دولة الكويت
وزارة التربية
التوجيه الفني العام للرياضيات

المجال الدراسي : الرياضيات
الزمن : ساعتان و45 دقيقة
عدد الصفحات : 11

نموذج اجابة امتحان الفترة الدراسية الثانية للصف الثاني عشر علمي للعام الدراسي : 2024/2023 م

القسم الأول – أسئلة المقال
تراعى الحلول الأخرى في جميع أسئلة المقال

السؤال الأول : (15 درجة)

(a) أوجد $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^{3}}\,dx$ (8 درجات)

الحل:

1 $$u=\sqrt{x}+2$$

1 + 1 $$du=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow 2\,du=\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

1 $$\int \frac{5}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^{3}}\,dx=\int \frac{5}{u^{3}}\,(2du)$$

1 $$\int \frac{10}{u^{3}}\,du=10\int u^{-3}du$$

2 $$=-5\,u^{-2}+C$$

1 $$=-5\left(\sqrt{x}+2\right)^{-2}+C$$

$$=\frac{-5}{\left(\sqrt{x}+2\right)^{2}}+C$$

تابع السؤال الأول :

(b) لتكن $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة قطع زائد

أوجد :

1) رأسي القطع الزائد

2) معادلتي دليلي القطع

(7 درجات)

الحل :

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

المعادلة على الصورة : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — $\frac{1}{2}$

المحور القاطع على محور السينات

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ — $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$ — $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

1) رأسا القطع الزائد هما: $A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$ — $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

2) لإيجاد معادلتي دليلي القطع نوجد c

$c^2 = a^2 + b^2$ — $\frac{1}{2}$

$c^2 = 25 + 16$ — $\frac{1}{2}$

$c = \sqrt{41}$ — $\frac{1}{2}$

معادلتا دليلي القطع: $x = \frac{a^2}{c}$, $x = \frac{-a^2}{c}$ — $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$x = \frac{25}{\sqrt{41}} = \frac{25\sqrt{41}}{41}$, $x = \frac{-25}{\sqrt{41}} = \frac{-25\sqrt{41}}{41}$ — $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

كنترول القسم العلمي
لجنة تقدير الدرجات

السؤال الثاني : (15 درجة)

(a) حدد نوع القطع فيما يلي ثم أوجد معادلته : (6 درجات)

اختلافه المركزي $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$ و احدى بؤرتيه $F(0\,,-\sqrt{7})$

الحل :

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\because e = \frac{\sqrt{7}}{4}\ ,\ \frac{\sqrt{7}}{4} < 1$

$\therefore$ القطع هو قطع ناقص

$\because$ احدى البؤرتين $F(0\,,-\sqrt{7})$

$\frac{1}{2}$ $\therefore$ المحور الأكبر ينطبق على المحور الصادي و مركزه نقطة الأصل

$\frac{1}{2}$ $\because F(0\,,-\sqrt{7}) \Rightarrow c = \sqrt{7}$

$\frac{1}{2}$ $\because e = \frac{c}{a}$

$\frac{1}{2}$ $\therefore \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{a}$

$\frac{1}{2}$ $\therefore a = 4$

$\frac{1}{2}$ في القطع الناقص يكون : $a^2 = b^2 + c^2$

$b^2 = a^2 - c^2$

$\frac{1}{2}$ $b^2 = 4^2 - (\sqrt{7})^2 = 16 - 7 = 9$

$\frac{1}{2}$ معادلة القطع الناقص : $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

1 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1$

تابع السؤال الثاني :

(b) لتكن الدالة : $f(x) = \dfrac{-x+10}{x^2+x-12}$ (9 درجات)

فأوجد :

1) الكسور الجزئية

2) $\int f(x)dx$

الحل :

(1

$\frac{1}{2}$ $$x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$$

1 $$\frac{-x+10}{x^2+x-12} = \frac{A_1}{x+4} + \frac{A_2}{x-3}$$

1 $$-x+10 = A_1(x-3) + A_2(x+4)$$

نعوض عن x بـ (3)

$\frac{1}{2}$ $$-3+10 = A_1(0) + A_2(3+4)$$

$\frac{1}{2}$ $$\therefore A_2 = 1$$

نعوض عن x بـ (-4)

$\frac{1}{2}$ $$4+10 = A_1(-4-3) + A_2(0)$$

$\frac{1}{2}$ $$\therefore A_1 = -2$$

1 $$\frac{-x+10}{x^2+x-12} = \frac{-2}{x+4} + \frac{1}{x-3}$$

(2

1 $$\int f(x)\,dx = \int \frac{-x+10}{x^2+x-12}dx$$

$$= \int \left(\frac{-2}{x+4} + \frac{1}{x-3}\right) dx$$

$$= \int \frac{-2}{x+4}\,dx + \int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= -2\int \frac{1}{x+4}\,dx + \int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$2\frac{1}{2}$ $$= -2\ \ln|x+4| + \ln|x-3| + C$$

السؤال الثالث : (15 درجة)

(a) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}}$

في الفترة $[2,5]$ (6 درجات)

الحل :

$$f(x) = \frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}}$$

1 $$f'(x) = \frac{2}{9} \times 3 \times \frac{3}{2}(9+3x)^{\frac{1}{2}}$$

$\frac{1}{2}$ $$f'(x) = (9+3x)^{\frac{1}{2}}$$

$\frac{1}{2}$ $$L = \int_2^5 \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

$\frac{1}{2}$ $$= \int_2^5 \sqrt{1+\left((9+3x)^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_2^5 \sqrt{1+9+3x}\, dx$$

$$= \int_2^5 \sqrt{10+3x}\, dx$$

$\frac{1}{2}$ $$= \frac{1}{3}\int_2^5 3(10+3x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$1\frac{1}{2}$ $$= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(10+3x)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5$$

1 $$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\left[(25)^{\frac{3}{2}} - (16)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$\frac{1}{2}$ $$= \frac{122}{9}$$ وحدة طول

تابع السؤال الثالث :

(b) أوجد كلا مما يلي : (9 درجات)

1) $\int x\sin(5x)\ \ dx$

الحل:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $u = x \qquad dv = \sin(5x)\,dx$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $du = dx \qquad v = \frac{-1}{5}\cos(5x)$

$\frac{1}{2}$ $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$

1 $\int x\sin(5x)\ \ dx = \frac{-1}{5}x\cos(5x) + \frac{1}{5}\int \cos(5x)\ \ dx$

$1\frac{1}{2}$ $= \frac{-1}{5}x\cos(5x) + \frac{1}{25}\sin(5x) + C$

---

2) $\int \left(\frac{3x^2 - x}{x}\right)^2\ \ dx$

الحل:

$\frac{1}{2}$ $\int \left(\frac{3x^2 - x}{x}\right)^2\ \ dx = \int \left(\frac{x(3x-1)}{x}\right)^2 dx$

$\frac{1}{2}$ $= \int (3x-1)^2\,dx$

1 $= \int (9x^2 - 6x + 1)\ \ dx$

2 $= 3x^3 - 3x^2 + x + C$

السؤال الرابع : (15 درجة)

(a) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى القطع المكافئ $y_1 = 2 - x^2$

و المستقيم $y_2 = -x$ (8 درجات)

الحل :

لايجاد الاحداثيات السينية لنقطتي التقاطع نضع

$$y_1 = y_2$$

$\frac{1}{2}$ $\quad 2 - x^2 = -x$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$\frac{1}{2}$ $\quad (x-2)(x+1) = 0$

$\frac{1}{2}$ $\quad x = 2$ أو $x = -1$

$\therefore$ حدا التكامل هما $-1, 2$

نأخذ قيمة اختيارية تنتمي الى الفترة $(-1, 2)$ و لتكن $x = 0$

$\frac{1}{2}$ $\quad y_1 = 2 - (0)^2 = 2 \quad , \quad y_2 = 0$

1 $\quad \because y_1 \geq y_2 \qquad \forall\, x \in [-1, 2]$

1 $\quad \therefore$ مساحة المنطقة هي: $A = \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)dx$

1 $\quad = \int_{-1}^{2} (2 - x^2 - (-x))dx$

$1\frac{1}{2}$ $\quad = \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}$

1 $\quad = \left[\left(2(2) - \frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2}\right) - \left(2(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2}\right)\right]$

$\frac{1}{2}$ $\quad = \frac{9}{2}$ وحدة مربعة

تابع السؤال الرابع:

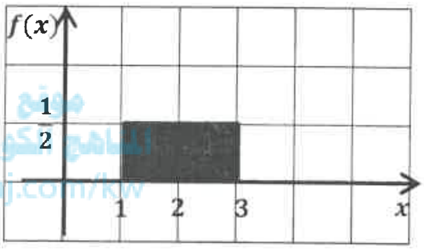
(b) لتكن الدالة f : $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : 1 \le x \le 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$ (7 درجات)

1) أثبت أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال

2) أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم

3) أوجد التوقع و التباين للدالة f

الحل:



$\frac{1}{2}$ للرسم

1) مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض $1\frac{1}{2}$

$$= 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$\because$ المساحة تحت المنحنى تساوي 1 $\frac{1}{2}$

$\therefore$ الدالة f هي دالة كثافة احتمال

2) لاثبات أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدالة على الصورة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : a \le x \le b \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$\because a = 1 , b = 3 \Rightarrow b - a = 3 - 1 = 2$$ $\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2}$$ $\frac{1}{2}$

و بالتالي $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : 1 \le x \le 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$ $\frac{1}{2}$

أي أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم

3) التوقع : $$\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

التباين : $$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{1}{3}$$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

القسم الثاني : البنود الموضوعية

أولا: في البنود من (1) إلى (3) عبارات ظلل ⓐ **إذا كانت العبارة صحيحة**
ⓑ **إذا كانت العبارة خاطئة .**

---

(1) $\int (-x^{-3} + x - 1)\ dx = \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{2}x^{2} - x + C$

---

(2) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ وبؤرته $(0\ ,2)$ هي : $x^2 = 8y$

---

(3) الجدول المقابل يمثل دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير X ، فإن قيمة K هي 0.5

x	1	2	3
$f(x)$	K	$2K$	$2K$

ثانيا : في البنود من (4) إلى (10) لكل بند أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ظلل في ورقة الإجابة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة .

---

(4) $\int csc(5x)cot(5x)\ dx$ يساوي :

ⓐ $\frac{1}{5}csc(5x) + C$ ⓑ $csc(5x) + C$

ⓒ $\frac{1}{5}cot(5x) + C$ ⓓ $-\frac{1}{5}csc(5x) + C$

---

(5) $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ dx$ يساوي :

ⓐ $\frac{e^x - e^{-x}}{2} + C$ ⓑ $\frac{e^x + e^{-x}}{2} + C$

ⓒ $\frac{e^{-x} - e^x}{2} + C$ ⓓ $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + C$

كنترول القسم العلمي
لجنة تقدير الدرجات

وزارة التربية
التوجيه الفني للرياضيات

---

(6) إذا كانت $y = ln\left(\frac{10}{x}\right)$ ، فإن $\frac{dy}{dx}$ يساوي :

ⓐ $\frac{-10}{x}$ ⓑ $\frac{10}{x}$ ⓒ $\frac{1}{x}$ ⓓ $\frac{-1}{x}$

(7) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\, dx$ يساوي :

ⓐ 2 ⓑ $2\sqrt{2}$ ⓒ 4 ⓓ 8

---

(8) $\int_{-1}^{1} (1 - |x|)\, dx$ يساوي :

ⓐ -1 ⓑ $\frac{1}{2}$ ⓒ 1 ⓓ 0

---

(9) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y = -\sqrt{4 - x^2}$ بالوحدات المكعبة هو :

ⓐ $\frac{16}{3}\pi$ ⓑ $\frac{32}{3}\pi$ ⓒ 4π ⓓ 6π

---

(10) المعادلة التي تمثل قطعا زائدا معادلة أحد دليليه : $y = \frac{25}{7}$ مما يلي هي :

ⓐ $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$ ⓑ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$

ⓒ $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{25} = 1$ ⓓ $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{24} = 1$

" انتهت الأسئلة "

ورقة إجابة البنود الموضوعية

السؤال	الاجابة			
(1)	**ⓐ**	ⓑ		
(2)	**ⓐ**	ⓑ		
(3)	ⓐ	**ⓑ**		
(4)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	**ⓓ**
(5)	**ⓐ**	ⓑ	ⓒ	ⓓ
(6)	ⓐ	ⓑ	ⓒ	**ⓓ**
(7)	ⓐ	ⓑ	**ⓒ**	ⓓ
(8)	ⓐ	ⓑ	**ⓒ**	ⓓ
(9)	ⓐ	**ⓑ**	ⓒ	ⓓ
(10)	**ⓐ**	ⓑ	ⓒ	ⓓ

لكل بند درجة واحدة فقط

10