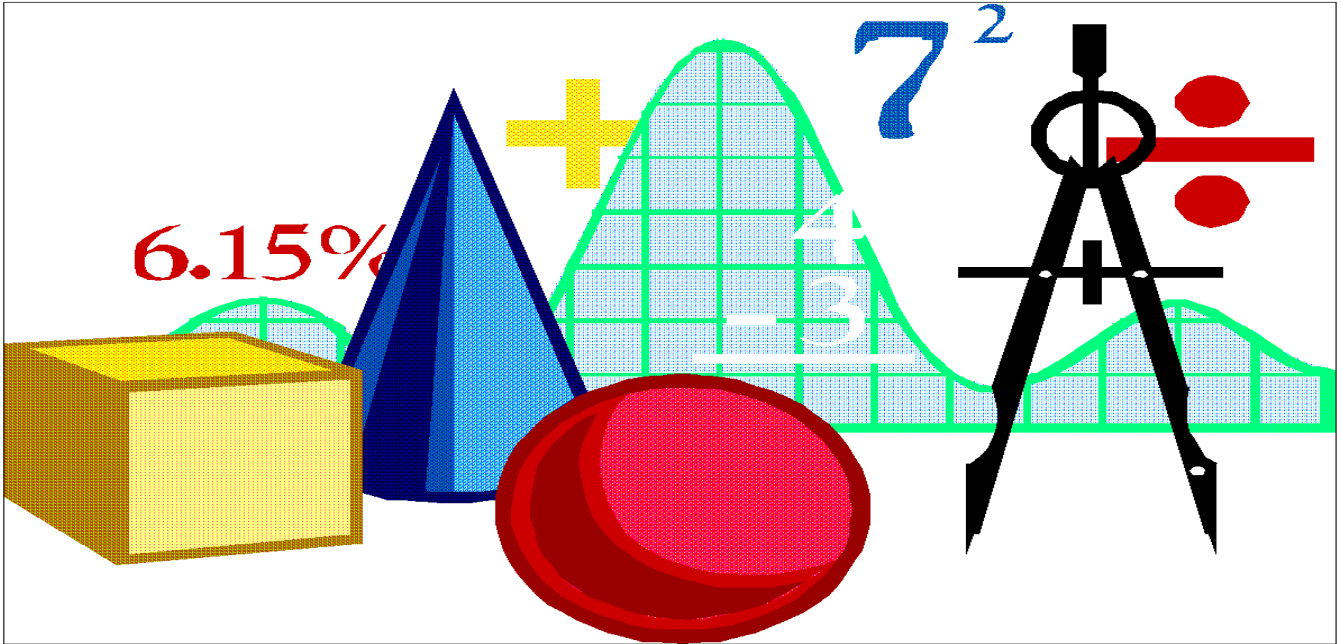


قسم الرياضيات ثانوية المباركية



الصف الثاني عشر علمي حل البنود الموضوعية [الحل مع ذكر السبب] الوحدة الخامسة

بند (1 - 5) التكامل غير المحدد

في التمارين (1-5)، ظلّ الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(a) (b)

$$(1) \quad F(x) = x^{-3} \text{ هي مشتقة العكسية للدالة: } f(x) = -3x^{-4}$$

$$F'(x) = -3x^{-4} = f(x)$$

(a) (b)

$$(2) \quad \int (-x^{-3} + x - 1) dx = \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

$$\int (-x^{-3} + x - 1) dx = -\frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^2}{2} - x + C = \frac{x^{-2}}{2} + \frac{x^2}{2} - x + C$$

(a) (b)

$$(3) \quad \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{x} + C$$

(a) (b)

$$(4) \quad \text{إذا كانت: } f'(x) = \frac{1}{x^2} + x, \quad f(2) = 1, \quad \text{فإن } f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

يمكن التعويض بـ $(x=2)$ إذا كان الناتج لا يساوي 1 فالعبارة خطأ
وإذا كان الناتج يساوي 1 فلا بد من إجراء التكامل وإيجاد قيمة C

$$f(2) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2)^2 + \frac{1}{2} = 2 \neq 1$$

حل آخر باستخدام التكامل

$$f(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} + x \right) dx = \int (x^{-2} + x) dx = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{2} + C = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$f(2) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2)^2 + C = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{-1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

(5) إذا كانت: $F(x) = \int (3x^2 - 12x + 15) dx$, $F(0) = 400$ فإن $F(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 400$ (a) (b)

$$F(0) = 0^3 + 6(0)^2 + 15(0) + 400 = 400$$

لا بد أن نكمل الحل باستخدام التكامل

$$F(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} + 15x + C = x^3 - 6x^2 + 15x + C$$

$$F(0) = 400 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 15x + C = 400 \Rightarrow C = 400$$

$$F(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 400$$

في التمارين (6-12)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

$$(6) \int \frac{4}{3} \sqrt[3]{t^2} dt =$$

(a) $\frac{3t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

(b) $\frac{4t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

(c) $\frac{4}{3} \sqrt[3]{t^5} + C$

(d) $4\sqrt[3]{t^5} + C$

$$\int \frac{4}{3} t^{\frac{2}{3}} dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + C = \frac{4t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$$

$$(7) \int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx =$$

(a) $\frac{3}{5} \sqrt[3]{x} (x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$

(b) $\frac{3}{5} x^{\frac{2}{3}} (x^{-\frac{2}{3}} + 5) + C$

(c) $\frac{5}{3} \sqrt[3]{x} (x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$

(d) $\frac{5}{3} x^{\frac{4}{3}} (x^{\frac{2}{3}} + 5) + C$

$$\int (x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{2}{3}}) dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{1} x^{\frac{1}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{5} x^{\frac{1}{3}} (x^{\frac{4}{3}} + 5) + C = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x} (x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$$

(8) إذا كان: $x = -1$, $y = -5$, $\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{2}{3}}$ فإن y تساوي:

(a) $-\frac{x^2}{3} - \frac{14}{3}$

(b) $3x^{\frac{1}{3}} + 2$

(c) $3x^{\frac{1}{3}} - 2$

(d) $3x^{\frac{1}{3}}$

$$dy = x^{-\frac{2}{3}} dx \Rightarrow \int dy = \int x^{-\frac{2}{3}} dx \Rightarrow y = \frac{3}{1} x^{\frac{1}{3}} + C$$

$$y = 3x^{\frac{1}{3}} + C \Rightarrow -5 = 3(-1)^{\frac{1}{3}} + C \Rightarrow C = -2 \Rightarrow y = 3x^{\frac{1}{3}} - 2$$

حل آخر

يمكن التعويض بـ ($x = -1$) في الإختيارات ونبحث متى يكون الناتج = -5

وإذا كان يوجد عدة اختيارات تحقق أن الناتج = -5 يمكن ان نشتمهم للحصول على $\frac{dy}{dx}$

$$a) -\frac{(-1)^2}{3} - \frac{14}{3} = -5 \Rightarrow \left(-\frac{x^2}{3} - \frac{14}{3}\right)' = \frac{-2x}{3} \neq x^{-\frac{2}{3}}$$

$$c) 3(-1)^{\frac{1}{3}} - 2 = -5 \Rightarrow (3x^{\frac{1}{3}} - 2)' = 3 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = x^{-\frac{2}{3}}$$

(9) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x}} dx =$

(a) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$

(b) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$

(c) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$

(d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{1}{2}} + C$

$$\int \frac{2x+3}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$$

(10) $\int \sqrt{x}(2+x^2) dx =$

(a) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$

(b) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

(c) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

(d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

$$\int x^{\frac{1}{2}}(2+x^2) dx = \int 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{2}} dx = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$$

$$(11) \int \frac{2 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} dx =$$

$$(a) x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$$

$$(b) 4x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$$

$$(c) x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$$

$$(d) 4x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$$

$$\int \frac{2 + x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int 2x^{\frac{-1}{2}} + x^{\frac{1}{6}} dx = 2 \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C = 4x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$$

$$(12) \int \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} + 2 \right)^2 dx =$$

$$(a) x^2 + C$$

$$(b) 2x + C$$

$$(c) \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

$$(d) \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int \left(\frac{(x-2)(x-2)}{x-2} + 2 \right)^2 dx = \int (x-2+2)^2 dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

بند (2 - 5) التكامل بالتعويض

في التمارين (1-5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$$(1) \int x(x^2 - 1)^{10} dx = \frac{1}{18}(x^2 - 1)^9 + C$$

(a) (b)

$$\frac{1}{18} \times 9(x^2 - 1)^8 (2x) = x(x^2 - 1)^8$$

بإشتقاق الطرف الأيمن

$$(2) \int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x+3} dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^4} + C$$

(a) (b)

بإشتقاق الطرف الأيمن

$$\left(\frac{3}{8}(x^2+2x+3)^{\frac{4}{3}} + C \right)' = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{3}(x^2+2x+3)^{\frac{1}{3}}(2x+2)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+2x+3)^{\frac{1}{3}}2(x+1) = (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x+3}$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = 2\sqrt{3x-2} + C$$

(a) (b)

بإشتقاق الطرف الأيمن

$$\left(2\sqrt{(3x-2)} + C \right)' = \left(2(3x-2)^{\frac{1}{2}} + C \right)' = 2 \times \frac{1}{2}(3x-2)^{-\frac{1}{2}} \times 3 = \frac{3}{\sqrt{(3x-2)}}$$

$$(4) \int (2x^2 - 1)(2x^3 - 3x + 4)^5 dx = \frac{1}{18}(2x^3 - 3x + 4)^6 + C$$

(a) (b)

$$(2x^3 - 3x + 4)' = 6x^2 - 3$$

$$\left(\frac{1}{18}(2x^3 - 3x + 4)^6 + C \right)' = \frac{1}{18} \times 6(2x^3 - 3x + 4)^5 (6x^2 - 3) =$$

$$\frac{1}{3}(2x^3 - 3x + 4)^5 (3)(2x^2 - 1) = (2x^2 - 1)(2x^3 - 3x + 4)^5$$



$$(5) \int x \sqrt[3]{x+2} dx = \frac{3}{7}(x+2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{2}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$u = x + 2, du = dx$$

$$x = u - 2$$

$$\int (u-2)(u)^{\frac{1}{3}} du = \int (u)^{\frac{4}{3}} - 2(u)^{\frac{1}{3}} du = \frac{u^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - 2 \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3u^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{3u^{\frac{4}{3}}}{2} + C$$

$$\frac{3}{7}(x+2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{2}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C$$

في التمارين (12-6)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

$$(6) \int x(x^2+2)^7 dx =$$

(a) $\frac{1}{16}(x^2+2)^8 + C$

(b) $\frac{1}{4}(x^2+2)^8 + C$

(c) $\frac{1}{12}(x^2+2)^6 + C$

(d) $\frac{1}{3}(x^2+2)^6 + C$

$$\int (x^2+2)^7 (x) dx = \frac{1}{2} \int (x^2+2)^7 (2x) dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2+2)^8}{8} + C = \frac{1}{16}(x^2+2)^8 + C$$

$$(7) \int \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} dx =$$

(a) $\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$

(b) $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$

(c) $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$

(d) $\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$

$$\int \frac{x-1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} dx = \int (x-1)^{\frac{1}{2}} (1) dx = \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}} =$

(a) $\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

(b) $\frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

(c) $2(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

(d) $\frac{1}{2}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

$$\int \frac{1}{(3x+1)^{\frac{1}{3}}} dx = \frac{1}{3} \int (3x+1)^{-\frac{1}{3}} (3) dx = \frac{1}{3} \frac{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2} (3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$$

(9) $\int \frac{(2+\sqrt{x})^{12}}{\sqrt{x}} dx =$

(a) $\frac{13}{2}(2+\sqrt{x})^{13} + C$

(b) $\frac{2}{13}(2+\sqrt{x})^{13} + C$

(c) $\frac{1}{26}(2+\sqrt{x})^{13} + C$

(d) $\frac{1}{22}(2+\sqrt{x})^{11} + C$

$$\int (2+\sqrt{x})^{12} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int (2+\sqrt{x})^{12} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \frac{(2+\sqrt{x})^{13}}{13} + C = \frac{2}{13} (2+\sqrt{x})^{13} + C$$

(10) $\int \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^2+2x+3}} dx =$

(a) $\frac{3}{4} \sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2} + C$

(b) $\frac{3}{2} \sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2} + C$

(c) $3 \sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2} + C$

(d) $\frac{3}{4} \sqrt[3]{x^2+2x+3} + C$

$$(x^2 + 2x + 3)' = 2x + 2$$

$$\int (x^2 + 2x + 3)^{-\frac{1}{3}} (x+1) dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 2x + 3)^{-\frac{1}{3}} (2x + 2) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(x^2 + 2x + 3)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{4} (x^2 + 2x + 3)^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x^2 + 2x + 3)^2} + C$$

$$(11) \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx =$$

$$(a) \frac{3}{2}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$$

$$(b) \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{x+1} + C$$

$$(c) \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$$

$$(d) \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + 2\sqrt{x+1} + C$$

$$u = x + 1, du = dx$$

$$x = u - 1$$

$$\int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du = \int \frac{u-1}{u^{\frac{1}{2}}} du = \int u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} - 2u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$$

(12) إذا $F(x) = \int (x+1)(2x^2 + 4x - 1) dx$ ، $F(-2) = \frac{9}{8}$ ، فإن $F(x)$ تساوي:

$$(a) \frac{1}{8}(2x^2 + 4x - 1)^2 + \frac{5}{4}$$

$$(b) \frac{1}{8}(2x^2 + 4x - 1)^2 + 1$$

$$(c) \frac{1}{4}(2x^2 + 4x - 1)^2 + 1$$

$$(d) 4(2x^2 + 4x - 1)^2 - 1$$

$$(2x^2 + 4x - 1)' = 4x + 4$$

$$\int (2x^2 + 4x - 1)(x+1) dx = \frac{1}{4} \int (2x^2 + 4x - 1)(4x + 4) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{(2x^2 + 4x - 1)^2}{2} + C = \frac{1}{8}(2x^2 + 4x - 1)^2 + C$$

$$F(-2) = \frac{1}{8}(2(-2)^2 + 4(-2) - 1)^2 + C = \frac{1}{8} + C$$

$$\frac{1}{8} + C = \frac{9}{8} \Rightarrow C = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = 1$$

بند (3 - 5) تكامل الدوال المثلثية

في التمارين (1-5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$$(1) \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

a

b

$$(2) \int \csc^2 x \, dx = \cot x + C$$

a

b

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$(3) (F'(x) = \sec^2 x, F(\frac{\pi}{4}) = -1) \Rightarrow F(x) = \tan x + 2$$

a

b

$$F(x) = \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$F(\frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} + C = 1 + C = -1 \Rightarrow C = -2$$

$$(4) (F'(x) = \cos x + \sin x, F(\pi) = 1) \Rightarrow F(x) = \sin x - \cos x$$

a

b

$$F(x) = \int (\cos x + \sin x) \, dx = \sin x - \cos x + C$$

$$F(\pi) = \sin \pi - \cos \pi + C = 0 - (-1) + C \Rightarrow 1 + C = 1 \Rightarrow C = 0$$

$$(5) (F'(x) = \sec(x) \tan(x), F(0) = 4) \Rightarrow F(x) = \sec x + 3$$

a

b

$$F(x) = \int \sec(x) \cdot \tan(x) \, dx = \sec x + C$$

$$F(0) = \sec(0) + C \Rightarrow (1) + C = 4 \Rightarrow C = 3$$

في التمارين (6-12)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(6) الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f حيث $f(x) = 8 + \csc x \cot x$ هي:

(a) $F(x) = 8x + \csc x + C$

(b) $F(x) = 8x - \cot x + C$

(c) $F(x) = 8x - \csc x + C$

(d) $F(x) = 8x + \cot x + C$

$$F(x) = \int (8 + \csc x \cot x) \, dx = 8x - \csc x + C$$

(7) $\int \csc(5x) \cot(5x) dx =$

(a) $\frac{1}{5} \csc(5x) + C$

(b) $\csc(5x) + C$

(c) $\frac{1}{5} \cot(5x) + C$

(d) $-\frac{1}{5} \csc(5x) + C$

$$\int \csc(5x) \cot(5x) dx = -\frac{1}{5} \csc(5x) + C$$

(8) $\int \sqrt[3]{\cot x} \csc^2 x dx =$

(a) $\frac{3}{4} \sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

(b) $-\frac{3}{4} \sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

(c) $-\frac{3}{4} \sqrt[4]{(\cot x)^3} + C$

(d) $3 \sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

$$u = \cot x, du = -\csc^2 x dx$$

$$-\int (\cot x)^{\frac{1}{3}} (-\csc^2 x) dx = -\int (u)^{\frac{1}{3}} du = \frac{-u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{-3}{4} (\cot x)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{-3}{4} \sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$$

(9) إذا كانت $y(\theta = 0) = -3$ ، فإن $\frac{dy}{d\theta} = \sin \theta$ تساوي:

(a) $-\cos \theta$

(b) $2 - \cos \theta$

(c) $-2 - \cos \theta$

(d) $4 - \cos \theta$

$$dy = \sin \theta d\theta$$

$$y = \int \sin \theta d\theta = -\cos \theta + C$$

$$-3 = -\cos 0 + C \Rightarrow -3 = -1 + C \Rightarrow C = -2$$

(10) $\int \sec^5 x \tan x \, dx =$

(a) $\frac{5}{3} \sec^5 x + C$

(b) $\frac{1}{5} \sec^6 x + C$

(c) $\frac{1}{5} \sec^5 x + C$

(d) $-\frac{5}{3} \sec^5 x + C$

$$u = \sec x, du = \sec x \tan x \, dx$$

$$\int \sec^4 x \cdot \sec x \tan x \, dx = \int u^4 \, du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{5} \sec^5 x + C$$

(11) $\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt[3]{2 + \cot x}} \, dx =$

(a) $\frac{3}{2}(2 + \cot x)^{\frac{2}{3}} + C$

(b) $-\frac{3}{2}(2 + \cot x)^{\frac{2}{3}} + C$

(c) $-2\sqrt{2 + \cot x} + C$

(d) $\frac{4}{3}(2 + \cot x)^{\frac{4}{3}} + C$

$$u = 2 + \cot x, du = -\csc^2 x \, dx$$

$$\int (2 + \cot x)^{\frac{-1}{3}} \cdot \csc^2 x \, dx = -\int (2 + \cot x)^{\frac{-1}{3}} \cdot (-\csc^2 x) \, dx =$$

$$-\int u^{\frac{-1}{3}} \, du = \frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{-3}{2} (2 + \cot x)^{\frac{2}{3}} + C$$

(12) $\int \frac{\sin(4x)}{\cos^5(4x)} \, dx =$

(a) $-\frac{1}{16} \cos^{-4}(4x) + C$

(b) $\frac{1}{16} \cos^{-4}(4x) + C$

(c) $-\cos^{-4}(4x) + C$

(d) $\cos^{-4}(4x) + C$

$$u = \cos 4x, du = -4 \sin 4x \, dx$$

$$\int (\cos 4x)^{-5} \cdot \sin 4x \, dx = \frac{1}{-4} \int (\cos 4x)^{-5} \cdot (-4 \sin 4x) \, dx =$$

$$\frac{-1}{4} \int u^{-5} \, du = \frac{-1}{4} \frac{u^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{16} \cos^{-4}(4x) + C$$

بند (4 - 5) الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

في التمارين (1-6)، ظلّ الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت: $y = 4^{x-2}$ فإن: $\frac{dy}{dx} = 4x$

(a) (b)

$$y = 4^{x-2} \cdot \ln 4 \cdot (x-2)' = 4^{x-2} \cdot \ln 4$$

(a) (b)

(2) إذا كانت: $f(x) = e^{x^2}$ فإن: $f'(x) = 2xe^{2x}$

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$$

(a) (b)

(3) إذا كانت: $g(x) = \ln(2x+2)$ فإن: $g'(x) = \frac{1}{2x+2}$

$$g'(x) = \frac{(2x+2)'}{(2x+2)} = \frac{2}{2x+2} = \frac{1}{x+1}$$

(a) (b)

(4) إذا كانت: $y = x \ln x - x$ فإن: $y' = \ln x$

$$y' = (x)' \ln x + x(\ln x)' - (x)' = \ln x + x \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

(a) (b)

(5) $\int \frac{1}{2x} dx = \frac{\ln x}{2} + C$

$$\int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \ln|x| + C$$

(a) (b)

(6) $\int \frac{1}{3x+1} dx = \ln(3x+1) + C$

$$\int \frac{1}{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|3x+1| + C$$

في التمارين (7-14)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كانت $y = e^{-5x}$ ، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

- (a) e^{-5x} (b) $-e^{-5x}$
 (c) $-5e^{-5x}$ (d) $5e^{-5x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-5x} \cdot (-5x)' = e^{-5x} \cdot -5 = -5e^{-5x}$$

(8) إذا كانت $y = x^2 e^x - x e^x$ ، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

- (a) $e^x(x^2 + x - 1)$ (b) $e^x(x^2 - x)$
 (c) $2x e^x - e^x$ (d) $e^x(x^2 + 2x + 1)$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2x e^x + x^2 e^x - (e^x + x e^x) = 2x e^x + x^2 e^x - e^x - x e^x \\ &= x e^x + x^2 e^x - e^x = e^x(x + x^2 - 1) \end{aligned}$$

(9) إذا كانت $y = (\ln x)^2$ ، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

- (a) $\frac{\ln x}{x}$ (b) $\frac{2 \ln x}{x}$
 (c) $\frac{x \ln x}{2}$ (d) $\frac{2 \ln^2 x}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \ln x \cdot (\ln x)' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$$

(10) إذا كانت $y = \ln\left(\frac{10}{x}\right)$ ، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

- (a) $-\frac{10}{x}$ (b) $\frac{10}{x}$
 (c) $\frac{1}{x}$ (d) $-\frac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{10}{x}\right)'}{\frac{10}{x}} = \frac{-10x}{x^2} \cdot \frac{x}{10} = -\frac{1}{x}$$

(11) إذا كانت $y = \ln(x^2 + 1)$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $\frac{x}{x^2 + 1}$

(b) $\frac{2}{x^2 + 1}$

(c) $\frac{2x}{x^2 + 1}$

(d) $-\frac{2x}{x^2 + 1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

(12) $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx =$

(a) $2\ln(x^2 + 1) + C$

(b) $\ln(x^2 + 1) + C$

(c) $\frac{x^2}{x^2 + 1} + C$

(d) $\frac{x}{\frac{1}{3}x^2 + 1} + C$

$u = x^2 + 1, u' = 2x$

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C = \ln|x^2 + 1| + C = \ln(x^2 + 1) + C$$

(13) $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx =$

(a) $\frac{e^x - e^{-x}}{2} + C$

(b) $\frac{e^x + e^{-x}}{2} + C$

(c) $\frac{e^{-x} - e^x}{2} + C$

(d) $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + C$

$$\frac{1}{2} \int (e^x + e^{-x}) dx = \frac{1}{2} (\int e^x dx + \int e^{-x} dx) =$$

$$\frac{1}{2} (\int e^x dx - \int (-1)e^{-x} dx) = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x} + C = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + C$$

(14) $\int \frac{e^x}{e^x - 4} dx =$

(a) $-\frac{1}{2}(e^x - 4) + C$

(b) $\ln|e^x - 4| + C$

(c) $-\ln|e^x - 4| + C$

(d) $\frac{1}{2} \ln|e^x - 4| + C$

$u = e^x - 4, u' = e^x$

$$\int \frac{e^x}{e^x - 4} dx = \int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C = \ln|e^x - 4| + C$$

بند (5 - 5) التكامل بالتجزئ

في التمارين (1-5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$$(1) \int x \cos(2x) dx = \frac{1}{2} x \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

(a) (b)

$$u = x, dv = \cos(2x) dx$$

$$du = dx, v = \frac{\sin(2x)}{2}$$

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

$$\int x \cos(2x) dx = x \cdot \frac{\sin(2x)}{2} - \int \frac{\sin(2x)}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} x \sin(2x) - \frac{1}{2} \frac{-\cos(2x)}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2} x \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + C$$

حل ثالث
طريقة مختصرة للموضوعي

اشتقاق

تكامل

$$\begin{array}{r} + x \\ - 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \cos 2x \\ \rightarrow \frac{\sin 2x}{2} \\ \rightarrow \frac{-\cos 2x}{4} \end{array}$$

نتائج التكامل:

$$\frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

حل ثاني إيجاد مشتقة الطرف الأيمن

$$\left(\frac{1}{2} x \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + C \right)' =$$

$$\frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{2} x \cos(2x) \cdot 2 - \frac{1}{4} \sin(2x) \cdot 2 = x \cos(2x)$$

$$(2) \int x \sin(\pi x) dx = -\frac{x}{\pi} \cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x) + C$$

$$u = x, dv = \sin(\pi x) dx$$

$$du = dx, v = \frac{-\cos(\pi x)}{\pi}$$

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

$$\int x \sin(\pi x) dx = x \cdot \frac{-\cos(\pi x)}{\pi} - \int \frac{-\cos(\pi x)}{\pi} dx$$

$$= -\frac{x}{\pi} \cos(\pi x) + \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\pi x)}{\pi} + C = -\frac{x}{\pi} \cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x) + C$$

(a) (b)

حل ثالث
طريقة مختصرة للموضوعي

اشتقاق

تكامل

$$\begin{array}{r} + x \\ - 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \sin \pi x \\ \rightarrow \frac{-\cos \pi x}{\pi} \\ \rightarrow \frac{-\sin \pi x}{\pi^2} \end{array}$$

نتائج التكامل:

$$-\frac{x}{\pi} \cos \pi x + \frac{x}{\pi^2} \sin \pi x + C$$

$$(3) \int x e^{6x} dx = \frac{1}{6} x e^{6x} - \frac{1}{36} e^{6x} + C$$

إيجاد مشتقة الطرف الأيمن

a b

$$\left(\frac{1}{6} x e^{6x} - \frac{1}{36} e^{6x} + C \right)' = \frac{1}{6} (1) e^{6x} + \frac{1}{6} x (e^{6x} \cdot 6) - \frac{1}{36} (e^{6x} \cdot 6) = x e^{6x}$$

$$(4) \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + e^{-x} + C$$

إيجاد مشتقة الطرف الأيمن

a b

$$\left(-x e^{-x} + e^{-x} + C \right)' = -(1) e^{-x} - x (e^{-x} \cdot (-1)) + (e^{-x} \cdot (-1)) = -2e^{-x} + x e^{-x}$$

$$(5) \int x \sec^2 x dx = x \tan x - \ln |\sec x| + C$$

إيجاد مشتقة الطرف الأيمن

a b

$$\begin{aligned} (x \tan x - \ln |\sec x| + C)' &= \tan x + x \sec^2 x - \frac{(\sec x)'}{\sec x} \\ &= \tan x + x \sec^2 x - \frac{\sec x \tan x}{\sec x} = x \sec^2 x \end{aligned}$$

في التمارين (11-6)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

$$(6) \int (2x+1) \sin x dx$$

$$(a) (2x+1) \cos x + 2 \sin x + C$$

$$(b) -(2x+1) \cos x + 2 \sin x + C$$

$$(c) -(x+1) \cos x - 2 \sin x + C$$

$$(d) (2x+1) \cos x - \sin x + C$$

$$u = 2x+1, dv = \sin x dx$$

$$du = 2dx, v = -\cos x$$

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

$$\begin{aligned} \int (2x+1) \sin x dx &= (2x+1) \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) 2dx \\ &= (2x+1) \cdot (-\cos x) + 2 \sin x + C \end{aligned}$$

حل ثاني
طريقة مختصرة للموضوعي

اشتقاق

تكامل

$$\begin{array}{r} + 2x+1 \quad \rightarrow \quad \sin x \\ - 2 \quad \rightarrow \quad -\cos x \\ 0 \quad \rightarrow \quad -\sin x \end{array}$$

نتائج التكامل:

$$-(2x+1) \cos x + 2 \sin x + C$$

(7) $\int x^2 \ln(x) dx =$

(a) $\frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{x^3}{3} + C$

(b) $\frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

(c) $\frac{1}{3}x^3 \ln(x) + \frac{x^3}{9} + C$

(d) $-\frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

$$u = \ln x, dv = x^2 dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx, v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \int \frac{x^2}{3} \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + C = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

في التمرينين (8-9)، إذا كان $\int (2x+1) \ln x dx = uv - \int v du$ فإن:

(8) $uv =$

(a) $(2x+1) \ln x$

(b) $2x \ln x$

(c) $\frac{2x+1}{2} \ln x$

(d) $x(x+1) \ln x$

(9) $\int v du =$

(a) $\frac{1}{2} x \ln x + C$

(b) $\frac{1}{2} x^2 + x + C$

(c) $(2x+1) \ln x + C$

(d) $\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + C$

$$u = \ln x, dv = (2x+1) dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx, v = \frac{2x^2}{2} + x = x^2 + x = x(x+1)$$

$$uv = x(x+1) \ln x$$

$$\int v du = \int x(x+1) \frac{1}{x} dx = \int (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x + C$$

في التمرين (10-11)، إذا كان $\int (3x-1)e^{3x+2} dx = uv - \int vdu$ فإن:

(10) $uv =$

a $(3x-1)e^{3x+2}$

b $\frac{1}{3}(3x-1)e^{3x+2}$

c $(3x-1)e^{x+2}$

d $\frac{1}{3}(x-1)e^{3x+2}$

(11) $\int vdu =$

a $-\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

b $-e^{3x+2} + C$

c $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

d $e^{3x+2} + C$

$$u = (3x-1), dv = e^{3x+2} dx = \frac{1}{3}(3e^{3x+2} dx)$$

$$du = 3dx, v = \frac{1}{3}e^{3x+2}$$

$$uv = \frac{1}{3}(3x-1)e^{3x+2}$$

$$\int vdu = \int \frac{1}{3}e^{3x+2} \cdot 3dx = \int \frac{1}{3}(e^{3x+2} \cdot 3)dx = \frac{1}{3}e^{3x+2} + C$$

بند (6 - 5) التكامل باستخدام الكسور الجزئية

في التمارين (1-4)، ظلل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$$(1) \int \frac{4dx}{(x+3)(x+7)} = \ln|x+3| + \ln|x+7| + C$$

(a)

(b)

$$\frac{4}{(x+3)(x+7)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+7}$$

$$4 = A(x+7) + B(x+3)$$

$$4 = A(-7+7) + B(-7+3) \Rightarrow 4 = -4B \Rightarrow B = -1$$

$$4 = A(-3+7) + B(-3+3) \Rightarrow 4 = 4A \Rightarrow A = 1$$

$$\int \frac{4}{(x+3)(x+7)} dx = \int \left(\frac{1}{x+3} + \frac{-1}{x+7} \right) dx =$$

$$\ln|x+3| - \ln|x+7| + C$$

حل آخر إيجاد مشتقة الطرف الأيمن ثم توحيد المقامات

$$(\ln|x+3| + \ln|x+7| + C)' = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+7} = \frac{x+7+x+3}{(x+3)(x+7)} = \frac{2x+10}{(x+3)(x+7)}$$

لا يساوي الطرف الأيسر

$$(2) \int \frac{-6dx}{x^2+3x} = -2\ln|x+3| + 2\ln|x| + C$$

(a)

(b)

$$\frac{-6}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}$$

$$-6 = A(x+3) + B(x)$$

$$-6 = A(-3+3) + B(-3) \Rightarrow -6 = -3B \Rightarrow B = 2$$

$$-6 = A(0+3) + B(0) \Rightarrow -6 = 3A \Rightarrow A = -2$$

$$\int \frac{-6}{x(x+3)} dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{2}{x+3} \right) dx =$$

$$-2\ln|x| + 2\ln|x+3| + C$$

حل آخر إيجاد مشتقة الطرف الأيمن ثم توحيد المقامات

$$(-2\ln|x+3| + 2\ln|x| + C)' = \frac{-2}{x+3} + \frac{2}{x} = \frac{-2x+2(x+3)}{(x+3)(x)} = \frac{6}{x^2+3x}$$

لا يساوي الطرف الأيسر

a

b

$$(3) \text{ الدالة: } f(x) = \frac{4x-11}{2x^2-x-3} \text{ على صورة كسور جزئية هي: } f(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{2x-3}$$

بتوحيد المقامات

$$\frac{3}{x+1} - \frac{2}{2x-3} = \frac{3(2x-3) - 2(x+1)}{(x+1)(2x-3)} = \frac{6x-9-2x-2}{2x^2-3x+2x-3} = \frac{4x-11}{2x^2-x-3}$$

a

b

$$(4) \text{ للحدودية النسبية: } \frac{x^2-x+2}{x^3-2x^2+x} \text{ ثلاثة كسور جزئية.}$$

في التمارين (5-10)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

$$(5) \int \frac{6}{x^2-9} dx =$$

a $\ln|x+3| - \ln|x-3| + C$

b $\ln(x-3) - \ln(x+3) + C$

c $\ln|x+3| + \ln|x-3| + C$

d $\ln|x-3| - \ln|x+3| + C$

$$\frac{6}{(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}$$

$$6 = A(x-3) + B(x+3)$$

$$6 = A(3-3) + B(3+3) \Rightarrow 6 = 6B \Rightarrow B = 1$$

$$6 = A(-3-3) + B(-3+3) \Rightarrow 6 = -6A \Rightarrow A = -1$$

$$\int \frac{6}{(x+3)(x-3)} dx = \int \left(\frac{-1}{x+3} + \frac{1}{x-3} \right) dx =$$

$$-\ln|x+3| + \ln|x-3| + C$$

$$(6) \int \frac{7x-7}{x^2-3x-10} dx =$$

a $4\ln|x+2| + 3\ln|x-5| + C$

b $3\ln|x+2| + 2\ln|x-5| + C$

c $4\ln|x-5| + 3\ln|x+2| + C$

d $4\ln|x-5| - 3\ln|x+2| + C$

$$\frac{7x-7}{(x-5)(x+2)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+2}$$

$$7x-7 = A(x+2) + B(x-5)$$

$$7(-2)-7 = A(-2+2) + B(-2-5) \Rightarrow -21 = -7B \Rightarrow B = 3$$

$$7(5)-7 = A(5+2) + B(5-5) \Rightarrow 28 = 7A \Rightarrow A = 4$$

$$\int \frac{7x-7}{(x-5)(x+2)} dx = \int \left(\frac{4}{x-5} + \frac{3}{x+2} \right) dx =$$

$$4\ln|x-5| + 3\ln|x+2| + C$$

(7) الدالة النسبية: $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ على صورة كسور جزئية هي $f(x)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$

(b) $\frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}$

(c) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$

(d) $\frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{2(x+2)}$

$$\frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$x = A(x+2) + B(x-2)$$

$$-2 = A(-2+2) + B(-2-2) \Rightarrow -2 = -4B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$2 = A(2+2) + B(2-2) \Rightarrow 2 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{x^2-4} = \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}$$

(8) $\int \frac{2x^2-4x+3}{x^2-1} dx =$

(a) $2 + 2\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$

(b) $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$

(c) $2x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$

(d) $x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - 9\ln|x+1| + C$

$$\frac{2x^2-4x+3}{x^2-1} = 2 + \frac{-4x+5}{x^2-1}$$

$$\frac{-4x+5}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$-4x+5 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$-4(1)+5 = A(1+1) + B(1-1) \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$-4(-1)+5 = A(-1+1) + B(-1-1) \Rightarrow 9 = -2B \Rightarrow B = -\frac{9}{2}$$

$$\frac{-4x+5}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{9}{2(x+1)}$$

$$\int \frac{2x^2-4x+3}{x^2-1} dx = \int \left(2 + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{9}{2(x+1)} \right) dx =$$

$$= 2x + \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{9}{2}\ln(x+1) + C$$

$\begin{array}{r} 2 \\ x^2-1 \overline{) 2x^2-4x+3} \\ \underline{2x^2} \\ -4x+5 \end{array}$
--

$$(9) \int \frac{3x^2 + 2x}{x^2 - 4} dx =$$

(a) $4\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C$

(b) $3x + 2\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C$

(c) $3x + 4\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C$

(d) $3x + 4\ln|x-2| + 2\ln|x+2| + C$

$$\frac{3x^2 + 2x}{x^2 - 4} = 3 + \frac{2x + 12}{x^2 - 4}$$

$$\frac{2x + 12}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ x^2 - 4 \overline{) 3x^2 + 2x} \\ \underline{3x^2} \\ -12 \\ \underline{2x + 12} \end{array}$$

$$2x + 12 = A(x + 2) + B(x - 2)$$

$$2(2) + 12 = A(2 + 2) + B(2 - 2) \Rightarrow 16 = 4A \Rightarrow A = 4$$

$$2(-2) + 12 = A(-2 + 2) + B(-2 - 2) \Rightarrow 8 = -4B \Rightarrow B = -2$$

$$\frac{3x^2 + 2x}{x^2 - 4} = \frac{4}{x-2} - \frac{2}{x+2}$$

$$\int \frac{3x^2 + 2x}{x^2 - 4} dx = \int \left(3 + \frac{4}{x-2} - \frac{2}{x+2}\right) dx =$$

$$= 3x + 4\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C$$

$$(10) \int \frac{x^3 + 2}{x^2 - x} dx =$$

(a) $\frac{x^2}{2} + 3\ln|x-1| + 2\ln|x| + C$

(b) $\frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x-1| + 2\ln|x| + C$

(c) $\frac{x^2}{2} - 3\ln|x-1| + 2\ln|x| + C$

(d) $\frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x-1| - 2\ln|x| + C$

$$\frac{x^3 + 2}{x^2 - x} = x + 1 + \frac{x + 2}{x^2 - x}$$

$$\frac{x + 2}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

$$x + 2 = A(x-1) + B(x)$$

$$0 + 2 = A(0-1) + B(0) \Rightarrow 2 = -A \Rightarrow A = -2$$

$$1 + 2 = A(1-1) + B(1) \Rightarrow 3 = B \Rightarrow B = 3$$

$$\frac{x + 2}{x(x-1)} = \frac{-2}{x} + \frac{3}{x-1}$$

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^2 - x} dx = \int \left(x + 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x-1}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - 2\ln|x| + 3\ln|x-1| + C$$

$$\begin{array}{r} x + 1 \\ x^2 - x \overline{) x^3} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ \underline{x^2 + 2} \\ \underline{x^2 - x} \\ \underline{x + 2} \end{array}$$

بند (5 - 7) التكامل المحدد

في التمارين (1-7)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}$$

(a) (b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \int_{-3}^{-2} (|x| + x + 5) \, dx = -2$$

(a) (b)

$$\int_{-3}^{-2} -x + x + 5 \, dx = \int_{-3}^{-2} 5 \, dx = 5(-2 - (-3)) = 5$$

$$(3) \int_{-1}^1 (|x|)^3 \, dx = -\frac{1}{2}$$

(a) (b)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (-x)^3 \, dx + \int_0^1 (x)^3 \, dx &= \left[\frac{(-x)^4}{4} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{(x)^4}{4} \right]_0^1 = \left[\frac{(x)^4}{4} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{(x)^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \left[\frac{(0 - (-1)^4)}{4} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{(1)^4 - 0^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(4) \int_0^1 12(3x-2)^3 \, dx = -15$$

(a) (b)

$$4 \int_0^1 (3x-2)^3 \, 3dx = 4 \left[\frac{(3x-2)^4}{4} \right]_0^1 = 4 \left[\frac{(3(1)-2)^4 - (3(0)-2)^4}{4} \right] = 4 \times \frac{1-16}{4} = -15$$

$$(5) \int_{-1}^1 \frac{1}{\pi} \sqrt{1-x^2} \, dx = 1$$

(a) (b)

$$y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

معادلة النصف العلوي من الدائرة

$$\frac{1}{\pi} \int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (1) = \frac{1}{2}$$

مساحة النصف العلوي من الدائرة

$$(6) \int_2^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx - \int_5^2 f(x) dx = 0$$

a

b

$$\int_2^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx - \int_5^2 f(x) dx = \int_2^5 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx = 2 \int_2^5 f(x) dx$$

$$(7) \int_2^4 f(x) dx + \int_4^2 g(x) dx = 0$$

لا يمكن تطبيق الخواص لأن الدالتين مختلفتين

a

b

في التمارين (12-8)، ظلل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان: $\int_3^{-1} g(x) dx = 2$ ، $\int_{-1}^3 f(x) dx = 4$ فإن $\int_{-1}^3 (2f(x) + 3g(x) + 1) dx$ تساوي:

a 18

b -6

c 6

d 12

$$2 \int_{-1}^3 f(x) dx + 3 \int_{-1}^3 g(x) dx + \int_{-1}^3 (1) dx = 2 \times 4 + 3 \times (-2) + (3 - (-1)) = 8 - 6 + 4 = 6$$

$$(9) \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2} dx =$$

باستخدام الآلة الحاسبة

a 2

b $2\sqrt{2}$

c 4

d 8

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2} dx = \sqrt{2}(\sqrt{18} - \sqrt{2}) = 4$$

$$(10) \int_{-1}^1 (1 - |x|) dx =$$

باستخدام الآلة الحاسبة

a 1

b -1

c 0

d $\frac{1}{2}$

$$\int_{-1}^1 (1 - |x|) dx = \int_{-1}^1 1 dx - \int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^1 1 dx - \int_{-1}^0 (-x) dx - \int_0^1 (x) dx =$$

$$1(1 - (-1)) - \left[\frac{-x^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 2 + \frac{1}{2}(0^2 - (-1)^2) - \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

$$(11) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx =$$

باستخدام الآلة الحاسبة

a 4

b 2

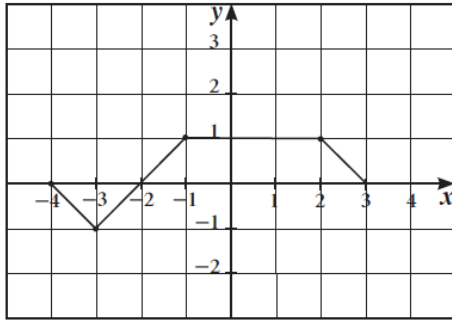
c 0

d π

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = [-\cos x + \sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = (-\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}) - (-\cos \frac{-\pi}{2} + \sin \frac{-\pi}{2})$$

$$= (0 + 1) - (0 + (-1)) = 2$$

في التمارين (13-15)، لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) لتحصل على عبارة صحيحة. إذا كان بيان الدالة f كما في الشكل المقابل، فإن:



(2)	(1)
(a) 6	(13) $\int_{-4}^3 f(x) dx$ يساوي: (d)
(b) 5	(14) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي: (b)
(c) 0	(15) $\int_{-4}^{-1} (f(x) + \frac{1}{6}) dx$ يساوي: (c)
(d) 3	

$$\int_{-4}^{-2} f(x) dx = -1$$

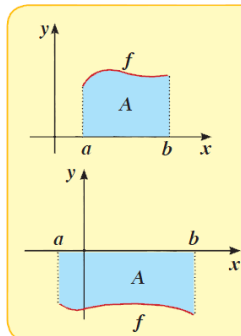
$$\int_{-2}^3 f(x) dx = 4$$

$$\int_{-4}^3 f(x) dx = \int_{-4}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^3 f(x) dx = -1 + 4 = 3$$

$$\int_{-4}^{-1} f(x) dx + \int_{-4}^{-1} \left(\frac{1}{6}\right) dx = \left(-1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}[-1 - (-4)] = \frac{-1}{2} + \frac{1}{6} \times 3 = 0$$

Graphical Interpretation of Definite Integral

التفسير البياني للتكامل المحدد



في المستوى الإحداثي لتكن f دالة متصلة على $[a, b]$ ،
 A تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات
 والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$

1 إذا كانت: $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = A \quad \text{فإن:}$$

2 إذا كانت: $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = -A \quad \text{فإن:}$$