دولة الكويت
وزارة التربية
نموذج إجابة امتحان نهاية الفترة الدراسية الأولى للصف الثاني عشر علمي 2018 / 2019 م
المجال الدراسي : الرياضيات الزمن : ساعتان و45 دقيقة الأسئلة في 12 صفحة

القسم الأول : أسئلة المقال

أجب عن الأسئلة التالية موضحاً خطوات الحل في كل منها:

14

السؤال الأول :

(a) أوجد (6 درجات)

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^2-9}{x^2-2x}$$

الحل :

عند التعويض المباشر عن x بـ 2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\frac{(x+1)^2-9}{x^2-2x}=\frac{(x+1-3)(x+1+3)}{x(x-2)} \qquad 1+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{(x-2)(x+4)}{x(x-2)} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{x+4}{x} \quad , \quad x\neq 2 \qquad \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^2-9}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x} \qquad \frac{1}{2}$$

$$\because \lim_{x\to 2} x=2 \quad , \quad 2\neq 0 \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x}=\frac{\lim_{x\to 2}(x+4)}{\lim_{x\to 2}x} \qquad \frac{1}{2}$$

$$=\frac{2+4}{2}=3 \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

تراعى الحلول الأخرى في جميع أسئلة المقال

تابع السؤال الأول : **(8 درجات)**

(b) إذا كانت : $f(x) = 2x + 1 \ , \quad g(x) = x^3$

(1) أوجد $(g \circ f)'(x)$

(2) أوجد معادلة المماس للدالة $(g \circ f)(x)$ **عند النقطة** $A(0, 1)$

الحل :

(1)

1 $\quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) . f'(x)$

1 $\quad g'(x) = 3x^2$

1 $\quad g'(f(x)) = 3\,(2x+1)^2$

1 $\quad f'(x) = 2$

$(g \circ f)'(x) = 3(2x+1)^2 \ (2)$

1 $\quad = 6\,(2x+1)^2$

(2) ميل المماس للدالة $(g \circ f)(x)$ عند $x = 0$

1 $\quad (g \circ f)'(0) = 6(0+1)^2 = 6$

∴ معادلة المماس هي :

$\frac{1}{2}$ $\quad y - y_1 = m\,(x - x_1)$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ $\quad y - 1 = 6\,(x - 0)$

$6x - y + 1 = 0$

14

السؤال الثاني :

(a) لتكن f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

(7 درجات)

أوجد مجال الدالة f ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-1 \ , \ 1]$

الحل :

نفرض أن

$\frac{1}{2}$ $f(x) = \sqrt{g(x)}$ ، $g(x) = x^2 - 7x + 10$

$\frac{1}{2}$ $D_f = \{ x : g(x) \geq 0 \}$

$\frac{1}{2}$ $x^2 - 7x + 10 \geq 0$

المعادلة المناظرة :

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x-2)(x-5) = 0$

1 $x = 2 \quad , \ x = 5$

++ 0 --- 0 ++

2 5

1 $\therefore$ مجال الدالة f هو $(-\infty , 2] \cup [5 \ , \ \infty)$

لدراسة اتصال الدالة f على $[-1 , 1]$

$\frac{1}{2}$ $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty , 2] \cup [5 , \infty)$

$\frac{1}{2}$ $\because$ $[-1 , 1]$ مجموعة جزئية من D_f

1 (1) $\therefore g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1 , 1]$

1 (2) الدالة g : $g(x) = x^2 - 7x + 10$ متصلة على $[-1 , 1]$

من (1) و (2)

$\frac{1}{2}$ $\therefore$ الدالة f متصلة على $[-1 \ , 1]$

تابع السؤال الثاني: (7 درجات)

(b) إذا كانت:

$$y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

أثبت أن $y' = (y \, . \csc x)^2$

الحل :

$$y' = \frac{(\sin x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x)(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$1 + 1 + 1 + \frac{1}{2}$

$$= \frac{\cos x\,(\sin x + \cos x) - \sin x\,(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

1

$$= \frac{\cos x \, . \sin x + \cos^2 x - \sin x . \cos x + \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$\frac{1}{2}$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

1

$$(y \, . \csc x)^2 = \left(\frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)} \cdot \frac{1}{\sin x}\right)^2$$

$\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= y'$$

14

السؤال الثالث:

(a) أوجد

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$

(8 درجات)

الحل :

الدرجة	الحل
	$f(x)=\dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-2x-3}}$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$=\dfrac{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}}$
$\frac{1}{2}$	$=\dfrac{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\lvert x\rvert\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}$
	$\lvert x\rvert=x \;:\; x>0$
$\frac{1}{2}$	$=\dfrac{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}$
$\frac{1}{2}$	$=\dfrac{1-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}} \quad : x\neq 0$
$1+\frac{1}{2}$	$\because \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}$ $=1-0-0=1 \quad ,1>0$
$1+\frac{1}{2}$	$\therefore \lim_{x\to\infty}\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}=\sqrt{1}=1 \quad ,1\neq 0$
1	$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}=1-0=1$
$1\frac{1}{2}$	$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}=\dfrac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}=\dfrac{1}{1}=1$

تابع السؤال الثالث: (6 درجات)

(b) أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها $8\ cm$ واحداً منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعاً ؟

الحل :

بفرض طول البعد الأول للمستطيل هو x وطول البعد الثاني y	
المحيط $= 2x+2y \longrightarrow 8 = 2x+2y$	$\frac{1}{2}$
$4 = x + y \quad \rightarrow y = 4 - x$	$\frac{1}{2}$
$\therefore$ طول البعد الثاني للمستطيل هو $4-x$	
x لا يمكن أن تزيد على 4 أي : $0 < x < 4$	$\frac{1}{2}$
مساحة المستطيل = حاص ضرب البعدين	
$s(x) = x\,.(4-x)$	$\frac{1}{2}$
$= 4x - x^2$	
$s'(x) = 4 - 2x$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
نضع $s'(x)$	
$4 - 2x = 0$	
$x = 2 \in (0, 4)$	$\frac{1}{2}$
$\therefore (2, s(2))$ نقطة حرجة	
$s''(x) = -2 \quad , \quad -2 < 0$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
$\therefore$ توجد قيمة عظمى مطلقة عند $x = 2$	
$\therefore$ أكبر مساحة ممكنة للمستطيل عند $x = 2$	$\frac{1}{2}$
$\therefore$ البعد الأول للمستطيل هو $x = 2\ cm$	
والبعد الثاني هو $4 - x = 4 - 2 = 2\ cm$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
$\therefore$ المستطيل يصبح مربع لأن بعداه متساويان	

وزارة التربية - الكنترول المركزي - لجنة تقدير الدرجات

وزارة التربية - التوجيه الفني العام للرياضيات

14

السؤال الرابع:

(a) ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$
ثم ارسم بيانها

(9 درجات)

الحل :

$\frac{1}{2}$ f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة

$\frac{1}{2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty \\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 2x^3 = \infty \end{array} \right.$

نوجد النقاط الحرجة حيث f دالة قابلة للإشتقاق على مجالها

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ $f'(x) = 6x^2 + 6x$

$\frac{1}{2}$ نضع $f'(x) = 0$

$6x^2 + 6x = 0$

$6x(x+1) = 0$

$6x = 0 \to x = 0$ أو $x + 1 = 0 \to x = -1$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ $f(0) = -1 \quad , f(-1) = 0$

النقاط الحرجة $(0\,,-1)$, $(-1\,,0)$

نكون جدول التغير لدراسة اشارة f'

$-\infty \qquad -1 \qquad 0 \qquad \infty$

$1\frac{1}{2}$

الفترات	$(-\infty\,,-1)$	$(-1\,,0)$	$(0\,,\infty)$
اشارة f'	+ + + +	- - - -	+ + + +
سلوك الدالة f	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗

الدالة f متزايدة في الفترة $(-\infty\,,-1)$ والفترة $(0\,,\infty)$

الدالة f متناقصة في الفترة $(-1\,,0)$

للدالة f قيمة عظمى محلية عند $x = -1$ وقيمة صغرى محلية عند $x = 0$

$\frac{1}{2}$ $f''(x) = 12x + 6$

نضع

$f''(x) = 0$

$\frac{1}{2}$ $12x + 6 = 0 \quad \to \quad x = \frac{-1}{2}$

1

$-\infty \qquad -\frac{1}{2} \qquad \infty$

الفترات	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \infty)$
إشارة f''	$- - -$	$+ + +$
التقعر	$\cap$	$\cup$

منحنى الدالة مقعر للأسفل على الفترة $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

منحنى الدالة مقعر للأعلى على الفترة $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

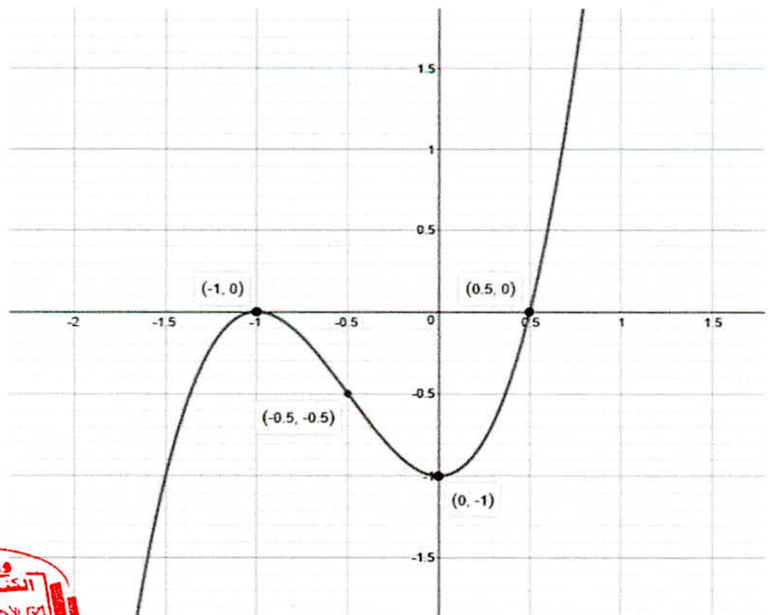
$\frac{1}{2}$

$\therefore \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ نقطة انعطاف

نقاط اضافية

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	-5	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	4

$1\frac{1}{2}$



تابع السؤال الرابع: (5 درجات)

(b) أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 40$ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ ، والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 76.3$.

استخدم مستوى ثقة 95% لإيجاد:

1) هامش الخطأ

2) فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ

الحل :

1) ∵ مستوى الثقة 95%

1 ∴ القيمة الحرجة : نستخدم توزيع $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

نلاحظ أن σ معلومة

$\because n = 40 \quad , \sigma = 12.5 \quad , \quad \bar{x} = 76.3$

1 هامش الخطأ هو : $\therefore \mathrm{E} = \mathrm{Z}_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

1 $= (1.96) \cdot \frac{12.5}{\sqrt{40}} \approx 3.87379$

∴هامش الخطأ ≈ 3.8738

2) فترة الثقة هي : $(\bar{x} - E , \bar{x} + E)$

2 $= (76.3 - 3.8738 \ , \ 76.3 + 3.8738 \ )$

$= (72.4262 \ , \ 80.1738)$

القسم الثاني (البنود الموضوعية) :

أولا : في البنود (1-4) ظلل في ورقة الإجابة: (a) إذا كانت العبارة صحيحة
(b) إذا كانت العبارة خاطئة

---

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2+5\sin^2 x}{3x^2} = 3$

---

(2) إذا كانت $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{ax^3+bx^2+4}{3x^2-2x+1} = -1$ فإن $a = -3 \,,\, b = -2$

---

(3) الدالة f : $f(x) = x\,|x|$ قابلة للإشتقاق $\forall\, x \in \mathbb{R}$

---

(4) الدالة f: $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة $[-1\,,2]$

ثانياً : في البنود (5 -14) لكل بند أربع اختيارات واحد فقط منها صحيح ظلل في ورقة الإجابة الرمز الدال على الاختيار الصحيح

---

(5) إذا كانت الدالة f : $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2x-1}}$ فإن $f'(1)$ تساوي

$(a)\ -\dfrac{3}{2}$ $(b)\ \dfrac{3}{2}$ $(c)\ -3$ $(d)\ 3$

---

(6) ميل الناظم لمنحنى الدالة f : $f(x) = \dfrac{2}{x}$ عند $x = -2$ هي :

$(a)\ -2$ $(b)\ \dfrac{-1}{2}$ $(c)\ \dfrac{1}{2}$ $(d)\ 2$

---

(7) للدالة f : $f(x) = -3x+1$ قيمة عظمى مطلقة في $[0,3]$ عند

(a) $x=3$ (b) $x=1$ (c) $x=0$ (d) $x=-8$

---

(8) الدالة f : $f(x) = \dfrac{x+1}{25-x^2}$ متصلة على :

(a) $\mathbb{R}$
(b) $[-5,5]$
(c) $\mathbb{R}\setminus\{-5,5\}$
(d) $(-\infty, 25)$

---

(9) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=-2$ وكانت $\lim\limits_{x\to-2}(x^2+f(x))=7$ ،

فإن $f(-2)$ تساوي :

(a) 3 (b) 5 (c) 9 (d) 11

---

(10) إذا كان $x^2+y^2=25$ ، فإن $\dfrac{dy}{dx}$ تساوي

(a) $\dfrac{x}{y}$ (b) $\dfrac{-x}{y}$ (c) $2x+2y$ (d) $-x$

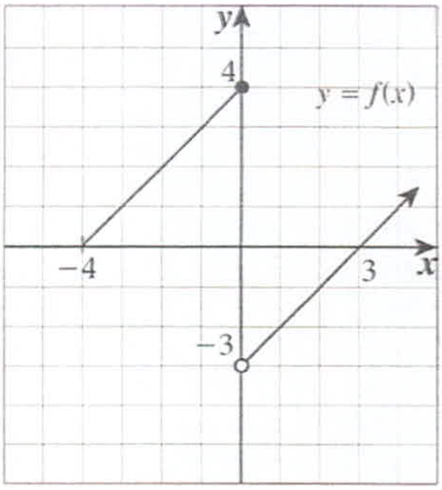
---

(11) عدد النقاط الحرجة للدالة : $y=3x^2-9x-4$ على الفترة $(-2, 0)$ هو :

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

---

(12) إذا كان الشكل المقابل هو بيان دالة f فإن العبارة الصحيحة في ما يلي هي :



(a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$

(b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$

(c) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -3$

(d) $\lim_{x\to 0} f(x) = -3$

---

(13) أي منحنيات الدوال التالية يكون مقعراً للأسفل في $(-1 , 1)$:

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = -x^3$

(c) $f(x) = x^2$ (d) $f(x) = -x^2$

---

(14) إذا كان القرار قبول فرض العدم ، وفترة الثقة $(-1.96 , 1.96)$ فإن قيمة الإختبار Z يمكن أن تكون :

(a) -2.5 (b) -2 (c) 1.5 (d) 1.99

انتهت الأسئلة

جدول إجابة البنود الموضوعية

(1)	**(a)**	(b)		
(2)	(a)	**(b)**		
(3)	**(a)**	(b)		
(4)	(a)	**(b)**		
(5)	(a)	(b)	**(c)**	(d)
(6)	(a)	(b)	(c)	**(d)**
(7)	(a)	(b)	**(c)**	(d)
(8)	(a)	(b)	**(c)**	(d)
(9)	**(a)**	(b)	(c)	(d)
(10)	(a)	**(b)**	(c)	(d)
(11)	(a)	(b)	(c)	**(d)**
(12)	(a)	**(b)**	(c)	(d)
(13)	(a)	(b)	(c)	**(d)**
(14)	(a)	(b)	**(c)**	(d)

الدرجة: ....

14