1\ ,\ 1)$

(a) $[0,1)$ **(b)** $(-1,0]$

(c) $(-1,1)$ **(d)** غير موجودة

(e) صغرى مطلقة عند $(0,1)$ **(f)** غير موجودة

(7) $y=2x^{\frac{4}{5}}-x^{\frac{9}{5}}$

$$y'=\frac{8}{5}x^{\frac{-1}{5}}-\frac{9}{5}x^{\frac{4}{5}}=\frac{8-9x}{5\sqrt[5]{x}}$$

الفترات	$(-\infty,0)$	$\left(0\ ,\ \frac{8}{9}\right)$	$\left(\frac{8}{9}\ ,\ \infty\right)$
إشارة y'	$-$	$+$	$-$
سلوك y	متناقصة	متزايدة	متناقصة

$$y''=-\frac{8}{25}x^{\frac{-6}{5}}-\frac{36}{25}x^{\frac{-1}{5}}=-\frac{4(2+9x)}{25x^{\frac{6}{5}}}$$

الفترات	$\left(-\infty\ ,\ -\frac{2}{9}\right)$	$\left(-\frac{2}{9}\ ,\ 0\right)$	$(0\ ,\ \infty)$
إشارة y''	$+$	$-$	$-$
سلوك y	مقعرة لأعلى	مقعرة لأسفل	مقعرة لأسفل

(a) $\left[0, \frac{8}{9}\right]$

(b) $(-\infty, 0)$ و $\left(\frac{8}{9}, \infty\right)$

(c) $\left(-\infty, -\frac{2}{9}\right)$

(d) $\left(-\frac{2}{9}, 0\right)$ و $(0, \infty)$

(e) قيمة عظمى محلية عند $\left(\frac{8}{9} \, , \, \frac{10}{9} \times \left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{4}{5}}\right) \approx (0.889 \, , \, 1.011)$

قيمة صغرى محلية عند $(0, 0)$

(f) $\left(-\frac{2}{9} \, , \, \frac{20}{9} \times \left(-\frac{2}{9}\right)^{\frac{4}{5}}\right) \approx \left(-\frac{2}{9} \, , \, 0.667\right)$

(8) **(a)** كلتا قيم y' و y'' هي سالبة حيث يتناقص المنحنى ومقعر لأسفل، عند T.

(b) قيمة y' سالبة هي وقيمة y'' موجبة بحيث يتناقص المنحنى ومقعر لأعلى، عند P.

(9) $f(0) = 3 \implies d = 3$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(0) = 0 \implies c = 0$

$f(1) = 1 \implies a + b + 3 = 1$

$a + b = -2 \qquad (1)$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(1) = 0 \implies 6a + 2b = 0$

$3a + b = 0 \qquad (2)$

من (1) و (2) نحصل على $a = 1 \; , \; b = -3$

(10)(a) f تتزايد على الفترة $[0,1]$ وتتناقص على الفترة $[1,3]$. تحدث القيم العظمى المطلقة عند $x = 1$

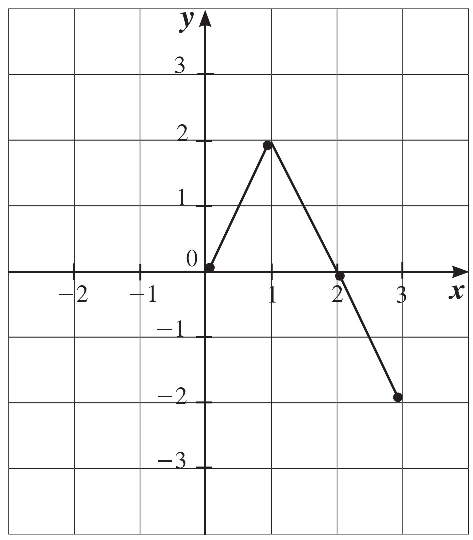
وتحدث القيم الصغرى المطلقة عند النقاط الطرفية.

حيث إن $f(0) = 0 \; , \; f(1) = 2 \; , \; f(3) = -2$ لذا القيمة العظمى المطلقة هي 2 عند $x = 1$

والقيمة الصغرى المطلقة هي -2 عند $x = 3$

(b) لا يتغير تقعر المنحنى لذا ما من نقاط انعطاف.

(c)



(11) **(a)** $y = 2$ مقارب أفقي $\therefore \ \frac{a}{c} = 2 \ , \ a = 2c$ (1)

(b) $x = \frac{1}{2}$ مقارب رأسي $\therefore \ c\left(\frac{1}{2}\right) + d = 0 \ , \ d = -\frac{1}{2}c$ (2)

(c) $A(-1\ ,\ 1) \ \therefore \ 1 = \frac{-a+b}{-c+d} \ , \ -c + d = -a + b$

إذًا من (1), (2) نجد أنّ $c = \frac{1}{2}b$

لتكن $c = 2$ إذًا $y = \frac{4x+1}{2x-1}$

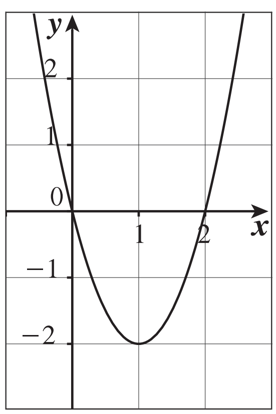
(12) $f(x) = 2x^2 - 4x$

(a) $f'(x) = 4x - 4$

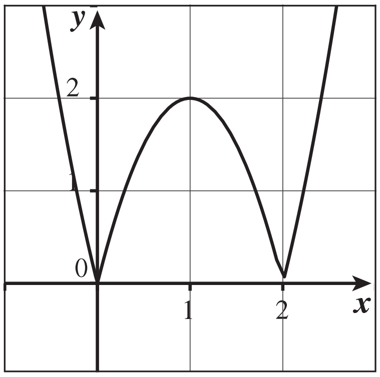
$f'(1) = 0 \qquad f(1) = -2$

جدول التغير:

$-\infty$ … 1 … ∞	$(1,\infty)$	$(-\infty,1)$
الفترات	$(1,\infty)$	$(-\infty,1)$
إشارة f''	$+\ +$	$-\ -$
تقعر الدالة f	↗	↘



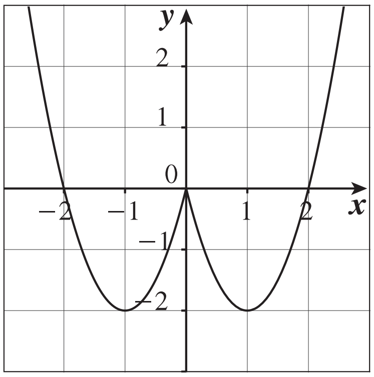
(b) $g(x) = |2x^2 - 4x| = \begin{cases} 2x^2 - 4x = f(x) & : \ x \le 0 \\ -2x^2 + 4x = -f(x) & : \ 0 < x < 2 \\ 2x^2 - 4x = f(x) & : \ x \ge 2 \end{cases}$



(c) $h(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x & : \quad x \geq 0 \\ 2x^2 + 4x & : \quad x < 0 \end{cases} = \begin{cases} f(x) & : \quad x \geq 0 \\ f(-x) & : \quad x < 0 \end{cases}$

بيان h على الفترة $[0,\infty)$ هو نفسه بيان f.

بيان h على الفترة $(-\infty,0)$ هو انعكاس في المحور الرأسي لبيان h على الفترة $(0,\infty)$



(13) (a) $f'(x) = 3x^2 + 4$

$3x^2 + 4 = 7 \implies x = 1$ أو $x = -1$

(b) $f(1) = 16 \qquad f(-1) = 6$

$y(1) = 16 \qquad y(-1) = 2$

النقطة $(1,16)$ هي نقطة مماس.

(14) (a) $f'(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$

$f(0) = 0 \qquad f(2) = \frac{8}{3} - 4 = \frac{-4}{3}$

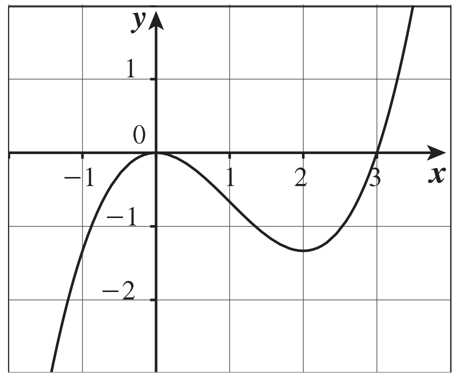
الفترات	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
إشارة f'	+ +	− −	+ +
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

$f''(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$

$f(1) = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3}$

النقاط الحرجة: $(0,0)$ ، $\left(2,-\frac{4}{3}\right)$

نقطة الانعطاف: $\left(1,-\frac{2}{3}\right)$



(b) $f'(x) = 3 \implies x^2 - 2x = 3$

$x = -1 \qquad x = 3$

$f(-1) = \frac{-4}{3} \qquad f(3) = 0$

النقطتان $(3,0)$, $\left(-1,-\frac{4}{3}\right)$

(15) (a) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
إشارة f'	$+\ +$	$-\ -$	$+\ +$
سلوك الدالة f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$f(-1) = 4 \qquad f(1) = 0$

$g'(x) = 2x - 3$

الفترات	$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2},\infty\right)$
إشارة g'	$-\ -$	$+\ +$
سلوك الدالة g	$\searrow$	$\nearrow$

$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-9}{4}$

(b) $f(x) = g(x)$

$x^3 - 3x + 2 = x^2 - 3x$

$x^3 - x^2 + 2 = 0$

$x = -1$

$f(-1) = 4$

النقطة المشتركة $(-1, 4)$

(c) مماس على (C)

$f'(-1) = 0$

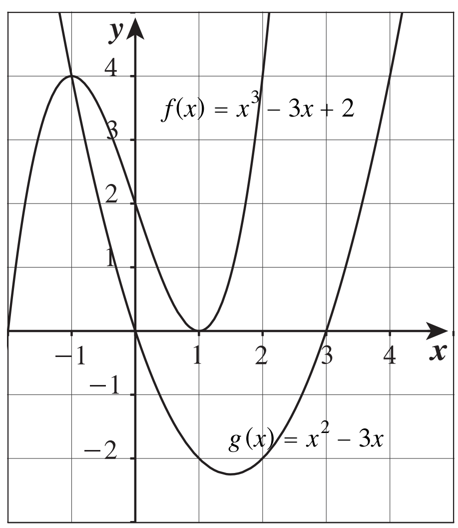
$y = 4$

مماس على (C')

$g'(-1) = -5$

$y = -5x + 9$

(d)



المجموعة A تمارين مقالية

(1) من جدول التوزيع الطبيعي:

(a) $\frac{0.97}{2} = 0.485 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$

(b) $\frac{0.992}{2} = 0.496 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.65$

(2) درجة الثقة 0.95 لذا القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, $\sigma = 0.5$

هامش الخطأ: $E = 1.96 \times \frac{0.5}{\sqrt{1000}} \approx 0.03$

فترة الثقة: $(4.97 \ , \ 5.03)$

(3) درجة الثقة = 0.95 لذا القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, $\sigma = 3.5$

هامش الخطأ: $E = 1.96 \times \frac{3.5}{\sqrt{13}} \approx 1.9$

فترة الثقة: $(28.1 \ , \ 31.9)$

عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $(n = 13)$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة عشوائية فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

(4) درجة الثقة = 0.95 لذا القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, $\sigma = 119.5$

هامش الخطأ: $E = 1.96 \times \frac{119.5}{\sqrt{40}} \approx 37.0338$

فترة الثقة: $(135.4662 \ , \ 209.5338)$

(5) درجة الثقة: 0.95 لذا القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, $S = 2.2$

هامش الخطأ: $E = 1.96 \times \frac{2.2}{\sqrt{80}} \approx 0.48$

فترة الثقة: $(4.32 \ , \ 5.28)$

(6) درجة الثقة: 0.95، $n = 16 < 30$، درجات الحرية = 15، $S = \sqrt{15}$

القيمة الحرجة: $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.132$

هامش الخطأ: $E = 2.132 \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} \approx 2.0643$

فترة الثقة: $(10.9357 \ , \ 15.0643)$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a) **(2)** (b) **(3)** (a) **(4)** (d)

(5) (d) **(6)** (b) **(7)** (b) **(8)** (a)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 16$ مقابل الفرض البديل: $H_1 : \mu \neq 16$

$\sigma = 1.4$ معلومة، $n = 25$، $\bar{x} = 15$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{15 - 16}{\dfrac{1.4}{\sqrt{25}}} \approx -3.57$

درجة الثقة $= 0.95$

فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96 , 1.96)$

بما أن: $-3.57 \notin (-1.96 , 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم: $\mu = 16$ ونقبل الفرض البديل: $\mu \neq 16$

(2) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 300$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 300$

$\sigma = 40$ معلومة، $n = 49$، $\bar{x} = 280$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{280 - 300}{\dfrac{40}{\sqrt{49}}} = -3.5$

درجة الثقة $= 0.95$

فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96 , 1.96)$

بما أن: $-3.5 \notin (-1.96 , 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم: $\mu = 300$ ونقبل الفرض البديل: $\mu \neq 300$

(3) **(a)** $n = 50$. صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 35$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 35$

σ غير معلومة، $n = 50$، $\bar{x} = 40$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{40 - 35}{\dfrac{7}{\sqrt{50}}} \approx 5.0508$

درجة الثقة $= 0.95$

فتكون: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96 , 1.96)$

بما أن $5.0508 \notin (-1.96 , 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم: $H_0: \mu = 35$ ونقبل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 35$

(b) $n = 20$ ، صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 35$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 35$

σ غير معلومة، $n = 20 < 30$ ، $\bar{x} = 280$

الاختبار الإحصائي: $t = \dfrac{40 - 35}{\dfrac{7}{\sqrt{20}}} \approx 3.1944$

درجات الحرية: $20 - 1 = 19$

درجة الثقة: 0.95، مستوى المعنوية: $\alpha = 0.05$ ، $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{0.05}{2} = 0.025$

من جدول التوزيع t نجد $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.093$

منطقة القبول: $(-2.093 , 2.093)$

بما أن: $3.1944 \notin (-2.093\ ,\ 2.093)$

القرار: نرفض فرض العدم: $H_0: \mu = 35$ ونقبل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 35$

(4) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 5$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 5$

$n = 100$ ، $S = 1$ ، $\overline{x} = 4.5$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{4.5 - 5}{\dfrac{1}{\sqrt{100}}} = -5$

درجة الثقة $= 0.95$ فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ منطقة القبول: $(-1.96\ ,\ 1.96)$

بما أن $-5 \notin (-1.96\ ,\ 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم: $H_0: \mu = 5$ ونقبل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 5$

(5) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 30$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 30$

$S = 6.5$ ، $n = 150$ ، $\overline{x} = 30.3$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{30.3 - 30}{\dfrac{6.5}{\sqrt{150}}} \approx 0.565$

درجة الثقة $= 0.95$

فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ منطقة القبول: $(-1.96\ ,\ 1.96)$

بما أن $0.565 \in (-1.96\ ,\ 1.96)$

لذا نقبل فرض العدم: $H_0: \mu = 30$

(6) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 9\,600$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 9\,600$

$S = 640$ ، $n = 64$ ، $\overline{x} = 9\,480$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{9\,480 - 9\,600}{\dfrac{640}{\sqrt{64}}} = -1.5$

درجة الثقة $= 0.95$ فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96\ ,\ 1.96)$

بما أن $-1.5 \in (-1.96\ ,\ 1.96)$

القرار: نقبل فرض العدم: $H_0: \mu = 9\,600$

المجموعة B تمارين موضوعية

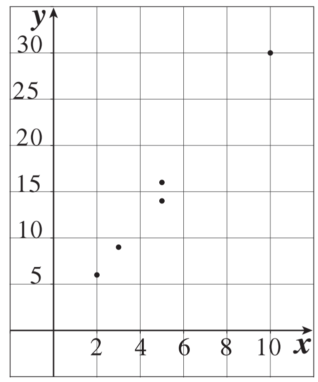
(1) (a) **(2)** (b) **(3)** (a) **(4)** (b)

(5) (b) **(6)** (b) **(7)** (b) **(8)** (c)

(9) (a) **(10)** (c)

المجموعة A تمارين مقالية

(a) (1)

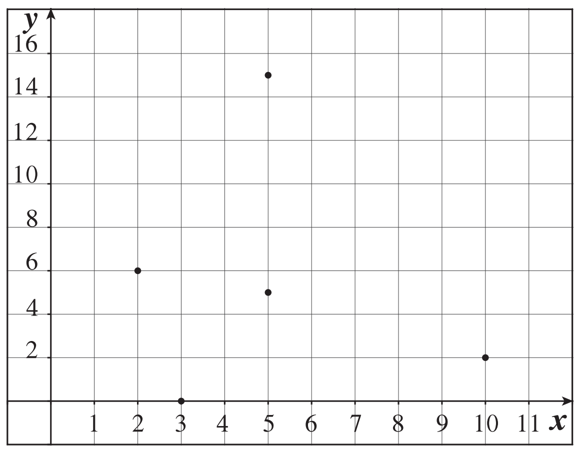


يوجد ارتباط خطي واضح بين x و y .

(b) $n = 5$, $\sum x = 25$, $\sum x^2 = 163$,

$\left(\sum x\right)^2 = 625$, $\sum xy = 489$, $r = 0.997$

(a) (2)

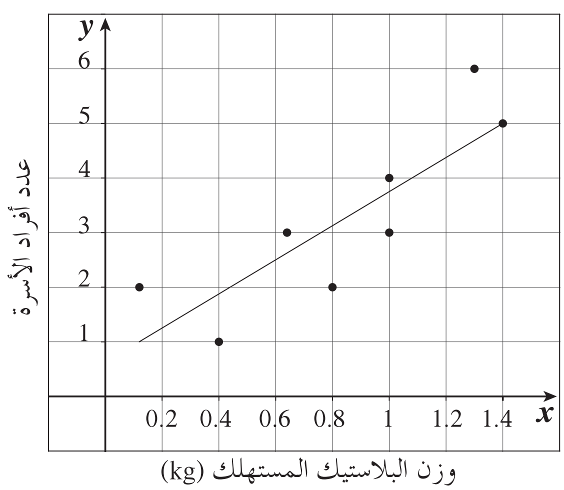


لا يوجد ارتباط خطي واضح بين x و y .

(b) $n = 5$, $\sum x = 25$, $\sum x^2 = 163$,

$\left(\sum x\right)^2 = 625$, $\sum xy = 132$, $r = -0.112$

(a) (3)

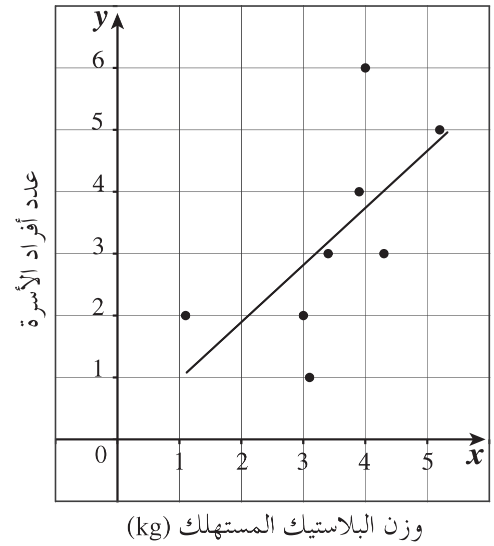


(b) قيمة مُعامل الارتباط الخطي هي: $r = 0.847$

(c) القيمة الحرجة لمُعامل ارتباط بيرسون إذا كان $n = 8$ و $\alpha = 0.05$ هي $r = \pm 0.707$

إذًا يوجد ارتباط خطي وثيق بين المتغيرين.

(4) (a)



(b) قيمة مُعامل الارتباط الخطي هي: $r = 0.6344$

(c) القيمة الحرجة لمُعامل ارتباط بيرسون إذا كان $n = 8$ و $\alpha = 0.05$ هي $r = \pm 0.707$

إذًا لا يوجد ارتباط خطي وثيق بين المتغيرين.

(5) (a) $\widehat{y} = 2x + 1$

(b) $\widehat{y}_7 = 2 \times 7 + 1 = 15$

(c) $\widehat{y}_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$

مقدار الخطأ عند $x = 2$

$|5 - 5| = 0$

(6) (a) $\widehat{y} = -x + 3$

(b) $\widehat{y}_8 = -8 + 3 = -5$

(c) $\widehat{y}_5 = -5 + 3 = -2$

مقدار الخطأ عند $x = 5$

$|-2 + 2| = 0$

(7) (a) $\widehat{y} = 3.246x + 0.55$

(b) $\widehat{y} = 3.246 \times 0.2 + 0.55$

≈ 1.2

أي واحد فقط من أفراد الأسرة.

(8) (a) $\widehat{y} = 0.89x + 0.137$

(b) $\widehat{y} = 0.89x \times 4.5 + 0.137$

$= 4.142$

أي 4 من أفراد الأسرة.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)	**(2)** (b)	**(3)** (a)	**(4)** (a)
(5) (a)	**(6)** (d)	**(7)** (b)	**(8)** (d)
(9) (a)	**(10)** (b)	**(11)** (c)	**(12)** (a)
(13) (b)	**(14)** (d)	**(15)** (c)	

اختبار الوحدة الرابعة

(1) (a) درجة الثقة 93% تناظر مستوى المعنوية $\alpha = 0.07$ أي أن $\frac{\alpha}{2} = 0.035$ باستخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي عند $0.93 \div 2 = 0.465$ فنحصل على $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.815$

(b) درجة الثقة 0.95، $n = 324$، $\overline{x} = 68.5$، $S = 11$، $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ عندها $\overline{x} - E < \mu < \overline{x} + E$

$$68.5 - 1.96\left(\frac{11}{\sqrt{324}}\right) < \mu < 68.5 + 1.96\left(\frac{11}{\sqrt{324}}\right)$$

$$67.302 < \mu < 69.698$$

يمكننا القول إننا واثقون بنسبة 95% أن المتوسط الحسابي لكلفة النقل للموظف الحكومي من منزله إلى العمل وبالعكس بسيارته الخاصة هو بين 67.302 دينارًا كويتيًّا و69.698 دينارًا كويتيًّا أي $67.302 < \mu < 69.698$

(c) بما أن $n = 324 > 30$، أي أنه يمكننا استخدام $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ كقيمة حرجة، لمستوى المعنوية $\alpha = 0.05$، وبما أن $\mu = 69.6$ يقع داخل فترة الثقة $(67.302\ ,\ 69.698)$ فإن قرارنا هو عدم رفض فرضية $\mu = 69.6$ متوسط كلفة شهرية (دينارًا كويتيًّا).

(d) $E < 1$، $\sigma = 9.5$، $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$، عندها نستخدم القاعدة: $E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$$1 > 1.96\left(\frac{9.5}{\sqrt{n}}\right) \text{، } \sqrt{n} > 1.96(9.5)$$

$n > 346.7$ أي 347 موظفًا وأكثر.

(2) (a) درجة الثقة 95% أي أن $1 - \alpha = 0.95$ حيث $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

هامش الخطأ:

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$E = \frac{1.96(8.16)}{\sqrt{n}} < 2$$

$$n > \left(\frac{1.96(8.16)}{2}\right)^2 > 63.95$$

أي 64 زائدًا وأكثر

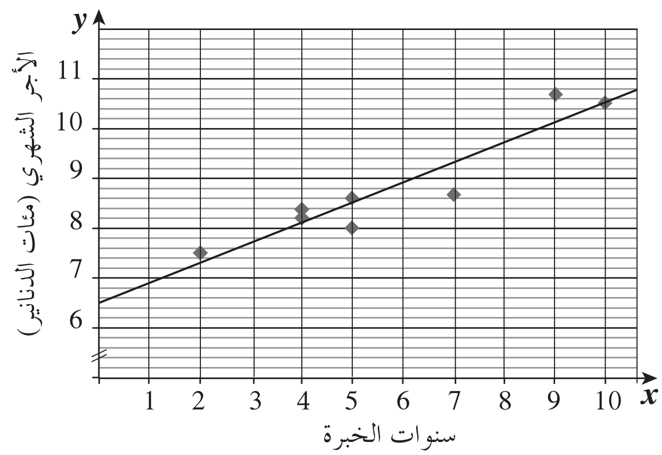
(b) $E = 2$, $\overline{x} = 25.5$, $n = 64$

عندها $\overline{x} - E < \mu < \overline{x} + E$

$23.5 < \mu < 27.5$

يمكننا القول إننا واثقون بنسبة 95% أن المتوسط الحسابي μ لما ينفقه كل زائر للمجمع التجاري في زيارة واحدة هو بين 23.5 وَ 27.5 دينارًا كويتيًّا، أي أن: $23.5 < \mu < 27.5$

(3) (a)



(b) $n = 8$ ، $\sum x = 46$ ، $\sum x^2 = 316$ ، $\left(\sum x\right)^2 = 2116$ ، $\sum xy = 426.6$

(c) $r = 0.9388$ ، القيمة الحرجة عند $\alpha = 0.05$ هي $\mu = \pm 0.707$ مما يعني أن هناك ارتباط خطي إيجابي قوي بين x, y

(d) معادلة خط الانحدار: $\widehat{y} = 0.4x + 6.525$

(e) التنبؤ لراتب موظف لديه 8 سنوات خبرة هو $\widehat{y} = 0.4(8) + 6.525$ أي 9.725 مئة دينار أو 973 (دينارًا كويتيًّا).

(4) (a) معادلة خط الانحدار: $\widehat{y} = -0.1513x + 5.0196$

(b) أفضل تنبؤ لعدد أفراد الأسرة هو: 3 أفراد

(5) $E = 1.96 \times \frac{1.2}{\sqrt{9}} = 0.784$

فترة الثقة: (19.216 , 20.784)

تمارين إثرائية

(1) $n = 36$ ، $\overline{x} = 11.6$ ، $S = 2.5$ ، $1 - \alpha = 0.9$ أي $\alpha = 0.1$ مما يعطينا $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$ كقيمة حرجة أي أن:

$\overline{x} - E < \mu < \overline{x} + E$

$11.6 - 1.645\left(\frac{2.5}{\sqrt{36}}\right) < \mu < 11.6 + 1.645\left(\frac{2.5}{\sqrt{36}}\right)$

$11.6 - 0.685 < \mu < 11.6 + 0.685$

$10.915 < \mu < 12.285$

يمكننا القول إننا واثقون بنسبة 90% أن المتوسط الحسابي μ لمعدل الطالب في امتحان الرياضيات بين 10.915 و 12.285

(2) $E = 150 \ , \ \sigma = 800 \ , \ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$150 = (2.575)\left(\frac{800}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\sqrt{n} = (2.575) \times \frac{800}{150} = 13.733$$

$n = (13.733)^2 = 188.6 \approx 189$ (مريضًا)

إذًا حجم العينة المناسب هو 189 مريضًا.

(3) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0 : \mu = 4.325$ مقابل الفرض البديل: $H_1 : \mu \neq 4.325$

$\because \ \alpha = 0.05 \ \therefore$ درجة الثقة 0.95 فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96 \ , \ 1.96)$

$\bar{x} = 4.101$ ، $n = 64$ أي $n > 30$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{4.101 - 4.325}{\frac{0.842}{\sqrt{64}}} = -\dfrac{0.224}{0.10524} \approx -2.1283$

بما أن $-2.1283 \notin (-1.96 \ , \ 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم $\mu = 4.325$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 4.325$

(4) **(a)** $\widehat{y} = 0.7x - 0.1$

(b) 4.5 تمثل 500 4 دينار

$$\widehat{y} = 0.7(4.5) - 0.1 = 3.05$$

حجم المبيعات هو حوالى 500 30 دينار.

(5) التقدير بنقطة للمعلمة المجهولة μ هو المتوسط الحسابي للعينة العشوائية $\bar{x} = 17$

(6) درجة الثقة = 0.95 فيكون مستوى الثقة: $\alpha = 0.05$ والقيمة الحرجة 1.96

هامش الخطأ: $E = 1.96 \times \dfrac{3}{\sqrt{130}}$

$E \approx 0.516$

فترة الثقة للمعلمة المجهولة μ هي: $(27.484 \ , \ 28.516)$

(7) درجة الثقة 0.95 فيكون مستوى الثقة: $\alpha = 0.05$ أي $\dfrac{\alpha}{2} = 0.025$

وبما أن $n = 25 < 30$ لذا درجات الحرية $25 - 1 = 24$ والقيمة الحرجة: $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.064$

هامش الخطأ: $E = 2.064 \times \dfrac{6}{5} = 2.4768$

فترة الثقة للمعلمة μ هي: $(19.5232 \ , \ 24.4768)$

(8) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 290\,000$ مقابل الفرض البديل $H_1: \mu \neq 290\,000$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{300\,000 - 290\,000}{\dfrac{70\,000}{\sqrt{1500}}}$

$Z \approx 5.533$

مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ فتكون منطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$ $\because$ $5.533 \notin (-1.96\ ,\ 1.96)$

$\therefore$ القرار هو رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل $H_1: \mu \neq 290\,000$

(9) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 10$ مقابل الفرض البديل $H_1: \mu \neq 10$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{9 - 10}{\dfrac{4}{\sqrt{40}}} \approx -1.58$

مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ فتكون منطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$

$\because$ $-1.58 \in (-1.96\ ,\ 1.96)$

$\therefore$ القرار هو قبول فرض العدم: $H_0: \mu = 10$

(10) **(a)** صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 150$ مقابل الفرض البديل $H_1: \mu \neq 150$

الاختبار الإحصائي: $Z = \dfrac{143 - 150}{\dfrac{10}{\sqrt{40}}}$

≈ -4.427

مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ فتكون منطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$

$\because$ $-4.427 \notin (-1.96\ ,\ 1.96)$

$\therefore$ القرار هو رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل $H_1: \mu \neq 150$

(b) $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{0.05}{2} = 0.025$، بما أن $n = 7$ فتكون درجات الحرية $6 = 1 - 7$، ومنطقة القبول: $(-2.447\ ,\ 2,447)$

الاختبار الإحصائي: $t = \dfrac{143 - 150}{\dfrac{8}{\sqrt{7}}}$

≈ -2.315

$\because$ $-2.315 \in (-2.447\ ,\ 2.447)$

$\therefore$ القرار هو قبول فرض العدم $H_0: \mu = 150$

(11) درجة الثقة 0.90 فتكون القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$

هامش الخطأ: $E = 1.645 \times \dfrac{2.5}{6}$

≈ 0.6854

فترة الثقة: $(10.9146 ،12.2854)$

(12) $r = \dfrac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \times \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$

$r \approx -0.243$ سلبي ضعيف

(13) $r \approx 0.825$ موجب قوي.

(14) $r \approx 0.612$ موجب متوسط.

(15) $r \approx 0.4286$ موجب ضعيف.