القسم الأول :أسئلة المقال: (تراعى الحلول الأخرى في جميع أسئلة المقال)

السؤال الأول :

(a) أوجد :

(1) $\int (x^2 + \cos 2x)dx$ (3 درجات)

الحل:

$1+1+1$	$\int (x^2 + \cos 2x)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\sin 2x + C$

(2) $\int 3xe^{2x+1}dx$ (5 درجات)

الحل:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$	$u = 3x \qquad dv = e^{2x+1}dx$
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$	$du = 3\,dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x+1}$
1	$\int u\,dv = uv - \int v\,du$
1	$\int 3x\,e^{2x+1}dx = \frac{3}{2}x\,e^{2x+1} - \frac{3}{2}\int e^{2x+1}dx$
1	$= \frac{3}{2}x\,e^{2x+1} - \frac{3}{4}e^{2x+1} + C$

تابع : السؤال الأول:

(b) إذا كانت $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

(1) رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر.

(2) البؤرتين.

(3) معادلتي دليلي القطع.

(4) طول كل من المحورين.

(7 درجات)

الحل:

(1) معادلة القطع الناقص هي : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

و منها نجد أن :

$\frac{1}{2}$ $a^2 = 36 \rightarrow a = 6$

$\frac{1}{2}$ $b^2 = 16 \rightarrow b = 4$

المحور الأكبر ينطبق على محور الصادات

1 رأسا القطع هما : $A_2(0, 6)$ ، $A_1(0, -6)$

1 طرفا المحور الأصغر هما : $B_2(4, 0)$ ، $B_1(-4, 0)$

1 (2) $c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 16 = 20$

و منه $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\frac{1}{2}$ البؤرتين هما : $F_2(0, 2\sqrt{5})$ ، $F_1(0, -2\sqrt{5})$

$\frac{1}{2}$ (3) معادلة الدليلين : $y = \frac{a^2}{c}$ ، $y = -\frac{a^2}{c}$ و منه نجد :

$\frac{1}{2}$ $y = \frac{a^2}{c} = \frac{36}{2\sqrt{5}} = \frac{18}{\sqrt{5}} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$

$\frac{1}{2}$ $y = -\frac{a^2}{c} = -\frac{36}{2\sqrt{5}} = -\frac{18}{\sqrt{5}} = -\frac{18\sqrt{5}}{5}$

$\frac{1}{2}$ (4) طول المحور الأكبر هو $2a$: $2a = 2 \times 6 = 12$

$\frac{1}{2}$ (5) طول المحور الأصغر هو $2b$: $2b = 2 \times 4 = 8$

السؤال الثاني :

ⓐ أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$ و رأساه $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$ ثم أوجد معادلة كلا من خطيه المقاربين

(6 درجات)

الحل:

∵ البؤرتين على محور السينات — $\frac{1}{2}$

∴ معادلة القطع الزائد هي : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — $\frac{1}{2}$

∵ إحدى البؤرتين $F_2(4, 0)$ — $\frac{1}{2}$

∴ $c = 4$ — $\frac{1}{2}$

∵ إحدى الرأسين $A_2(2, 0)$ — $\frac{1}{2}$

∴ $a = 2$ — $\frac{1}{2}$

$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$ — $\frac{1}{2}$

و منه $b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ — $\frac{1}{2}$

معادلة القطع الزائد هي : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ — 1

معادلتا الخطين المقاربين هما :

$y = \pm\frac{b}{a}x$ — $\frac{1}{2}$

$y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{2}x$ — $\frac{1}{2}$

$y = \pm\sqrt{3}\,x$

تابع : السؤال الثاني :

(b) لتكن الدالة f : $f(x) = \dfrac{x+17}{2x^2+5x-3}$

فأوجد :

1) الكسور الجزئية .

2) $\int f(x)\,dx$

(9 درجات)

الحل:

1) نحلل المقام : $2x^2+5x-3 = (2x-1)(x+3)$ 1

$$\frac{x+17}{2x^2+5x-3} = \frac{A_1}{2x-1} + \frac{A_2}{x+3}$$ 1

$$x+17 = A_1(x+3) + A_2(2x-1)$$ 1

عوض عن x بـ $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}+17 = A_1\left(\frac{1}{2}+3\right) + A_2\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-1\right) \rightarrow A_1 = 5$$ 1

عوض عن x بـ -3:

$$-3+17 = A_1(-3+3) + A_2(2(-3)-1) \rightarrow A_2 = -2$$ 1

$$\frac{x+17}{2x^2+5x-3} = \frac{5}{2x-1} - \frac{2}{x+3}$$ 1

2) $$\int \frac{x+17}{2x^2+5x-3}\,dx = \int \left(\frac{5}{2x-1} - \frac{2}{x+3}\right) dx$$ $\frac{1}{2}$

$$= \int \frac{5}{2x-1}\,dx - \int \frac{2}{x+3}\,dx$$

$$= 5\int \frac{1}{2x-1}\,dx - 2\int \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$= \frac{5}{2}\ln|2x-1| - 2\ln|x+3| + C$$ $2\frac{1}{2}$

السؤال الثالث :

(a) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي: $3x^2 - 4x + 1$ ويمر بالنقطة $A(1, 2)$

(6 درجات)

الحل:

$$\because f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$ $\frac{1}{2}$

$$\therefore f(x) = \int (3x^2 - 4x + 1)\, dx$$ $\frac{1}{2}$

$$f(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + x + C$$ 2

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + C$$ 1

لتعيين قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $A(1, 2)$ في المعادلة السابقة

فنحصل على : $2 = (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + C$ 1

$$2 = 1 - 2 + 1 + C$$

$$C = 2$$ $\frac{1}{2}$

معادلة المنحنى f المطلوب هي :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$$ $\frac{1}{2}$

تابع : السؤال الثالث :

(b) استخدم التعويض المناسب لايجاد التكامل :

$$\int x^3\sqrt{x^2-2}\,dx$$

(9 درجات)

الحل:

$u = x^2 - 2 \implies x^2 = u + 2$	$1+1$
$du = 2x\,dx \implies x\,dx = \frac{1}{2}\,du$	$1+1$
$\int x^3\sqrt{x^2-2}\,dx = \int \sqrt{x^2-2}\;x^2(x\,dx)$	
$= \int \sqrt{u}(u+2)\left(\frac{1}{2}du\right)$	1
$= \int \frac{1}{2}\left(u^{\frac{3}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}}\right)du$	1
$= \int \left(\frac{1}{2}\,u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)du$	$\frac{1}{2}$
$= \frac{1}{5}\,u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}} + C$	$1\frac{1}{2}$
$= \frac{1}{5}\,(x^2-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}\,(x^2-2)^{\frac{3}{2}} + C$	1

السؤال الرابع :

(a) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين :

$$y_1 = x^2 + 2 \quad , y_2 = -2x + 5$$

(8 درجات)

الحل:

لإيجاد الاحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

نضع $y_1 = y_2$

1 $x^2 + 2 = -2x + 5$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

1 $x = 1$ أو $x = -3$

∴ يكون التكامل من $x = -3$ إلى $x = 1$ و مساحة المنطقة هي :

$\frac{1}{2}$ $$A = \left|\int_{-3}^{1} (y_2 - y_1)\, dx\right|$$

1 $$A = \left|\int_{-3}^{1} [(-2x + 5) - (x^2 + 2)]\, dx\right|$$

$\frac{1}{2}$ $$= \left|\int_{-3}^{1} [-x^2 - 2x + 3]\, dx\right|$$

$1\frac{1}{2}$ $$= \left|\left[\frac{-x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{-3}^{1}\right|$$

2 $$= \left|\left[\frac{-(1)^3}{3} - (1)^2 + 3(1)\right] - \left[\frac{-(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3(-3)\right]\right|$$

$$= \left|\frac{32}{3}\right|$$

$\frac{1}{2}$ $$= \frac{32}{3} \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

تابع: السؤال الرابع :

(b) عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية ، إذا كان المتغير العشوائي X يعبّر عن "عدد الكتابات"

فأوجد ما يلي :

1) فضاء العينة (S) و عدد عناصره n(S) .

2) مدى المتغيّر العشوائي X .

3) احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغيّر العشوائي X .

4) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X .

(7 درجات)

الحل:

1) فضاء العينة (S)

$1\frac{1}{2}$ S = { (H,H,H) , (H,H,T) , (H,T,H) , (T,H,H) , (H,T,T) , (T,H,T), (T,T,H) ,(T,T,T) }

$\frac{1}{2}$ n(S) = 8

(2

عناصر فضاء العينة	عدد الكتابات في كل عنصر
(H,H,H)	0
(H,H,T)	1
(H,T,H)	1
(T,H,H)	1
(H,T,T)	2
(T,H,T)	2
(T,T,H)	2
(T,T,T)	3

1 ∴ مدى المتغيّر العشوائي : X = { 0 , 1 , 2 , 3 }

$\frac{1}{2}$ 3) $P(X=0)=\frac{1}{8}$

$\frac{1}{2}$ $P(X=1)=\frac{3}{8}$

$\frac{1}{2}$ $P(X=2)=\frac{3}{8}$

$\frac{1}{2}$ $P(X=3)=\frac{1}{8}$

4) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

2

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

القسم الثاني البنود الموضوعية (لكل بند درجة واحدة)

في البنود من (1) إلى (3) عبارات لكل بند في ورقة الإجابة ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة ,
(b) إذا كانت العبارة خاطئة .

(1) $\int_{-1}^{1}(|x|)^3 dx = -\frac{1}{2}$

(2) إذا كانت $y^2 = -\frac{1}{6}x$ معادلة قطع مكافئ ،فإن خط التماثل هو محور السينات

(3) المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي الواحد .

في البنود من(4) إلى (10) لكل بند أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح – اختر الإجابة الصحيحة ثم ظلل في ورقة الإجابة دائرة الرمز الدال عليها.

(4) إذا كان: $\int_{3}^{-1} g(x)dx = 2$, $\int_{-1}^{3} f(x)dx = 4$ فإن $\int_{-1}^{3}(2f(x) + 3g(x) + 1)dx$ تساوي

(a) 18 (b) -6 (c) 6 (d) 12

(5) إذا كانت $y = \ln\left(\frac{10}{x}\right)$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي

(a) $-\frac{10}{x}$ (b) $\frac{10}{x}$ (c) $\frac{1}{x}$ (d) $-\frac{1}{x}$

(6) $\int \frac{2 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} dx$ يساوي

(a) $x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

(b) $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

(c) $x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

(d) $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

(7) حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 5$ هو:

ⓐ $y = 2\,e^{\frac{5}{2}}$

ⓑ $y = \dfrac{2}{e^{\frac{5}{2}}}$

ⓒ $y = 2\,e^{\left(-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)} + 1$

ⓓ $y = 2\,e^{\left(-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)} + 1$

---

(8) الاختلاف المركزي للمعادلة $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ هو:

ⓐ $\dfrac{\sqrt{11}}{6}$

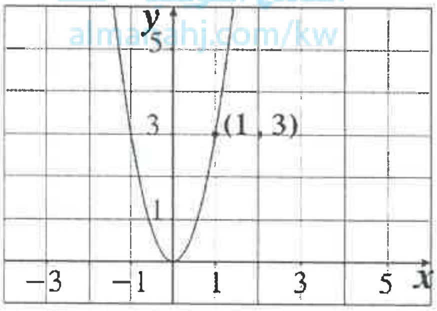
ⓑ $\dfrac{\sqrt{11}}{5}$

ⓒ $\dfrac{36}{25}$

ⓓ $\dfrac{25}{36}$

---

(9) بؤرة القطع المكافئ في الشكل المقابل هي:



ⓐ $\left(0, \dfrac{-4}{3}\right)$

ⓑ $\left(\dfrac{9}{20}, 0\right)$

ⓒ $\left(0, \dfrac{1}{12}\right)$

ⓓ $\left(\dfrac{1}{12}, 0\right)$

---

(10) إذا كان X متغيراً عشوائياً متقطعاً دالة التوزيع الاحتمالي f هي :

x	0	1	2
$f(x)$	0.25	0.50	0.25

فإن التوقع له يساوي :

ⓐ 1.25

ⓑ 1.5

ⓒ 0.5

ⓓ 1

تمت الأسئلة مع التمنيات بالتوفيق

إجابة الأسئلة الموضوعية

رقم السؤال	الإجابة			
1	a	**b**		
2	**a**	b		
3	**a**	b		
4	a	b	**c**	d
5	a	b	c	**d**
6	a	**b**	c	d
7	a	b	**c**	d
8	**a**	b	c	d
9	a	b	**c**	d
10	a	b	c	**d**

10

توقيع المصحح :

توقيع المراجع :