

تم تحميل هذا الملف من موقع ملفات الكويت التعليمية



[com.kwedufiles.www//:https](https://www.kwedufiles.com)

*للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف العاشر اضغط هنا

<https://kwedufiles.com/10>

* للحصول على جميع أوراق الصف العاشر في مادة رياضيات وجميع الفصول, اضغط هنا

<https://kwedufiles.com/10math>

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف العاشر في مادة رياضيات الخاصة بـ الفصل الأول اضغط هنا

<https://www.kwedufiles.com/10math1>

* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للصف العاشر اضغط هنا

<https://www.kwedufiles.com/grade10>

[bot_kwlinks/me.t//:https](https://me.t/bot_kwlinks)

للحصول على جميع روابط الصفوف على تلغرام وفيسبوك من قنوات وصفحات: اضغط هنا

الروابط التالية هي روابط الصف العاشر على مواقع التواصل الاجتماعي

مجموعة الفيسبوك

صفحة الفيسبوك

مجموعة التلغرام

بوت التلغرام

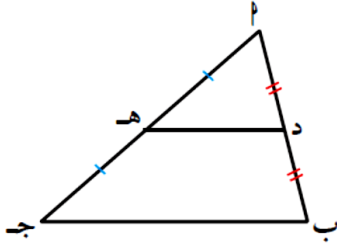
قناة التلغرام

رياضيات على التلغرام

المنهج التكميلي للصف العاشر

نظرية :

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع .

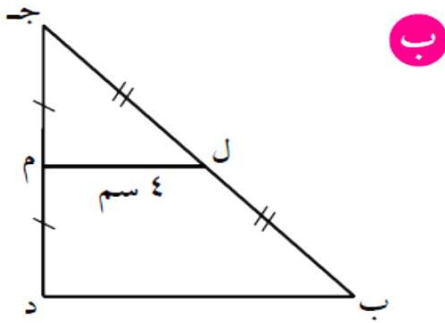


في المثلث \triangle ب ج د :

\therefore د منتصف \overline{PB} ، ه منتصف \overline{PG}
 \therefore $\overline{DH} \parallel \overline{BG}$ ، $DH = \frac{1}{2} BG$

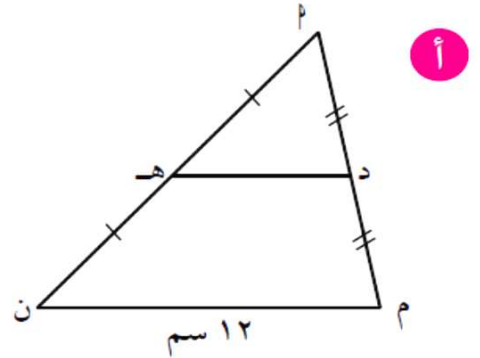
تدرّب (١) :

في كلٍّ من المثلثات التالية أكمل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



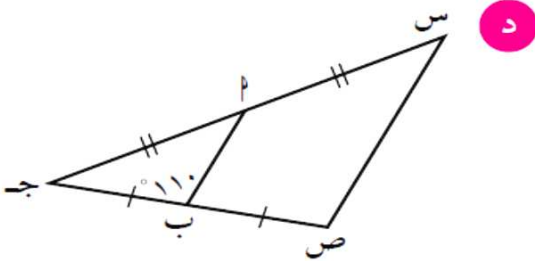
ب

ب د =



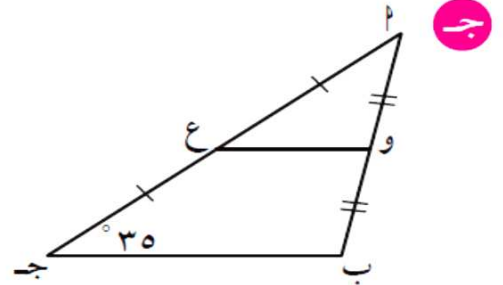
أ

د ه =



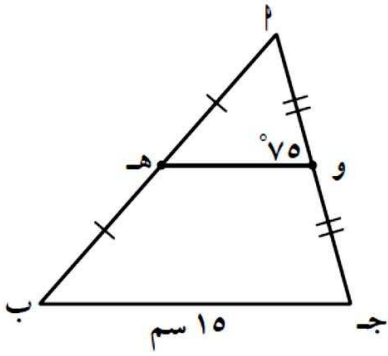
د

ن (ص) =



ج

ن (ع و) =



مثال (١) :

في الشكل المقابل Δ ب ج د مثلث فيه :

Δ و = و ج ، Δ هـ = هـ ب ، ب ج د = ١٥ سم ،

و $(\Delta \text{ و هـ}) = 75^\circ$.

أوجد بالبرهان : (١) طول و هـ (٢) $(\Delta \text{ ج د})$.

الحل :

المعطيات : Δ و = و ج ، Δ هـ = هـ ب ، ب ج د = ١٥ سم ،

و $(\Delta \text{ و هـ}) = 75^\circ$

المطلوب : إيجاد (١) طول و هـ (٢) $(\Delta \text{ ج د})$

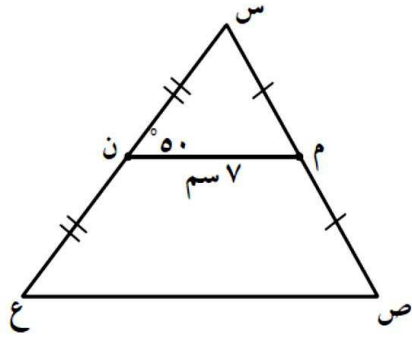
البرهان : في Δ ب ج د :

:: و منتصف Δ ج د ، هـ منتصف Δ ب ج

:: و هـ = $\frac{1}{2}$ ج ب ، و هـ // ج ب

$$\text{و هـ} = 15 \times \frac{1}{2} = 7 \frac{1}{2} \text{ سم}$$

:: $(\Delta \text{ ج د}) = (\Delta \text{ و هـ}) = 75^\circ$ (بالتناظر والتوازي)



تدرّب (٢) :

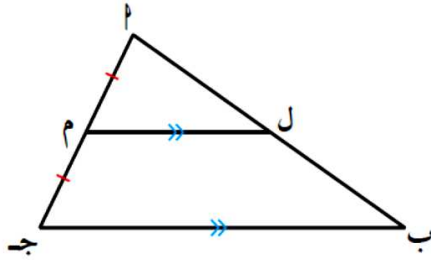
س ص ع مثلث فيه :

م منتصف س ص ، ن منتصف س ع ،
 $\angle س = 50^\circ$ ، $م ن = 7$ سم .

أوجد بالبرهان : (١) ص ع (٢) $\angle ع$.

نظرية :

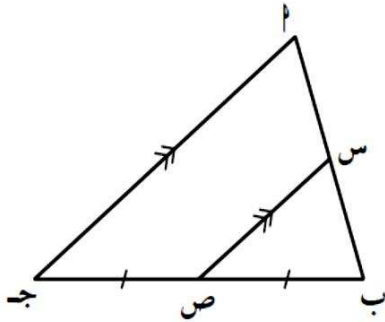
إذا رُسم مستقيم من منتصف أحد أضلاع مثلث موازيًا ضلعًا آخر فيه ، فإنه ينصف الضلع الثالث .



في المثلث Δ ب ج د :

\therefore م منتصف Δ ب ج د ، $\overline{ل م} \parallel \overline{ب ج د}$

\therefore ل منتصف Δ ب ج د



تدرّب (٥) :

Δ ب ج د مثلث فيه : ص منتصف Δ ب ج د ،

ص س \parallel ج د ، Δ س = Δ سم .

أوجد بالبرهان ب س .

المعطيات :

المطلوب :

البرهان : في المثلث Δ ب ج د :

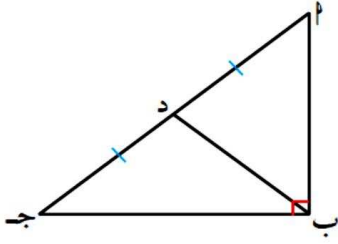
\therefore ص منتصف Δ ب ج د ، $\overline{ص س} \parallel \overline{ج د}$

\therefore س منتصف Δ ب ج د

\therefore ب س = Δ س = Δ سم

نظرية :

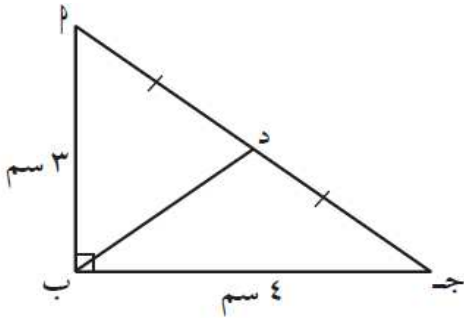
طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر .



في المثلث ا ب ج :

$$\therefore \angle \text{ب} = 90^\circ, \text{ د منتصف ا ج}$$

$$\therefore \text{ب د} = \frac{1}{2} \text{ ا ج}$$



مثال (١) :

ا ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، ا ب = ٣ سم ،
ب ج = ٤ سم ، د منتصف ا ج .
أوجد بالبرهان طول ب د .

الحل :

المعطيات : ا ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، ا ب = ٣ سم ،

ب ج = ٤ سم ، د منتصف ا ج .

المطلوب : إيجاد طول ب د .

البرهان : \therefore ا ب ج مثلث قائم الزاوية في ب

(نظرية فيثاغورث)

$$\therefore (\text{ا ج})^2 = (\text{ا ب})^2 + (\text{ب ج})^2$$

$$= 3^2 + 4^2 =$$

$$= 9 + 16 = 25$$

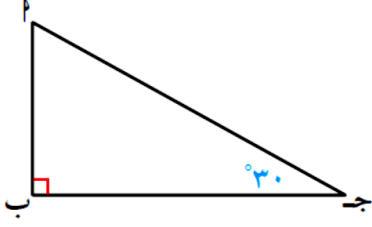
$$\therefore \text{ا ج} = \sqrt{25} = 5 \text{ سم}$$

\therefore د منتصف ا ج

$$\therefore \text{ب د} = \frac{1}{2} \text{ ا ج}$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 = 2 \frac{1}{2} \text{ سم}$$

نتيجة (١) : في المثلث الثلاثيني السّتيني يكون طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها 30° مساويًا نصف طول الوتر .



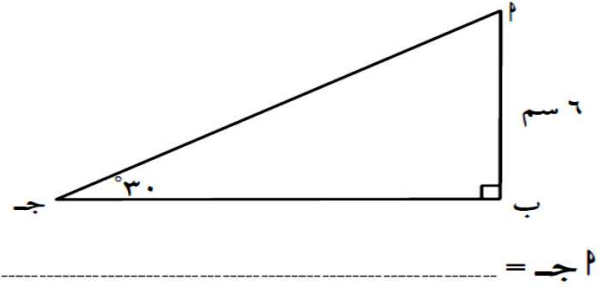
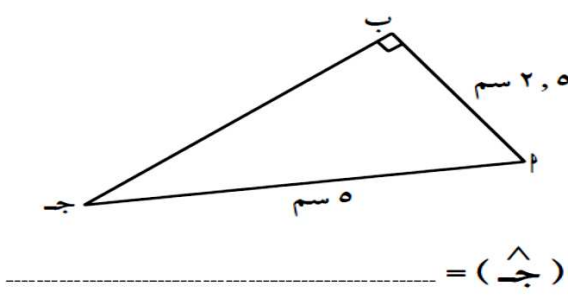
\therefore $٢ ب ج =$ مثلث قائم الزاوية في ب ، $\cup (\hat{ج}) = 30^\circ$

$$\therefore ٢ ب = \frac{١}{٢} ج$$

وعكس ذلك أيضًا صحيح :

تدرّب (٣) :

أكمل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



مثال (٢) :

في الشكل المقابل :

أوجد بالبرهان : (١) $\cup (\hat{ج})$ (٢) $\cup (\hat{پ})$.

الحل :

المعطيات : $٢ ب ج =$ مثلث قائم الزاوية في ب ، $٤ سم = ب ج$ ،

$ب د = ٤ سم$ ، د منتصف $\overline{ج پ}$.

المطلوب : إيجاد (١) $\cup (\hat{ج})$ (٢) $\cup (\hat{پ})$.

البرهان : \therefore المثلث $٢ ب ج$ قائم الزاوية في ب ، د منتصف $\overline{ج پ}$

$$\therefore ب د = \frac{١}{٢} ج$$

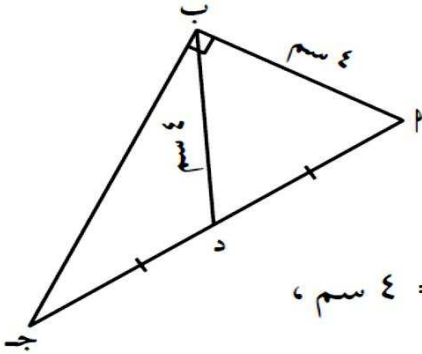
$$\therefore ٢ ب ج = ٤ \times ٢ = ٨ سم$$

$$\therefore ٢ ب = \frac{١}{٢} ج$$

$$\therefore \cup (\hat{ج}) = 30^\circ$$

\therefore $٢ ب ج =$ مثلث ثلاثيني ستيني

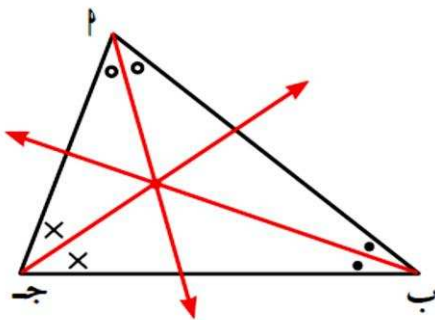
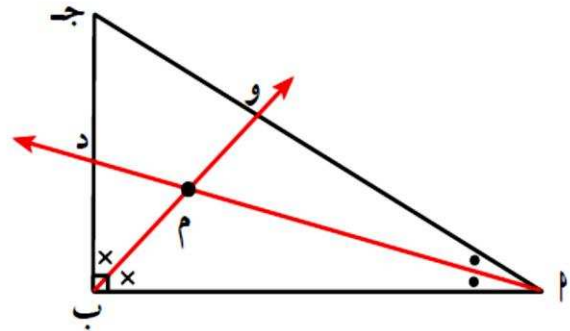
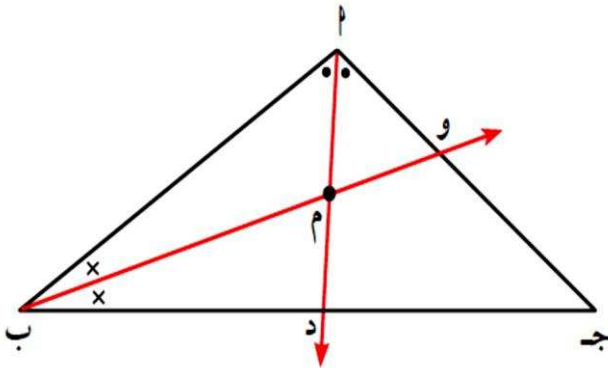
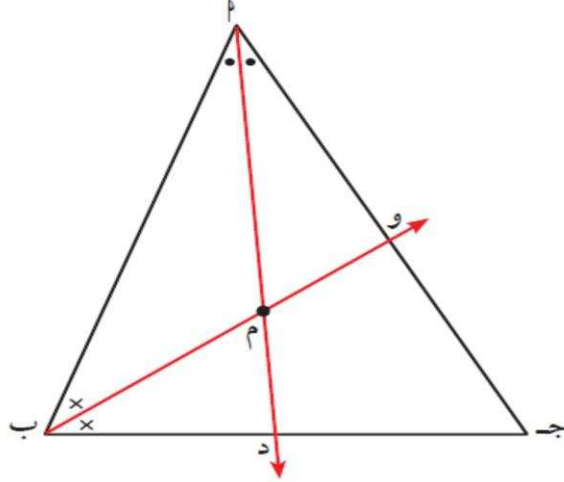
$$\therefore \cup (\hat{پ}) = 60^\circ$$



منصّفات الزوايا الداخلية للمثلث

في المثلثات التالية :

\overrightarrow{AD} منصّف الزاوية $\angle B$ ، \overrightarrow{BE} منصّف الزاوية $\angle C$ ، \overrightarrow{CF} منصّف الزاوية $\angle A$ ، $\{M\} = \overrightarrow{AD} \cap \overrightarrow{BE} \cap \overrightarrow{CF}$



نظرية :

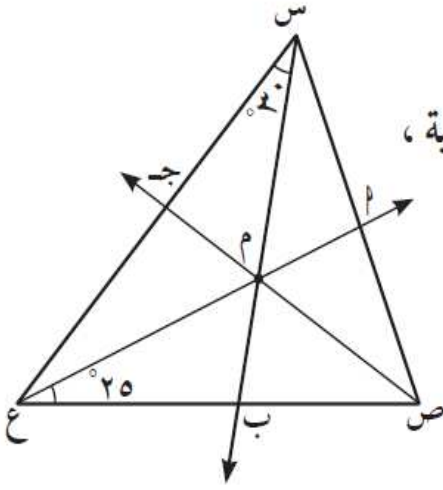
منصّفات الزوايا الداخلية للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة .

نتيجة : نقطة تقاطع منصّفات الزوايا الداخلية للمثلث على أبعاد متساوية من أضلاعه .

\therefore م نقطة تقاطع منصّفات الزوايا الداخلية للمثلث

\therefore $MA = MB = MC$

مثال (١) :



Δ س ص ع فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،

إذا كان $\angle م ع ص = 25^\circ$ ، $\angle م س ع = 30^\circ$ ،

فأوجد بالبرهان كلاً مما يلي :

(١) $\angle م ص ع$ (٢) $\angle م ص ع$

الحل :

المعطيات : م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث س ص ع ،

$\angle م ع ص = 25^\circ$ ، $\angle م س ع = 30^\circ$

المطلوب : إيجاد (١) $\angle م ص ع$ (٢) $\angle م ص ع$

البرهان : \because م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث س ص ع

$\therefore \angle م ع ص$ منصف $\angle ع$

$\therefore \angle م ص ع = 2 \times 25 = 50^\circ$

وبالمثل $\angle م س ع$ منصف $\angle س$

$\therefore \angle م ص ع = 2 \times 30 = 60^\circ$

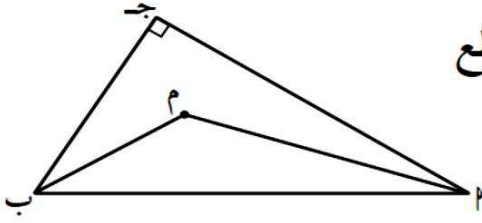
\therefore مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية يساوي 180°

$\therefore \angle م ص ع = (60^\circ + 50^\circ) - 180^\circ = 70^\circ$

$\therefore \angle م ص ع$ منصف $\angle ص$

$\therefore \angle م ص ع = 70^\circ \div 2 = 35^\circ$

مثال (٢) :



Δ $\hat{A}B$ جـ قائم الزاوية في جـ ، إذا كانت م هي نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ، فأوجد بالبرهان \hat{M} (ب) .

الحل :

المعطيات : Δ $\hat{A}B$ جـ قائم الزاوية في جـ ،

م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية .

المطلوب : إيجاد \hat{M} (ب)

البرهان : في Δ $\hat{A}B$ جـ :

\therefore مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية يساوي 180°

$$\therefore \hat{M} + (\hat{A}B) + (\hat{A}C) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

\therefore م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث $\hat{A}B$ جـ

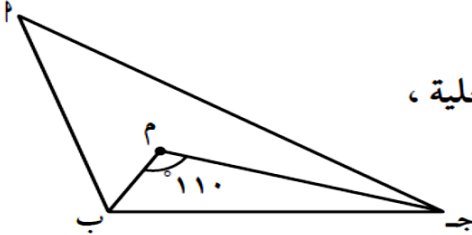
$$\therefore \hat{M} + (\hat{A}B) + (\hat{A}C) = \frac{1}{2} [(\hat{A}B) + (\hat{A}C)]$$

$$45^\circ = 90^\circ \times \frac{1}{2} =$$

\therefore في Δ $\hat{A}B$ م :

$$\hat{M} = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

تدرّب (٤) :



Δ $\hat{A}B$ جـ فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية ،

إذا كان $\hat{M} = 110^\circ$.

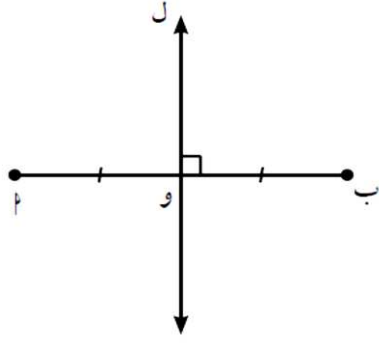
فأوجد بالبرهان \hat{A} (ب) .

المعطيات :

المطلوب :

البرهان :

محاوِر أضلاع المثلث



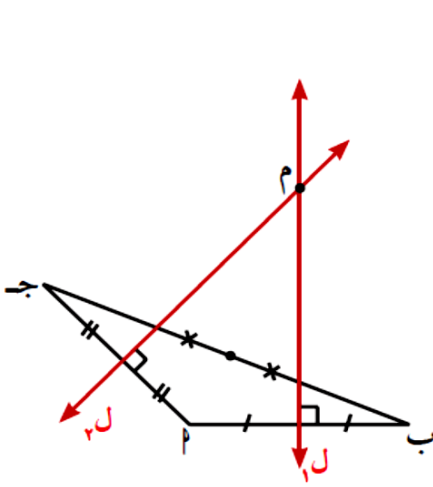
محوِر القطعة المستقيمة هو العمود المنصّف لها .

$\therefore \vec{L} \perp \overline{AB}$ ، $AO = BO$

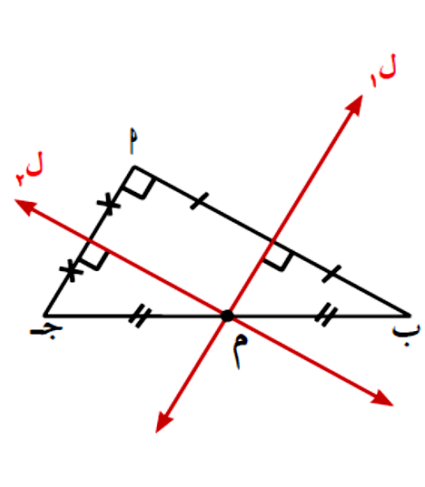
$\therefore \vec{L}$ محوِر \overline{AB}

في المثلثات التالية :

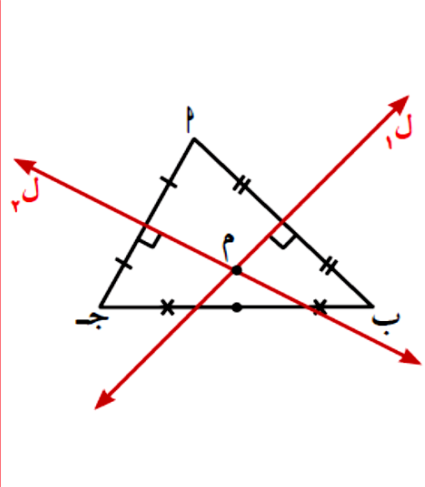
\vec{L}_1 محوِر ، \vec{L}_2 محوِر ، $\vec{L}_1 \cap \vec{L}_2 = \dots\dots\dots$



مثلث منفرج الزاوية



مثلث قائم الزاوية



مثلث حادّ الزوايا

نظرية :

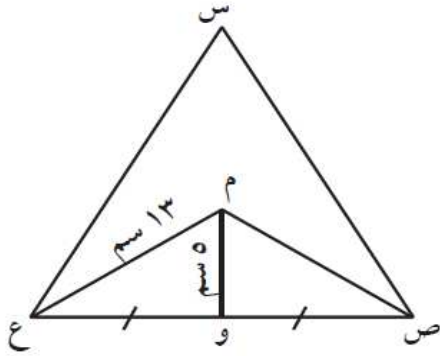
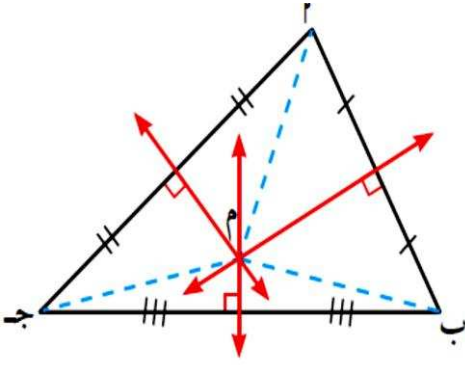
محاوِر أضلاع المثلث تتقاطع في نقطة واحدة .

- نقطة تقاطع محاوِر أضلاع المثلث الحادّ الزوايا تقع **داخله** .
- نقطة تقاطع محاوِر أضلاع المثلث القائم الزاوية تقع في **منتصف الوتر** .
- نقطة تقاطع محاوِر أضلاع المثلث المنفرج الزاوية تقع **خارجه** .

نتيجة: نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه .

∴ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث أ ب جـ

$$\therefore \text{أ م} = \text{ب م} = \text{جـ م}$$



مثال :

س ص ع مثلث فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،

و منتصف ص ع ، م ع = ١٣ سم ، م و = ٥ سم .

أوجد بالبرهان كلاً مما يلي :

(١) م ص (٢) ص و (٣) ص ع

الحل :

المعطيات : س ص ع مثلث فيه م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،

و منتصف ص ع ، م ع = ١٣ سم ، م و = ٥ سم .

المطلوب : إيجاد كل من : (١) م ص (٢) ص و (٣) ص ع

البرهان : ∴ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث س ص ع

$$\therefore \text{م ص} = \text{م ع} = ١٣ \text{ سم}$$

∴ و منتصف ص ع

$$\therefore \text{م و} \perp \text{ص ع}$$

∴ Δ م ص و قائم الزاوية في و

$$\therefore (\text{ص و})^2 = (\text{م ص})^2 - (\text{م و})^2$$

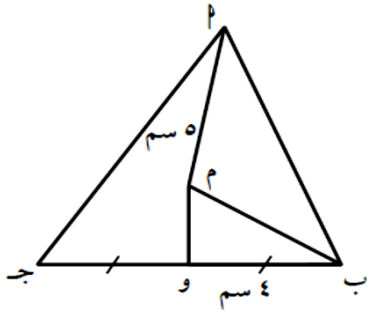
$$\text{ص و} = \sqrt{(\text{م ص})^2 - (\text{م و})^2}$$

$$\text{ص و} = \sqrt{١٣^2 - ٥^2} = \sqrt{١٦٩ - ٢٥} = \sqrt{١٤٤} = ١٢ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ص ع} = ٢ \times \text{ص و}$$

$$= ٢ \times ١٢ = ٢٤ \text{ سم}$$

(نظرية فيثاغورث)



تدرّب (٢) :

Δ AB فيه : M نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ،
 $AM = 5$ سم ، $BM = 4$ سم ، و منتصف B جـ .
 أوجد بالبرهان كلاً مما يلي : (١) M ب (٢) M و .

المعطيات : Δ AB جـ فيه M نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ،

$AM = 5$ سم ، $BM = 4$ سم ، و منتصف B جـ .

المطلوب : إيجاد كلّ مما يلي : (١) M ب (٢) M و

البرهان : M نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث AB جـ

$$\therefore M \text{ ب} = \text{-----} = \text{-----} \text{ سم}$$

$$\therefore \text{و منتصف } B \text{ جـ} \perp \text{-----}$$

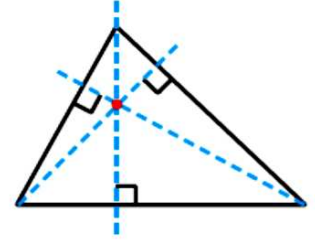
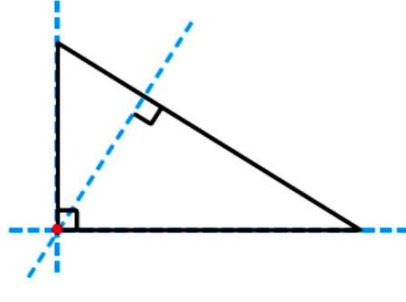
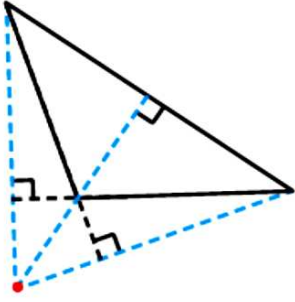
Δ M ب و قائم الزاوية في و

$$\therefore (M \text{ و})^2 = \text{-----} - \text{-----}^2 \quad (\text{نظرية فيثاغورث})$$

$$\text{-----} =$$

$$\therefore M \text{ و} = \text{-----} = \text{-----} \text{ سم}$$

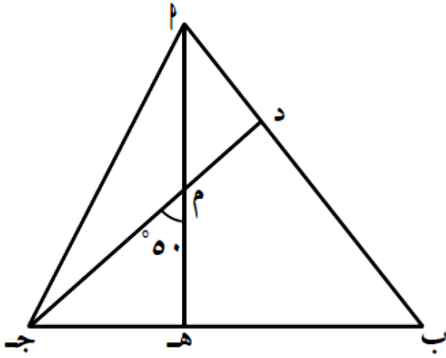
الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه



نظرية :

الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة .

مثال :



أب جـ مثلث فيه : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة
من رؤوس المثلث على أضلاعه ، $\angle \text{جـ م هـ} = 50^\circ$ ،
إذا كان $\text{جـ د} \cap \text{أ هـ} = \{ \text{م} \}$.
فأوجد بالبرهان $\angle \text{ب} \text{ م} \text{ د}$.

الحل :

المعطيات : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ،

$$\angle \text{جـ م هـ} = 50^\circ$$

المطلوب : إيجاد $\angle \text{ب} \text{ م} \text{ د}$.

البرهان : \because م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث أ ب جـ
على أضلاعه

$\therefore \Delta \text{ م هـ جـ}$ قائم الزاوية في هـ

\therefore مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية 180°

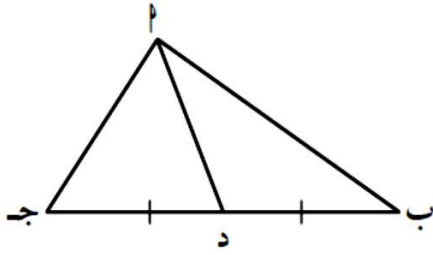
$$\therefore \angle \text{م جـ هـ} = 180^\circ - (90^\circ + 50^\circ) = 40^\circ$$

في $\Delta \text{ جـ د ب}$ القائم الزاوية في د

$$\angle \text{ب} \text{ م} \text{ د} = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ$$

القطع المتوسط للمثلث

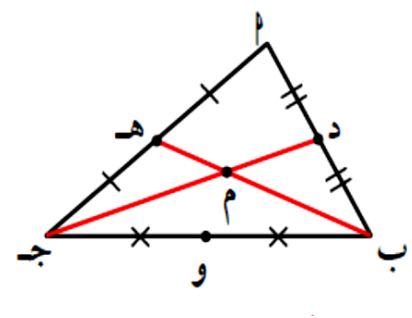
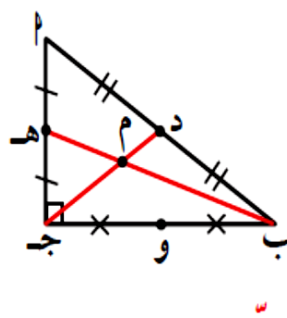
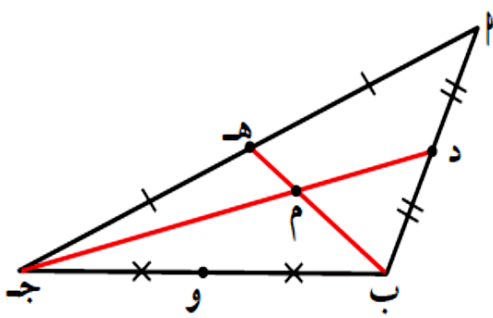
القطعة المستقيمة التي تصل أي رأس للمثلث بمنتصف الضلع المقابل له تسمى قطعة متوسطة للمثلث .



في $\triangle PAB$ جـ :

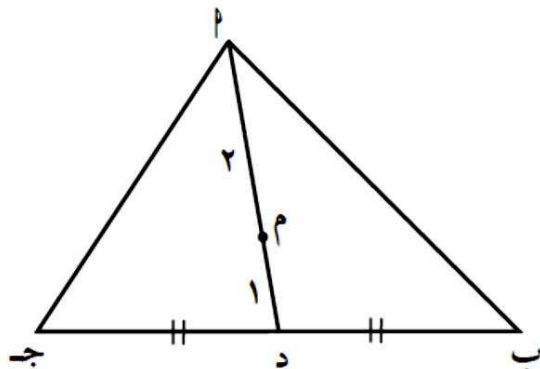
\therefore د منتصف ب جـ

\therefore \overline{AD} قطعة متوسطة للمثلث PAB جـ .



نظرية :

القطع المتوسط للمثلث تتقاطع في نقطة واحدة تقسم كل منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس .



في $\triangle PAB$ جـ :

\overline{AD} قطعة متوسطة ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسط للمثلث .

أكمل :

$$PM = \dots PD$$

$$AM = \dots AD$$

$$DM = \dots PD$$

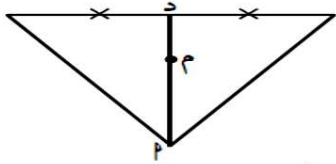
$$AM = \dots AD$$

$$DM = \dots AD$$

$$DM = \dots PM$$

تدرّب (١)

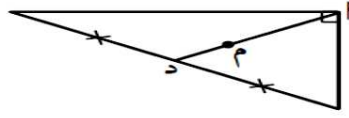
في كلّ من المثلثات التالية : م نقطة تقاطع القطع المتوسطّة ، أكمل ما يلي
(دون استخدام الأدوات الهندسية) :



$$AP = 18 \text{ سم}$$

$$AM = \text{سم}$$

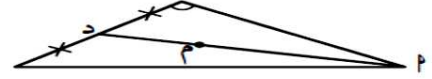
$$PM = \text{سم}$$



$$AP = 4 \text{ سم}$$

$$AM = \text{سم}$$

$$PM = \text{سم}$$

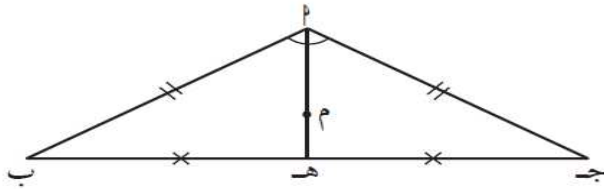


$$PM = 3 \text{ سم}$$

$$AM = \text{سم}$$

$$AP = \text{سم}$$

مثال :



AP جـ مثلث فيه :

$$AP = BJ = 24 \text{ سم} ،$$

$$\angle J = 30^\circ ،$$

م نقطة تقاطع القطع المتوسطّة للمثلث .

أوجد بالبرهان كلّاً من : (١) AP هـ (٢) AM هـ (٣) PM .

الحل :

المعطيات : AP = BJ = 24 سم ، $\angle J = 30^\circ$ ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسطّة في المثلث

المطلوب : إيجاد كلّ من : (١) AP هـ (٢) AM هـ (٣) PM

البرهان : في $\triangle APJ$ جـ :

$$\therefore AP = BJ ، \text{ هـ منتصف جـ ب}$$

$$\therefore AP \perp BJ$$

$$\therefore \angle J = 30^\circ$$

$\therefore \triangle APJ$ هـ ثلاثيني ستيني

$$\therefore AP = \frac{1}{2} BJ$$

$$= 24 \times \frac{1}{2} = 12 \text{ سم}$$

\therefore م نقطة تقاطع القطع المتوسطّة للمثلث AP جـ

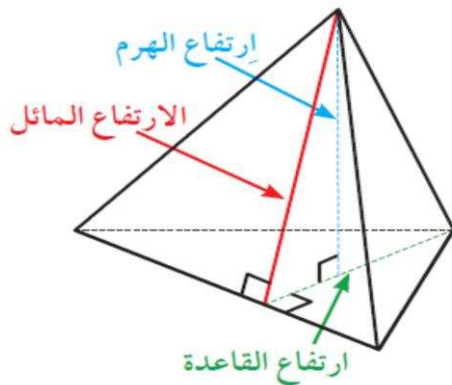
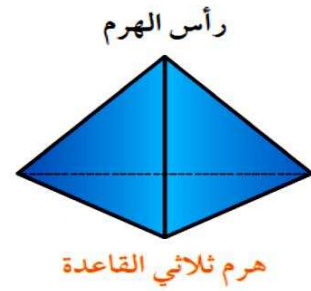
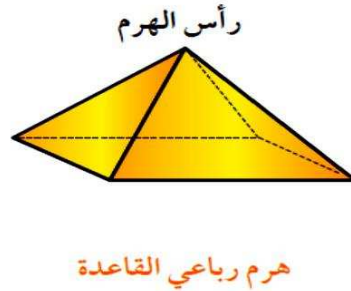
$$AM = \frac{1}{3} AP$$

$$= 12 \times \frac{1}{3} = 4 \text{ سم}$$

$$PM = 2 \text{ هـ}$$

$$= 4 \times 2 = 8 \text{ سم}$$

الهرم المنتظم : مجسم متعدد الأوجه له قاعدة واحدة منتظمة وأوجهه الجانبية الأخرى مثلثات متطابقة تلتقي عند أعلى الهرم في نقطة تُسمى رأس الهرم . يُسمى الهرم بحسب عدد أضلاع قاعدته .



ارتفاع الهرم : هو البعد العمودي من رأس الهرم إلى القاعدة المقابلة .

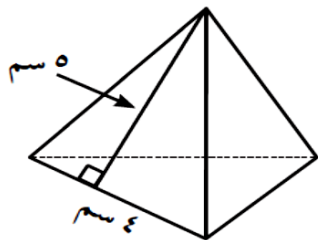
الارتفاع المائل : هو البعد العمودي من رأس الهرم إلى أحد أحرف قاعدة الهرم .

المساحة السطحية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة
 المساحة الجانبية للهرم المنتظم = عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد
 المساحة السطحية للهرم المنتظم = (عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة

تدرب (١) :

هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٤ سم ومساحة قاعدته $4\sqrt{3}$ سم^٢ وارتفاعه المائل ٥ سم ، أوجد مساحته السطحية .

المساحة السطحية للهرم المنتظم = (عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة



مساحة الوجه الواحد = $\frac{1}{2} \times \text{ق} \times \text{ع}$

..... × × $\frac{1}{2}$ =

..... =

..... = مساحة القاعدة

..... + × ٣ = المساحة السطحية للهرم المنتظم

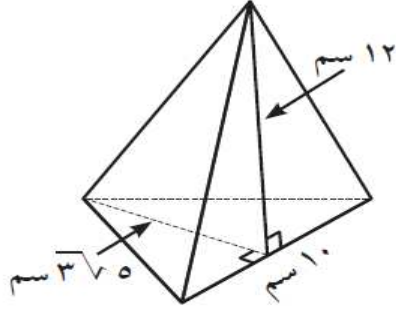
..... (..... +) =

مثال (١) :

هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، وارتفاع قاعدته $٥\sqrt{٣}$ سم ، وارتفاعه المائل ١٢ سم . أوجد مساحته السطحية .

الحل :

المساحة السطحية للهرم المنتظم = (عدد الأوجه \times مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة



$$\text{مساحة الوجه الواحد} = \frac{1}{2} \times \text{ق} \times \text{ع}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 12 =$$

$$= 60 \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحة القاعدة} = \frac{1}{2} \times \text{ق} \times \text{ع}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3} =$$

$$= 25\sqrt{3} \text{ سم}^2$$

$$\text{المساحة السطحية للهرم المنتظم} = 3 \times 60 + 25\sqrt{3} =$$

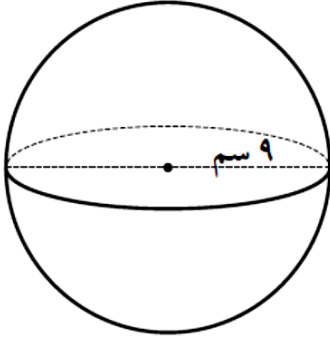
$$= (25\sqrt{3} + 180) \text{ سم}^2$$

حجم الكرة

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \times \text{نق}^3$$

مثال (١) :

أوجد حجم كرة طول نصف قطرها ٩ سم. (بدلالة π)



الحل :

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \times \text{نق}^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi \times (9)^3 =$$

$$= \frac{4}{3} \pi \times 9 \times 9 \times 9 =$$

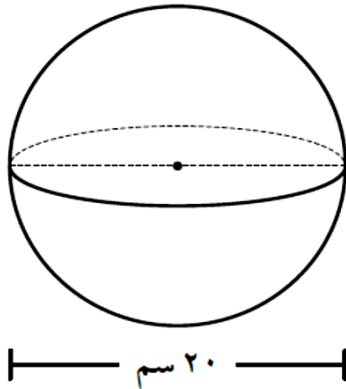
$$= 12 \pi \times 81 =$$

$$= 972 \pi \text{ سم}^3$$

مثال (٢) :

من خلال الشكل المقابل :

أوجد حجم الكرة المرسومة. (اعتبر $\pi = 3,14$)



الحل :

$$\text{نق} = 10 \text{ سم}$$

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi \times \text{نق}^3$$

$$= \frac{4}{3} \times 3,14 \times (10)^3 =$$

$$= \frac{4}{3} \times 3,14 \times 1000 =$$

$$= \frac{4 \times 3140}{3} =$$

$$= \frac{12560}{3} =$$

$$\approx 4186,7 \text{ سم}^3$$