• التكامل غير المحدد للدالة f بالنسبة إلى x يكتب $\int f(x)\,dx$ ويساوي $F(x)+C$ حيث $F(x)$ هي المشتقة العكسية و C ثابت التكامل.

• جدول صيغ التكامل:

قاعدة المشتقّة	التكامل غير المحدد
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n \quad , \quad n\neq -1$	1 $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \;,\; n\neq -1$
$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)=\sin kx$	2 $\int \sin kx\,dx=-\frac{\cos kx}{k}+C$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right)=\cos kx$	3 $\int \cos kx\,dx=\frac{\sin kx}{k}+C$
$\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$	4 $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$
$\frac{d}{dx}(-\cot x)=\csc^2 x$	5 $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$
$\frac{d}{dx}\sec x=\sec x\tan x$	6 $\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C$
$\frac{d}{dx}(-\csc x)=\csc x\cot x$	7 $\int \csc x\cot x\,dx=-\csc x+C$

قاعدة التكامل بالتعويض $\int f(g(x))g'(x)\,dx=F(g(x))+C$

• خواص التكامل غير المحدد

a $\int (f(x)\pm g(x))\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$

b $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$

c $\int -f(x)\,dx=-\int f(x)\,dx$

d $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+C$

e $\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx=e^{f(x)}+C$

جدول تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

قاعدة المشتقّة	التكامل غير المحدد
$\frac{d}{dx}e^x=e^x$	$\int e^x\,dx=e^x+C$
$\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}=u'e^u$	$\int u'e^u\,dx=e^u+C$
$\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$
$\frac{d}{dx}\ln|u|=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u}\,dx=\ln|u|+C$

- التكامل بالتجزيء: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ حيث u , v دالتين في x قابلتين للتفاضل.
- الكسور الجزئية

تفكيك $\frac{r(x)}{h(x)}$ إلى كسور جزئية.

لكل عامل من $h(x)$ على الصورة $(mx+n)^k$، يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها k :

$$\frac{A_1}{mx+n}+\frac{A_2}{(mx+n)^2}+\dots+\frac{A_k}{(mx+n)^k}$$

لاحظ أنه في حالة $k=1$، فإنه يوجد حد واحد فقط في المجموع.

- تفكيك $\frac{r(x)}{h(x)}$ إلى كسور جزئية

حلّل المقام وحدّد العوامل الخطية لِـ $h(x)$.

- التكامل المحدد

- $\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$
- $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du (u=g(x) \;;\; du = g'(x)\,dx)$

1 إذا f دالة متصلة وموجبة على $[a,b]$، $a<b$، فإن $\int_a^b f(x)\,dx$ يمثل المساحة المحددة بمنحنى الدالة f، ومحور السينات، والمستقيمين ذات المعادلتين $x=a$, $x=b$.

2 إذا f دالة متصلة وسالبة على $[a,b]$، $a<b$، فإن $-\int_a^b f(x)\,dx$ يمثل المساحة المحددة بمنحنى الدالة f، ومحور السينات، والمستقيمين ذات المعادلتين $x=a$, $x=b$.

- خواص التكامل المحدد

f دالة متصلة على $[a,b]$

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
3. $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$
4. $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
5. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \;;\; c\in[a,b]$
6. $f(x)\geqslant 0 \;\forall\; x\in[a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$
7. $f(x)\leqslant 0 \;\forall\; x\in[a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$
8. f ، g دالتان متصلتان على $[a,b]$ وإذا كان: $f(x)\leqslant g(x) \forall\, x\in[a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

ملخص

- مساحة منطقة محددة بمنحنى دالة f متصلة في فترة $[a,b]$ ومحور السينات والمستقيمين: $x=a$ ، $x=b$ هي:

$$A=\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{حيث} \quad f(x)\geq 0$$
$$A=-\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{حيث} \quad f(x)\leq 0$$

- إذا كان $f(x)\leq 0$ على الفترة $[a,c]$ و $f(x)\geq 0$ على الفترة $[c,b]$ فإن: $A=\left|\int_a^c f(x)\,dx\right|+\left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$

- إذا كانت كل من f ، g متصلتين في الفترة $[a,b]$ وكانت $f(x)\geq g(x)$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين والمستقيمين $x=a$ ، $x=b$ هي: $A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$

- إذا تحددت منطقة بين منحنيات متقاطعة فإن نقاط التقاطع هي حدود التكامل.

- إذا تحددت منطقة بأكثر من دالة ولا يوجد تكامل مفرد يعطي المساحة فيمكن تجزيء هذه المنطقة إلى مناطق تناظر تغيرات كل دالة ونتابع العمل.

- إذا نتج مجسم عن دوران منطقة مستوية محددة بمنحنيي الدالتين $f\,,\,g$ دورة كاملة حول محور السينات بحيث $f\,,\,g$ لهما الإشارة نفسها في الفترة $[a,b]$ فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة: $V(x)=\pi\int_a^b [(f(x))^2-(g(x))^2]\,dx$ وذلك في الحالتين: $f(x)\geq g(x)\geq 0$ أو $f(x)\leq g(x)\leq 0$.

- إذا نتج مجسم عن دورة منطقة مستوية محددة بمنحنى دالة واحدة f دورة كاملة حول محور السينات في الفترة $[a,b]$ فإن حجم المجسم يعطى بالقاعدة: $V(x)=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$.

- كل نقطة على منحنى دالة ينتج عنها مقطع دائري في دورة كاملة حول محور السينات.

- يمكن إيجاد معادلة منحنى دالة بمعلومية ميل المماس على المنحنى ومعلومية نقطة محددة يمر بها هذا المنحنى.

- نستخدم المشتقة الثانية للدالة f لدراسة القيم القصوى والقيم العظمى لمنحنى الدالة.

- نستخدم المشتقة الثانية للدالة f لإيجاد نقطة انعطاف منحنى الدالة.

- تساعدنا القاعدة: $L=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ على إيجاد طول قوس على منحنى دالة في الفترة $[a,b]$.

- رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.

- درجة المعادلة التفاضلية هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.

- يمكن حل المعادلات التفاضلية بفصل المتغيرات: $\frac{1}{h(y)}dy=g(x)\,dx$ ثم نكامل.

- حل المعادلة التفاضلية: $y'=ay$ هو $y=ke^{ax}$.

- حل المعادلة التفاضلية: $y'=ay+b$ هو $y=ke^{ax}-\frac{b}{a}$.

- قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل $(0, 0)$

<table>
<tr><td>الصورة العامة</td><td colspan="2">$x^2 = 4py$</td><td colspan="2">$y^2 = 4px$</td></tr>
<tr><td>الفتحة</td><td colspan="2">إلى أعلى أو إلى أسفل</td><td colspan="2">إلى اليمين أو إلى اليسار</td></tr>
<tr><td>إشارة p</td><td>$p < 0$</td><td>$p > 0$</td><td>$p < 0$</td><td>$p > 0$</td></tr>
<tr><td>البؤرة</td><td colspan="2">$(0, p)$</td><td colspan="2">$(p, 0)$</td></tr>
<tr><td>الدليل</td><td colspan="2">$y = -p$</td><td colspan="2">$x = -p$</td></tr>
<tr><td>محور التناظر</td><td colspan="2">محور الصادات $(y-axis)$</td><td colspan="2">محور السينات $(x-axis)$</td></tr>
<tr><td>المسافة من الرأس إلى البؤرة</td><td colspan="4" rowspan="2">$|p|$</td></tr>
<tr><td>المسافة من الرأس إلى الدليل</td></tr>
</table>

- **القطع الناقص:**

- **تعريف:** القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتًا.
- معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل $(0, 0)$ كالتالي:

<table>
<tr><td rowspan="2">المعادلة</td><td>$a > b > 0$</td><td>$a > b > 0$</td></tr>
<tr><td>$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$</td><td>$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$</td></tr>
<tr><td>المحور الأكبر</td><td>ينطبق على محور السينات</td><td>ينطبق على محور الصادات</td></tr>
<tr><td>الرأسان طرفا المحور الأكبر</td><td>$A_1(-a, 0)\ ,\ A_2(a, 0)$</td><td>$A_1(0, -a)\ ,\ A_2(0, a)$</td></tr>
<tr><td>طول المحور الأكبر</td><td colspan="2">$2a$</td></tr>
<tr><td>طرفا المحور الأصغر</td><td>$B_1(0, -b)\ ,\ B_2(0, b)$</td><td>$B_1(-b, 0)\ ,\ B_2(b, 0)$</td></tr>
<tr><td>طول المحور الأصغر</td><td colspan="2">$2b$</td></tr>
<tr><td>البؤرتان</td><td>$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$</td><td>$F_1(0, -c)\ ,\ F_2(0, c)$</td></tr>
<tr><td>العلاقة الأساسية</td><td colspan="2">$a^2 = b^2 + c^2$</td></tr>
<tr><td>معادلتا الدليلين</td><td>$x = -\frac{a^2}{c}\ ,\ x = \frac{a^2}{c}$</td><td>$y = -\frac{a^2}{c}\ ,\ y = \frac{a^2}{c}$</td></tr>
<tr><td>التناظر</td><td colspan="2">القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه ومركزه</td></tr>
</table>

■ **القطع الزائد:**

- **تعريف:** القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوي ثابتًا.
- **معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل كالتالي:**

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$c^2=a^2+b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه ومركزه	

■ **الاختلاف المركزي:**

- **تعريف:** القطع المخروطي هو مجموعة كل النقاط في المستوى الإحداثي حيث تكون نسبة بعد كل منها من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) في نفس المستوى تساوي مقدارًا ثابتًا.

هذا المقدار الثابت يسمى الاختلاف المركزي للقطع المخروطي ويرمز إليه بالرمز e.

- في القطع المكافئ: $e=1$
- في القطع الناقص: $e=\frac{c}{a}<1$
- في القطع الزائد: $e=\frac{c}{a}>1$

ملخص

المتغيّر العشوائي: هو دالة مجالها فضاء العينة S ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}$ ومداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ حيث $X : S \to \mathbb{R}$

(X هو المتغير العشوائي، S فضاء العينة، $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية).

- يكون المتغير العشوائي X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له (المدى) $X(S)$: هي مجموعة متقطعة أي قابلة للعد، من الأعداد الحقيقية سواء أكانت منتهية أم غير منتهية.
- إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه $\{x_1 , x_2 , x_3 , ...\}$، فإن دالة التوزيع الاحتمالي f تعرّف كالتالي:

$$f(x_i) = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, 3, 4, ...$$

- دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X تحقق الشرطين:

1. $0 \leq f(x) \leq 1$
2. مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي f تساوي الواحد الصحيح،
   أي أن: $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... = 1$

- إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f،
  مدى $X = \{x_1 , x_2 , x_3 , ...\}$
  فإن التوقع للمتغير العشوائي X يكون:
  التوقع: $\mu = \sum x_i \, f(x_i)$
  أي أن: $\mu = x_1 \, f(x_1) + x_2 \, f(x_2) + x_3 \, f(x_3) + ...$

- إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي f، فإن التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:
  التباين: $\sigma^2 = \sum x_i^2 \, f(x_i) - \mu^2$ حيث μ هو التوقع.
  الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\text{التباين}}$

- دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a
  هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a. أي أن:

1. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
2. $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$
3. $P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

- يمكن تحويل التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري باستخدام:

1. القيمة المعيارية المناظرة للقيمة a: $z_1 = \dfrac{a - \mu}{\sigma}$
2. القيمة المعيارية المناظرة للقيمة b: $z_2 = \dfrac{b - \mu}{\sigma}$

- التوقع للتوزيع الاحتمالي المنتظم: $\mu = \dfrac{a + b}{2}$
- التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم: $\sigma^2 = \dfrac{(b - a)^2}{12}$