دولــة الكويت
وزارة التربية

امتحان الدور الثاني الفترة الدراسية الرابعة للصف الثاني عشر علمي 2015 / 2016 م

المجال الدراسي : الرياضيات   الزمن : ساعتان و 45 دقيقة   الأسئلة في 11 صفحة

القسم الأول : أسئلة المقال :

أجب عن الأسئلة التالية موضحا خطوات الحل في كل منها :

السؤال الأول :

10

(a) أوجد :

$$\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1 + \tan x}}\, dx$$ (4 درجات)

الحل

$$\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{1 + \tan x}} = \int \frac{\sec^2 x\, dx}{(1 + \tan x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \int (1 + \tan x)^{\frac{-1}{2}} . \sec^2 x\, dx$$ [0.5]

$$u = 1 + \tan x \quad ; \quad du = \sec^2 x\, dx$$ [0.5 + 0.5]

$$\int (1 + \tan x)^{\frac{-1}{2}} . \sec^2 x\, dx = \int u^{\frac{-1}{2}} du$$ [0.5]

$$= 2u^{\frac{1}{2}} + C$$ [1 + 0.5]

$$= 2(1 + \tan x)^{\frac{1}{2}} + C$$ [0.5]

$$= 2\sqrt{1 + \tan x} + C$$

(تراعى الحلول الأخرى الصحيحة في جميع الأسئلة المقاليه)

تابع السؤال الأول :

(b) أوجد :

$$\int \frac{x+2}{x^2-6x+8}dx$$ (6 درجات)

الحل

$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$

$\frac{x+2}{x^2-6x+8} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} \quad \Rightarrow$ [0.5]

$x + 2 = A(x-4) + B(x-2)$ [0.5]

$B = 3$: $x=4$ بالتعويض عن [1]

$A = -2$: $x=2$ بالتعويض عن [1]

$\frac{x+2}{x^2-6x+8} = \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-4}$

$\int \frac{x+2}{x^2-6x+8}dx = \int \left(\frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-4}\right)dx$ [0.5]

$= -2\int \frac{1}{x-2}dx + 3\int \frac{1}{x-4}dx$

$= -2\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + C$ [1 + 1 + 0.5]

10

السؤال الثاني

(a) دون حساب قيمة التكامل أثبت أن :

$$\int_0^1 (x^2 - 3x + 7)\, dx \geq \int_0^1 (4x - 5)\, dx$$ (4 درجات)

الحل

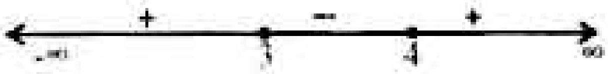
نفرض أن : $f(x) = x^2 - 3x + 7 \quad , g(x) = 4x - 5$ [0.5]

و هما دالتان متصلتان على $\mathbb{R}$ [0.5]

$$f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 7 - (4x - 5) = x^2 - 7x + 12$$ [0.5]

نضع $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$(x - 3)(x - 4) = 0$$



[0.5]

نلاحظ أن :

$x^2 - 7x + 12 \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty, 3] \cup [4, \infty)$ [0.5]

$f(x) - g(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty, 3] \cup [4, \infty)$

$\because \ [0,1] \subseteq (-\infty, 3]$ [0.5]

$\therefore \ f(x) - g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$ فتكون

$f(x) \geq g(x) \ , \quad \forall x \in [0,1]$ وتكون

$\therefore \ x^2 - 3x + 7 \geq 4x - 5 \quad \forall x \in [0,1]$ [0.5]

$$\therefore \int_0^1 (x^2 - 3x + 7)\, dx \geq \int_0^1 (4x - 5)\, dx$$ [0.5]

تابع السؤال الثاني :

(b) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين : $f(x) = x \quad , \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$

(6 درجات)

الحل

نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين بوضع

$$f(x) = g(x)$$

$$x = \sqrt[3]{x} \qquad [0.5]$$

بتكعيب الطرفين :

$$x^3 = x \quad \Longrightarrow \quad x^3 - x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x^2 - 1) = 0 \quad [0.5]$$

$$\Longrightarrow \quad x(x-1)(x+1) = 0 \qquad [0.5]$$

نحصل على :

$$x = 0 \ \text{أو} \ x = 1 \ \text{أو} \ x = -1 \qquad [0.5]$$

$$\therefore A = \left| \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (f(x) - g(x))dx \right| \quad [1]$$

$$= \left| \int_{-1}^{0} (x - \sqrt[3]{x})dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (x - \sqrt[3]{x})dx \right| \qquad [0.5]$$

$$= \left| \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} \right]_{-1}^{0} \right| + \left| \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} \right]_{0}^{1} \right| \qquad [1 + 1]$$

$$= \left| 0 - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) \right| + \left| \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) - 0 \right|$$

$$= \left| \frac{1}{4} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2} \ \text{وحدة مربعه} \qquad [0.5]$$

10

السؤال الثالث :

(a) أوجد :

$$\int (x+1)\, e^{x+1} dx$$

(4 درجات)

الحل

$u = x+1$; $dv = e^{x+1}\, dx$

$du = dx$; $v = e^{x+1}$

[2]

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$ [0.5]

$$\int (x+1)\, e^{x+1} dx = (x+1)\, e^{x+1} - \int e^{x+1}\, dx$$ [1]

$$= (x+1)\, e^{x+1} - e^{x+1} + C$$ [0.5]

تابع السؤال الثالث :

(b) حل المعادلة التفاضلية :

$$y' - 2xy = 0$$ (6 درجات)

الحل

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

$$\therefore \ \frac{dy}{dx} = 2xy \qquad [0.5]$$

$$\frac{dy}{y} = 2x dx \qquad [1]$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x \, dx \qquad [0.5]$$

$$ln\,|y| = x^2 + C \qquad [0.5 + 0.5 + 0.5]$$

$$|y| = e^{x^2 + C} \qquad [0.5 + 0.5]$$

$$y = \pm e^{x^2} . e^C \qquad [1]$$

$$= \pm e^C . e^{x^2}$$

$$(k = \pm e^C)$$

$$y = k . e^{x^2} \qquad [0.5]$$

10

السؤال الرابع

(a) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه :

$F(0\,,-\sqrt{5}\,)$ ومعادلة أحد خطيه المقاربين : $y = 2x$

ثم أوجد إختلافه المركزي (6 درجات)

الحل

$\because$ إحدى البؤرتين هي $F(0,-\sqrt{5})$ وهي تقع على محور الصادات

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور الصادات و تكون معادلة القطع الزائد هي :

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$ [0.5]

$\because$ إحدى البؤرتين هي $F(0,-\sqrt{5})$ فتكون $c=\sqrt{5}$ [0.5]

$\because c^2=a^2+b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2+b^2=5 \;\ldots\ldots\ldots(1)$ [0.5]

و معادلة الخطين المقاربين هي : $y=\pm\frac{a}{b}x$

$\because$ معادلة أحد الخطين المقاربين هي : $y=\;2x$

$\frac{a}{b}=2 \;\Rightarrow a=2b \;\ldots\ldots\ldots(2)$ [0.5]

من (1) ، (2)

$(2b)^2+b^2=5$ [0.5]

$5b^2=5$

$b^2=1$ [0.5]

$b=1$ [0.5]

$\therefore \quad a=2(1)=2$ [0.5]

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي :

$$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{1}=1$$ [1]

الإختلاف المركزي هو : [0.5]

$$e=\frac{c}{a}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}$$ [0.5]

جدول الإجابة

(1)	(a)	**(b)**	(c)	(d)
(2)	(a)	**(b)**	(c)	(d)
(3)	**(a)**	(b)	(c)	(d)
(4)	(a)	**(b)**	(c)	(d)
(5)	(a)	(b)	(c)	**(d)**
(6)	(a)	(b)	**(c)**	(d)
(7)	**(a)**	(b)	(c)	(d)
(8)	**(a)**	(b)	(c)	(d)
(9)	(a)	**(b)**	(c)	(d)
(10)	(a)	**(b)**	(c)	(d)

10

الدرجة : ....

المطبعة السرية ديوان عام الوزارة
وزارة التربية
2015-2016
الدور الثاني نسخة التوجيه