محمد جبر الخوالده

الملف الوحدة الثامنة حساب المثلثات
موقع المناهج ⇦ المناهج الكويتية ⇦ الصف العاشر ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني

وزارة التربية
MINISTRY OF EDUCATION

مذكرة الرياضيات

الصف العاشر

10

Math
2024-2025
أ.محمد جبر الخوالده

الفصل الدراسي الثاني

2024-2025

الوحدة الثامنة

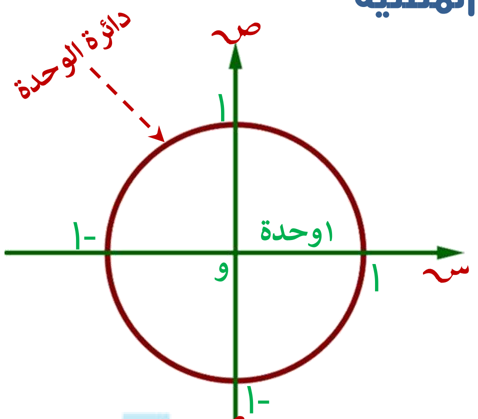
حساب المثلثات

البند	الدرس
٨ – ١	دائرة الوحدة و الدوال المثلثية
٨ – ٢	العلاقات بين الدوال المثلثية(1)
٨ – ٣	العلاقات بين الدوال المثلثية(2)

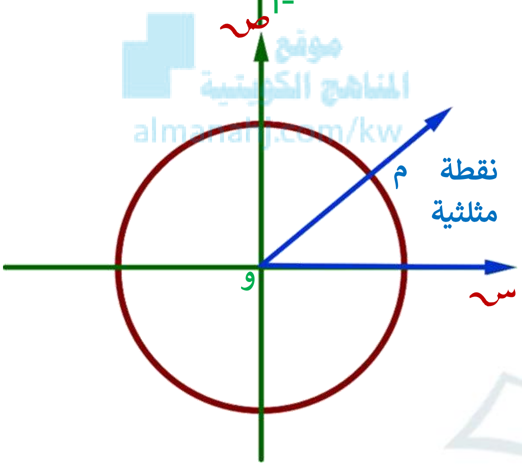
Math
2024-2025
أ.محمد جبر الخوالده

الوحدة الثامنة : حساب المثلثات(٢)

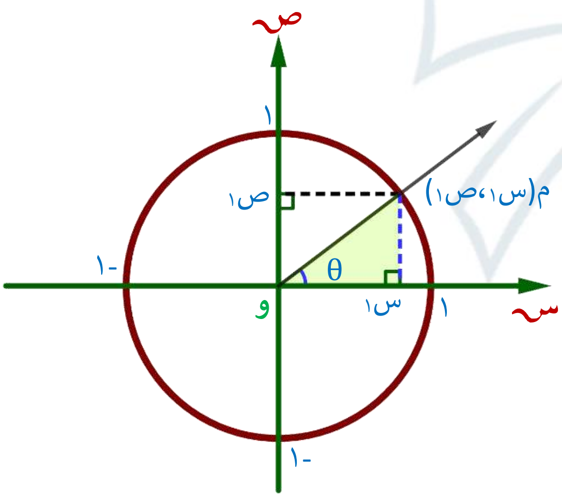
٨-١ دائرة الوحدة في المستوي الإحداثي و الدوال المثلثية



دائرة الوحدة : هي دائرة مركزها نقطة الأصل و ، و طول نصف قطرها واحد وحدة .



النقطة المثلثية : هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة .



النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ

جتاθ = س$_{١}$ ، جاθ = ص$_{١}$

ظاθ = $\frac{ص_{١}}{س_{١}}$ ، س$_{١}$ $\neq$ ٠ ، ظتاθ = $\frac{س_{١}}{ص_{١}}$ ، ص$_{١}$ $\neq$ ٠

قاθ = $\frac{١}{س_{١}}$ ، س$_{١}$ $\neq$ ٠ ، قتاθ = $\frac{١}{ص_{١}}$ ، ص$_{١}$ $\neq$ ٠

الدوال الدائرية (المثلثية)

تعريف : إذا كانت (س،ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ حيث $\cdot \leq \theta < 2\pi$ فإن :

(١) دالة الجيب :د(θ) = جاθ حيث جاθ = ص

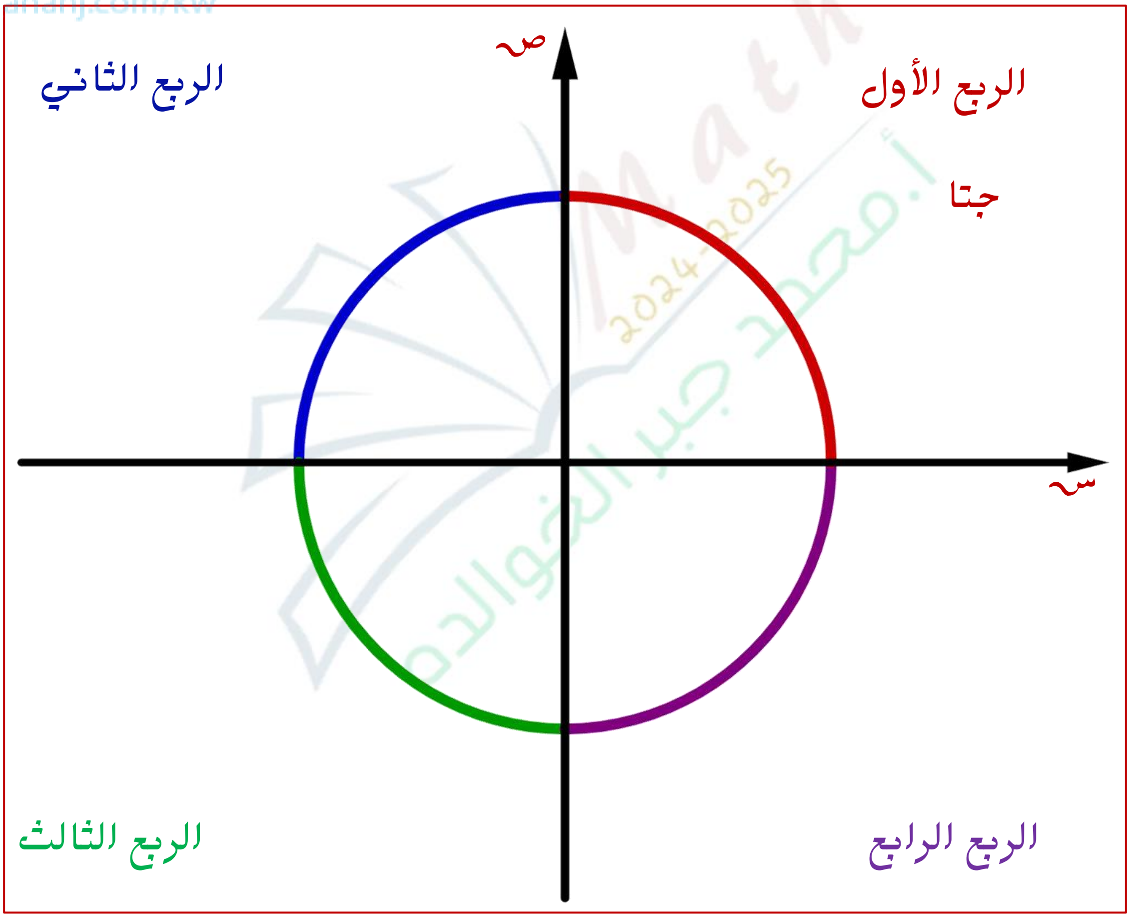
(٢) دالة جيب التمام :د(θ) = جتاθ حيث جتاθ = س

(٣) دالة الظل :د(θ) = ظاθ حيث ظاθ = $\frac{ص}{س}$ ، س ≠ ٠

(٤) دالة القاطع :د(θ) = قاθ حيث قاθ = $\frac{1}{س}$ ، س ≠ ٠

(٥) دالة قاطع التمام :د(θ) = قتاθ حيث قتاθ = $\frac{1}{ص}$ ، ص ≠ ٠

(٦) دالة ظل التمام :د(θ) = ظتاθ حيث ظتاθ = $\frac{س}{ص}$ ، ص ≠ ٠



حاول أن تحل (٢) صفحة ٨١

أ) إذا كانت ٩٠° < θ < ٢٧٠° ماهي إشارة جتاθ ؟

الحل :

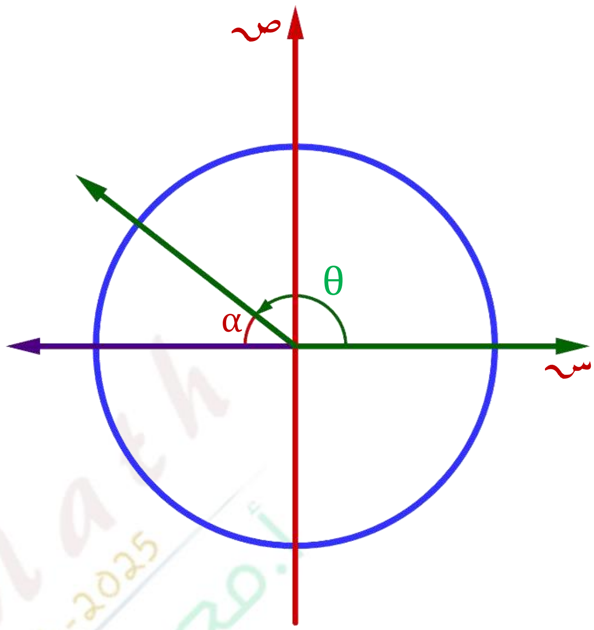
ب) إذا كانت ٠ < θ < π ماهي إشارة جاθ ؟

الحل :

تعريف زاوية الإسناد :

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة ($\overleftarrow{\text{وب}}$ ، $\overleftarrow{\text{وجـ}}$) التي في الوضع القياسي هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات .

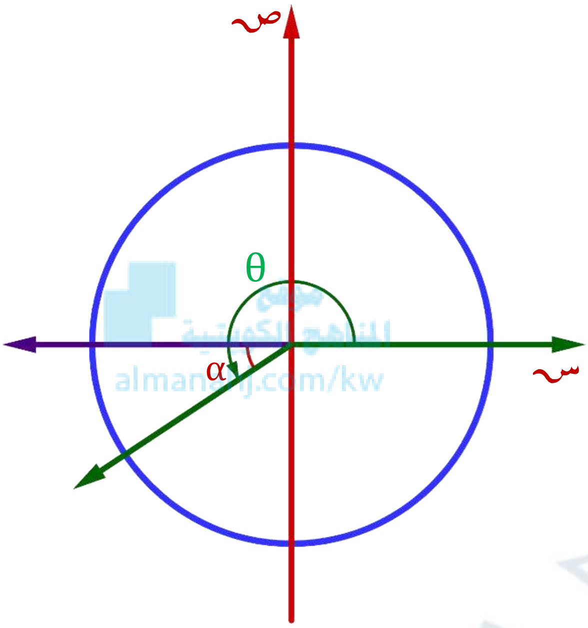
فإذا كان α زاوية الإسناد فإن : $٠^\circ < \alpha < ٩٠^\circ$



عندما θ تقع في الربع الثاني

$\alpha^\circ = ١٨٠^\circ - \theta^\circ$

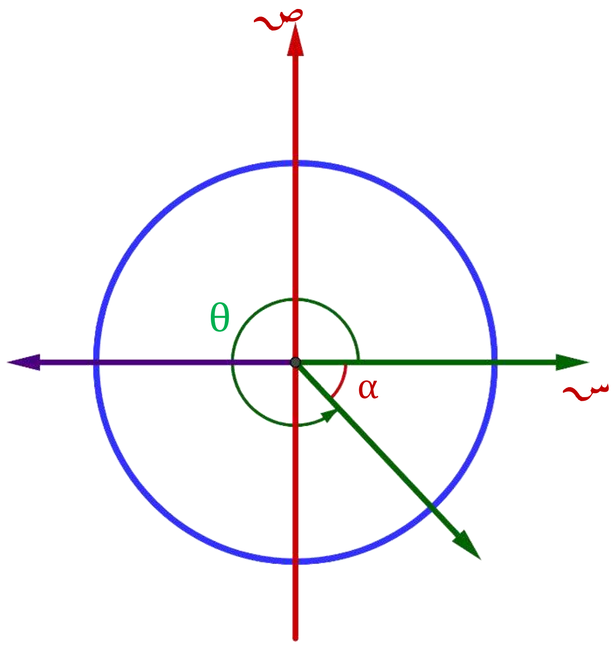
$\alpha^{د} = \pi - \theta^{د}$



عندما θ تقع في الربع الثالث

$\alpha^\circ = \theta^\circ - ١٨٠^\circ$

$\alpha^{د} = \theta^{د} - \pi$



عندما θ تقع في الربع الرابع

$\alpha^\circ = ٣٦٠^\circ - \theta^\circ$

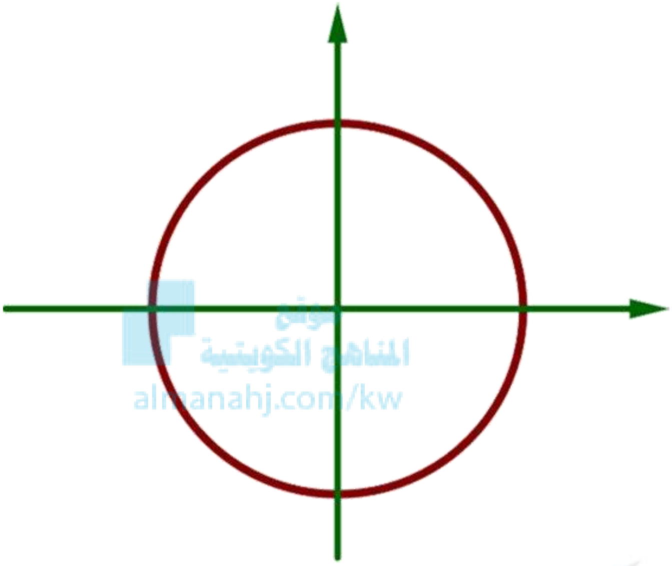
$\alpha^{د} = ٢\pi - \theta^{د}$

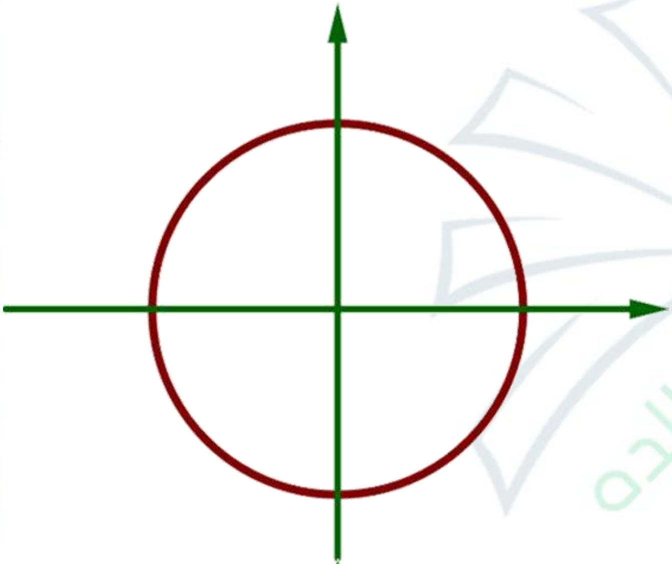
مثال (٣) صفحة ٩٣

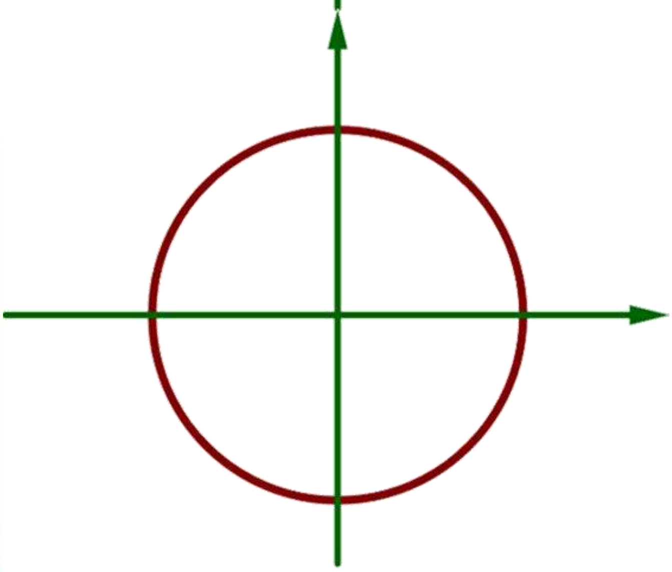
ارسم كلاً من الزوايا الموجهة في وضع قياسي ، ثم عيّن زاوية الإسناد و أوجد قياسها لكل مما يلي :

أ) ١٢٥° ب) ٢١٥° ج) $\frac{١١\pi}{٦}$

الحل :







٨- ٢ العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

النسب المثلثية للزاويتين θ ، − θ

جتا(− θ) = جتا θ ، جا(− θ) = − جا θ ، ظا(− θ) = −ظا θ

حاول أن تحل (١) صفحة ٩٦

أكمل إذا كان :

أ) جا م = ٠,٣ فإن جا(−م) = ...

ب) جتا ل = ٠,٣٨ فإن جتا(−ل) = ...

ج) ظا س = ٣,١٤ فإن ظا(−س) = ...

د) جتا(−ص) = $\frac{١}{٤}$ فإن جتا ص = ...

النسب المثلثية للزاويتين θ ، (π − θ)

جتا(π − θ) = −جتا θ ، جا(π − θ) = جا θ ، ظا(π − θ) = −ظا θ

حاول أن تحل (٢) صفحة ٩٧

بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان :

أ) جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ فأوجد جا ١٥٠°

الحل :

ب) جتا س = $\frac{٤}{٥}$ فأوجد جتا(π − س)

الحل :

ج) ظا $\frac{\pi}{١٢}$ = ٢ − $\sqrt{٣}$ فأوجد ظا $\frac{١١\pi}{١٢}$

الحل :

النسب المثلثية للزاويتين θ ، $(\pi + \theta)$

جا$(\pi + \theta)$ = −جاθ ، جتا$(\pi + \theta)$ = −جتاθ ، ظا$(\pi + \theta)$ = ظاθ

مثال(٣) صفحة ٩٨

بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان :

أ) جا٣٠° = $\frac{١}{٢}$ فأوجد جا٢١٠°

الحل :

ب) ظا$\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$ فأوجد ظا $\frac{٩\pi}{٨}$

الحل :

مثال(٤) صفحة ٩٨

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد :

أ) جا١٥٠° ب) جتا٢٤٠° ج) ظا$\frac{٢\pi}{٣}$

الحل :

النسب المثلثية للزاويتين θ ، $\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

جا$\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ = −جتاθ ، جتا$\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ = جاθ ، ظا$\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ = −ظتاθ

النسب المثلثية للزاويتين θ ، $\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

جا$\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ = جتاθ ، جتا$\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ = −جاθ ، ظا$\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ = −ظتاθ

إذا كان ك عدداً صحيحاً فإن :

جا(θ + ٢ك π) = جاθ ، جتا(θ + ٢ك π) = جتاθ ، ظا(θ + ك π) = ظاθ

مثال(٥) صفحة١٠٢ بسط التعبير التالي لأبسط صورة

جا س + جا (٩٠° + س) + جا (١٨٠° + س) + جا (٩٠° − س)

الحل :

تمرين(١) صفحة٩٩ بسط التعبيرات التالية لأبسط صورة :

أ) جتا (π − θ) − جتا (− θ) + جا (π + θ) + جتا $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

الحل :

ب) جا (π + θ) − جتا (θ + $\frac{\pi}{2}$) + جتا (θ − π) + جا (θ + $\frac{\pi}{2}$)

الحل :

حاول أن تحل(٢) صفحة٩٧ بسط التعبيرات التالية لأبسط صورة :

أ) جتا (θ + ٩π)

ب) جتا(- $\frac{\pi}{2}$ − θ)

الحل :

حل معادلات مثلثية

حل المعادلة : جتاس = جتاθ هو :

س = θ + ٢ ك π أو س = − θ + ٢ ك π (ك∈ ص)

جيب تمام الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع

مثال (٦) صفحة ١٠٣

حل كلاً من المعادلتين :

أ) جتاس = $\frac{١}{٢}$

الحل :

ب) ٢جتاس − $\sqrt{٣}$ = ٠

الحل :

حاول أن تحل (٦) صفحة ١٠٣

حل المعادلة : $\sqrt{٢}$ جتاس = ١

الحل :

حل المعادلة : جاس = جاθ هو :

س = θ + ٢ ك π أو س =($\pi - \theta$) + ٢ ك π (ك$\in$ ص)

جيب الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني

مثال (٧) صفحة ١٠٤

حل كلاً من المعادلتين :

أ) جاس = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل :

ب) ٢جاس = $\sqrt{2}$

الحل :

حاول أن تحل (٧) صفحة ١٠٤

حل المعادلة : ٢جاس – ١ = ٠

الحل :

حل المعادلة : ظاس = ظاθ هو : س = θ + ك π (ك $\in$ ص)

ظل الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث

مثال(٨)صفحة١٠٥

حل المعادلة : ظاس = $\sqrt{3}$

الحل :

حاول أن تحل(٨)صفحة١٠٥

حل المعادلة : $\sqrt{3}$ ظاس = ١

الحل :

٨- ٣ العلاقات بين الدوال المثلثية(٢)

المتطابقات المثلثية الأساسية		متطابقات فيثاغورث
ظاθ=$\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$	ظتاθ=$\frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$	جا^{٢} θ + جتا^{٢} θ = ١
قاθ=$\frac{١}{\text{جتا}\theta}$	قتاθ=$\frac{١}{\text{جا}\theta}$	١ + ظا^{٢} θ = قا^{٢} θ
		١ + ظتا^{٢} θ = قتا^{٢} θ

مثال(١) صفحة١٠٨

بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان جتاθ = ٠,٤ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$ فأوجد جاθ ، ظاθ

الحل :

حاول أن تحل (١) صفحة ١٠٨

بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٥}$ ، ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$ فأوجد جتاθ ، ظاθ

الحل :

مثال (٢) صفحة ١٠٩

بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظاθ = $٢\sqrt{٢}$ ، جتا θ < ٠ فأوجد جاθ ، جتاθ

الحل :

حاول أن تحل (٢) صفحة ١٠٩

بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظاθ = $\frac{٣}{٤}$ ، جا θ > ٠ فأوجد جاθ ، جتاθ

الحل :

مثال (٣) صفحة ١١٠

بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظاθ = $\frac{١٢}{٥}$ ، جا θ < ٠ فأوجد جاθ ، جتاθ

الحل :

مثال (٤) صفحة ١١١

بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان جاθ = $\frac{٣}{٧}$ ، جتا θ < ٠ فأوجد ظتاθ ، ظاθ

الحل :

حاول أن تحل (٤) صفحة ١١١

بدون استخدام الآلة الحاسبة إذا كان ظتاθ = $\frac{٥}{٨}$ ، جتا θ < ٠ فأوجد جاθ

الحل :

مثال (٥) صفحة ١١٢

أثبت صحة المتطابقة التالية : جا^{٣}س + جاس × جتا^{٢}س = جاس

الحل :

حاول أن تحل (٥) صفحة ١١٢

أثبت صحة المتطابقة : جتا^{٤}س + جا^{٢}س × جتا^{٢}س = جتا^{٢}س

الحل :

مثال (٦) صفحة ١١٢

أثبت صحة المتطابقة التالية : $\frac{(\text{قا}\theta + 1)(\text{قا}\theta - 1)}{\text{جا}^2\theta} = \text{قا}^2\,\theta$

الحل :

حاول أن تحل (٦) صفحة ١١٢

أثبت صحة المتطابقة : $(\text{قا}^2\,\theta + \text{قتا}^2\,\theta) - (\text{ظا}^2\,\theta + \text{ظتا}^2\,\theta) = 2$

الحل :

البنود الموضوعية

في التمارين (١ - ١٨) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة و (ب) إذا كانت العبارة خاطئة.

(١) جتا(−٣٠٠°) $= \frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٢) جا(١٢٠°) $= \frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٣) ظا(−١٥٠°) $= \frac{١}{\sqrt{٣}}$ (أ) (ب)

(٤) قا(٣١٥°) $= \sqrt{٢}$ (أ) (ب)

(٥) إذا كانت جاθ = ٠,٢ فإن جا$(\pi + \theta)$ = ٠,٢ (أ) (ب)

(٦) إذا كانت جتا$\theta = \frac{٢}{٣}$ فإن قا$\theta = \frac{٣}{٢}$ (أ) (ب)

(٧) إذا كانت ظاθ = ٣ فإن ظتا$(\pi + \theta)$ = ٣ (أ) (ب)

(٨) إذا كانت جا$\theta = \frac{١}{٥}$ فإن قتا$(\pi + \theta)$ = −٥ (أ) (ب)

(٩) إذا كان جاس $= \sqrt{٣}$ فإن مجموعة الحل = $\emptyset$ (أ) (ب)

(١٠) إذا كان جتاس $= \frac{١}{٢}$ فإن س $= \frac{\pi}{٣}$ (أ) (ب)

(١١) إذا كانت س $= \frac{\pi}{٦}$ فإن جاس $= \frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(١٢) مجموعة حل المعادلة قا س = ٠,٣ هي $\emptyset$ (أ) (ب)

(١٣) ظا(١٥ π) = صفر (أ) (ب)

(١٤) قتا θ × جتا θ – ظتا θ = ٠   أ   ب

(١٥) ظتا^٢(– θ) – قتا^٢ θ = –١   أ   ب

(١٦) (قا θ + ظا θ) (قا θ – ظا θ) = ١   أ   ب

(١٧) جا θ قتا θ – جتا^٢ θ – جا^٢ θ = ٠   أ   ب

(١٨) ظا θ + ظتا θ – قا θ قتا θ = ٠   أ   ب

في التمارين (١٩ - ٣١) ظلل الرمز الدال على الإجابة صحيحة .

(١٩) الزاوية التي في الوضع القياسي و قياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي :

أ ١٩٠°   ب ١٧٠°   ج ٣٥٠°   د ١١٠°

(٢٠) الزاوية التي في الوضع القياسي و ضلعها النهائي يمر بالنقطة م $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$ التي تقع على دائرة الوحدة هي :

أ ٤٥°   ب ٢٢٥°   ج ١٣٥°   د ٣٣٠°

(٢١) الزاوية التي يقع ضلعها النهائي في الربع الرابع في ما يلي هي :

أ –٣٢٠°   ب –٢٧٠°   ج $\frac{٥\pi}{٣}$ د $\frac{١٣\pi}{٩}$

(٢٢) الزاوية التي في الوضع القياسي و قياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{٣}$ هي :

أ $\frac{١١\pi}{٦}$ ب ٢٥٥°   ج $\frac{٧\pi}{٨}$ د $\frac{٥\pi}{٣}$

(٢٣) زاوية في الوضع القياسي قياسها -٢٥٥° فإن النقطة المثلثية التي يمكن أن تقع على الضلع النهائي لها هي :

أ $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ ب $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$ ج $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ د (–١ ،١)

(٢٤) $[\text{جا}(-135^\circ)]^2 + [\text{جتا}(-135^\circ)]^2 =$

أ) ١ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) صفر

(٢٥) جاس × قاس =

أ) ظتاس ب) ظاس ج) قتاس د) قاس

(٢٦) إن قيمة المقدار جا(π + س) – جتا(س + $\frac{\pi}{2}$) هي :

أ) ١ ب) صفر ج) $\frac{1}{2}$ د) ١–

(٢٧) إن قيمة المقدار قا($2\pi - \theta$) – قتا($\frac{\pi}{2} + \theta$) + جتا($\frac{\pi}{2} + \theta$) + جاθ هي :

أ) ١– ب) $\frac{1}{2}$ ج) صفر د) ١

(٢٨) حل المعادلة ظاθ = $\sqrt{3}$ حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ هو :

أ) $\frac{\pi}{3}$ ب) $\frac{2\pi}{3}$ ج) $\frac{\pi}{6}$ د) $\frac{4\pi}{3}$

(٢٩) إذا كانت جتاθ = $-\frac{5}{7}$ ، θ تقع في الربع الثالث فإن جاθ =

أ) $\frac{-7}{2\sqrt{6}}$ ب) $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ ج) $\frac{-2\sqrt{6}}{7}$ د) $\frac{7}{2\sqrt{6}}$

(٣٠) إذا كانت قاθ = $\frac{3}{2}$ ، θ تقع في الربع الرابع فإن ظاθ =

أ) $\frac{-2}{\sqrt{5}}$ ب) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ج) $\frac{-\sqrt{5}}{2}$ د) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(٣١) جا^{3}س + جاس × جتا^{2}س =

أ) جاس ب) جتاس ج) ١ د) ١–