أجب عن الأسئلة التالية :

10

السؤال الأول :

(a) أوجد إن أمكن

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$$

الحل :

0.5

$$\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}\times\frac{\sqrt{x^2+7}+4}{\sqrt{x^2+7}+4}=\frac{x^2+7-16}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$ 1

$$\frac{x^2-9}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-1)(x-3)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$ 0.5

$$=\frac{(x+3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)},\ x\neq 3$$ 0.5

$$\lim_{x\to 3}(x^2+7)=16>0\Rightarrow\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2+7}=\sqrt{\lim_{x\to 3}(x^2+7)}=\sqrt{16}=4$$ 0.5

$$\lim_{x\to 3}(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)=\lim_{x\to 3}(x-1)\cdot\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)$$ 0.5

$$=\lim_{x\to 3}(x-1)\cdot\left(\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2+7}+\lim_{x\to 3}4\right)=2\cdot(4+4)=16\neq 0$$ 0.5

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-3}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 3}(x+3)}{\lim_{x\to 3}(x-1)\left(\sqrt{x^2+7}+4\right)}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$ 0.5+0.5

المجموع 5 درجات

(b) أوجد

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$$

الحل :

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}=\frac{\sqrt{x^2(2-\frac{1}{x})}}{x(1+\frac{1}{x})}=\frac{|x|\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{x(1+\frac{1}{x})},$$ 0.5+0.5

عندما $x>0$ يكون $|x|=x$ 0.5

$$=\frac{x\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{x(1+\frac{1}{x})}==\frac{\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{(1+\frac{1}{x})}$$ 0.5

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=1+0=1\ ,1\neq 0$$ 0.5

$$\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}2-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=2-0=2>0$$ 0.5 +0.5

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\sqrt{2}$$ 0.5

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{(1+\frac{1}{x})}=\frac{\lim_{x\to\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$$ 0.5+0.5

المجموع
5 درجات

10

السؤال الثاني :

(a) أوجد :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$$

الحل :

$$f(x)=\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}\cdot\frac{1+\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

$$=\frac{1-\cos^2 2x}{(\sin 2x)(1+\cos 2x)}=\frac{\sin^2 2x}{(\sin 2x)(1+\cos 2x)}$$

$$=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos 2x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x}{\lim\limits_{x\to 0}1+\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x}$$

$$=\frac{0}{1+1}=0$$

1
0.5+ 0.5
0.5
0.5 +0.5+0.5
0.5+0.5
المجموع 5 درجات

(b) إذا كانت الداله f حيث $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{1-x^2} & : x>-2\\ 5 & : x\le -2\end{cases}$

أوجد إن أمكن : $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

الحل :

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}(5)=5$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\sqrt[3]{1-x^2}$$

$$=\sqrt[3]{\lim_{x\to -2^+}(1-x^2)}=\sqrt[3]{1-4}=\sqrt[3]{-3}$$

$$\because\ \lim_{x\to -2^+} f(x)\neq \lim_{x\to -2^-} f(x)$$

$\therefore\ \lim_{x\to -2} f(x)$ غير موجوده

0.5 +0.5
0.5+ 0.5
0.5 + 0.5 +0.5
0.5 +0.5
0.5
المجموع 5 درجات

12

السؤال الثالث :

(أ) إبحث إتصال الداله f عند $x = 0$ حيث :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : x \le 0 \\ \frac{x^2}{x+1} & : x > 0 \end{cases}$$

الحل :

$f(0) = 0 + 0 = 0$ ……………………(1) — 1

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 + x) = 0 + 0 = 0$ — 0.5+ 0.5+0.5

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x^2}{x+1}\right) = 0$ — 0.5 + 0.5 +0.5

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ — 0.5

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$……………………(2) — 0.5

من (1) ، (2) f متصلة عند x=0 — 1

المجموع 6 درجات

(ب) إذا كانت الداله f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 15}$

إبحث إتصال الداله على الفترة ~~[6,8]~~ [-2,3]

الحل

نفرض أن $f(x) = \sqrt{g(x)}$, $g(x) = x^2 - 2x - 15$ — 1

$D_f = \{x : g(x) \ge 0\}$ — 0.5

$\Rightarrow x^2 - 2x - 15 \ge 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$ المعادله المناظره

$\Rightarrow (x-5)(x+3) = 0$ — 0.5+ 0.5+0.5

$\Rightarrow x = 5 , x = -3$

∴ مجال الداله f هو $\mathbb{R} - (-3,5)$ — 0.5

لدراسة إتصال الداله f على ~~[6,8]~~ [-2,3] حيث $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 15}$ — 0.5

$g(x) < 0 \quad \forall x \in$ ~~[6,8]~~ [-2,3] ……………(1) — 1

∵ الداله g : ~~$g(x) = x^2 - 2x - 15$ داله متصله على $\mathbb{R} - (-3,5)$~~……(2) — 0.5 0.5

من (1) ، (2) ∴ الداله f ~~متصله على [6,8]~~

[-2,3] غير متصله على

المجموع 6 درجات

جدول الإجابة

(1)	(a)	(b)	(c)	(d)
(2)	(a)	(b)	(c)	(d)
(3)	(a)	(b)	(c)	(d)
(4)	(a)	(b)	(c)	(d)
(5)	(a)	(b)	(c)	(d)
(6)	(a)	(b)	(c)	(d)
(7)	(a)	(b)	(c)	(d)
(8)	(a)	(b)	(c)	(d)