حسام بيومي

| الملف نماذج اختبارات مجمعة مرفقة بالحل |
|---|
| موقع المناهج ⇦ المناهج الكويتية ⇦ الصف الثاني عشر العلمي ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الأول |

@HOSSAMBAYOUMI199

# حل اختبارات الفصل الدراسي الأول

## ٢٠٢٤ ـ ٢٠٢٥

## رياضيات

## الصف الثاني عشر علمي

اعداد
الاستاذ: حسام بيومي

## القسم الأول – أسئلة المقال

### أجب عن جميع أسئلة المقال موضحاً خطوات الحل

**السؤال الأول:**

(a) أوجد $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

**الحـل:**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$\sqrt{x^2} = |x|$
عندما $x \to \infty$
يكون $|x| = x$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}} \quad , \; x \neq 0$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{1-0}{1} = \boxed{1}$$

شرط الجذر
(أ) > ٠ تعليمات الجذر

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)$
$= \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}$
$= 1+0-0 = 1 > 0$

شرط القسمة

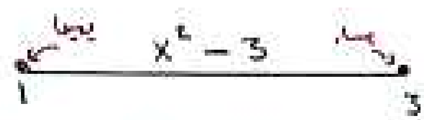
$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}$
$= \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}$
$= \sqrt{1} = 1 \neq 0$

**تابع السؤال الأول:**

**(b) ادرس اتصال الدالة $f$ على [1,3] حيث**

$$f(x)=\begin{cases} -2 & : \ x=1 \\ x^2-3 & : \ 1<x<3 \\ 6 & : \ x=3 \end{cases}$$

**الحــل:**




أولاً ندرس اتصال الدالة $f$ على $(1,3)$

الدالة $f$ كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

① ∴ الدالة $f$ متصلة على $(1,3)$

ثانياً ندرس اتصال الدالة $f$ عند $x=3$ من جهة اليسار

$f(3)=6$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x^2-3)$$

$$=3^2-3=6$$

$$\because f(3)=\lim_{x\to 3^-} f(x)$$

② ∴ الدالة $f$ متصلة عند $x=3$ من جهة اليسار

ثالثاً ندرس اتصال الدالة $f$ عند $x=1$ من جهة اليمين

$f(1)=-2$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2-3)$$

$$=1^2-3=-2$$

$$\because f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

③ ∴ الدالة $f$ متصلة عند $x=1$ من جهة اليمين

من ① ، ② ، ③ (أولاً وثانياً وثالثاً) نجد أن

الدالة $f$ متصلة على $[1,3]$

السؤال الثاني:

(a) بين أن الدالة $f : f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة علي الفترة [0,4] ، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك.

الحـل:

∵ الدالة f كثيرة حدود متصلة على R

∴ الدالة f متصلة على الفترة [0,4] وقابلة للاشتقاق على الفترة (0,4)

∴ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة [0,4]

∴ يوجد على الأقل $c \in (0,4)$ حيث

$f(4) = 4^3 - 3(4) + 2 = \boxed{54}$

$f(0) = 0^3 - 3(0) + 2 = \boxed{2}$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$$

$$f'(c) = \frac{54 - 2}{4} = 13 \to ①$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(c) = 3c^2 - 3 \to ②$$

بالتعويض من ① في ②

$$3c^2 - 3 = 13$$

$$3c^2 = 13 + 3 \Rightarrow \frac{\cancel{3}c^2}{\cancel{3}} = \frac{16}{3} \Rightarrow c = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3} \begin{cases} \frac{4\sqrt{3}}{3} \in (0,4) \\ -\frac{4\sqrt{3}}{3} \notin (0,4) \end{cases}$$

التفسير يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ يوازي القاطع المار بالنقطتين (4,54) و (0,2)

**تابع السؤال الثاني:**

**(b) يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري علي الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 ديناراً كويتياً.**

**فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل تبين أن متوسطها الحسابي (دينارا) $\overline{x} = 283$ ،**
**وانحرافها المعياري (ديناراً) $S = 32$ . فهل يمكن الاعتماد عل هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟**
**استخدم مستوى الثقة 95% (علماً بأن المجتمع يتبع توزيعاً طبيعياً)**

**الحـل:**

① صياغة الفروض
فرض العدم $H_0: \mu = 290$ مقابل الفرض البديل $H_1: \mu \neq 290$

② القياس الإحصائي
$\because \sigma$ غير معلومة ، $n \leq 30$ $\therefore$ نستخدم المقياس

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{283 - 290}{\frac{32}{\sqrt{10}}} \simeq -0.6917$$

③ $n = 10$ $\therefore$ درجات الحرية $n - 1 = 10 - 1 = 9$

مستوى الثقة 95% $1 - \alpha = 0.95$

$\alpha = 0.05 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

من جدول التوزيع $t$
$t_{0.025} = 2.262$

④ منطقة القبول
$(-2.262 , 2.262)$

⑤ القرار
$\because -0.6917 \in (-2.262 , 2.262)$

$\therefore$ القرار هو قبول فرض العدم $\mu = 290$

**السؤال الثالث:**

**(a)** أوجد معادلة المماس والناظم عند النقطة $(1,0)$ لمنحنى الدالة $f$ حيث

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

**الحــل:**

$$f'(x) = \frac{(1)(x+2) - (1)(x-1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$$

$(x-1)' = 1$ البداية

$(x+2)' = 1$

الميل $m = f'(1) = \frac{3}{(1+2)^2} = \frac{1}{3}$

معادلة المماس

$m = \frac{1}{3}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = \frac{1}{3}(x-1)$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

معادلة الناظم

$\frac{-1}{m} = -3$

$y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

$y - 0 = -3(x-1)$

$y = -3x + 3$

**تابع السؤال الثالث:**

(b) لتكن: $f(x) = -2x^3 + 4 \quad , \quad g(x) = x^{13}$

باستخدام قاعدة السلسلة : $(gof)'(0)$

الحــل:

$$(gof)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0)$$

$$f(0) = -2(0) + 4 = 4$$

$$\therefore (gof)'(0) = g'(4) \cdot f'(0)$$

$$g'(x) = 13x^{12} \qquad f'(x) = -6x^2$$

$$g'(4) = 13(4)^{12} \qquad f'(0) = -6(0)^2 = 0$$

$$(gof)'(0) = 13(4)^{12} \times 0 = 0$$

**السؤال الرابع:**

(a) أوجد:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$$

**الحـــل:**

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

(بالضرب × مرافق المقام)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

تذكر أن

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot(1+\cos x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0}(1+\cos x) = \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \left(\lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0} \cos x\right)$$

$$= (1)^2 \cdot (1+1) = 1 \times 2 = \boxed{2}$$

**تابع السؤال الرابع:**

(b) لتكن الدالة $f$ : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$

أوجد كلا مما يلي :

(a) النقاط الحرجة للدالة.

(b) الفترات التي تكون الدالة $f$ متزايدة أو متناقصة عليها.

(c) القيم القصوى المحلية .

**الحل:**

الدالة $f$ كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق عند كل $x \in \mathbb{R}$

نوجد أولا النقاط الحرجة

$f'(x) = -3x^2 + 6x$

بوضع $f'(x) = 0$

$-3x^2 + 6x = 0$

$-3x(x-2) = 0$

$x = 0$ و $x = 2$

$f(0) = -4$

$f(2) = 0$

∴ النقاط الحرجة هي

$(0, -4)$ و $(2, 0)$

نكون الجدول

| الفترات | $(-\infty, 0)$ | $(0, 2)$ | $(2, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| سلوك $f(x)$ | ↘ تناقص | ↗ تزايد | ↘ تناقص |

∴ الدالة $f$ متزايدة على الفترة $(0, 2)$

∴ الدالة $f$ متناقصة على الفترات

$(-\infty, 0)$ و $(2, \infty)$

للدالة $f$ قيمة عظمى محلية قيمتها $0$ عند $x = 2$

للدالة $f$ قيمة صغرى محلية قيمتها $-4$ عند $x = 0$

## القسم الثاني: البنود الموضوعية

أولاً في البنود من ( 1 – 3 ) عبارات ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة (b) إذا كانت العبارة خاطئة

| | | |
|---|---|---|
| (1) $\lim_{x \to 0} \frac{5x^3 + 8x^2}{3x^4 - 16x^2} = 0$ | b | a |
| (2) ميل مماس منحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2$ عند $x = -2$ هو $4$ | b | a |
| (3) إذا كانت $f$ : $f(x) = 3x - 12$ فإن $f'(x) = 3$ | b | a |

ثانيا : في البنود من (4) إلى (10) لكل بند من البنود التالية أربع اختيارات ، واحدة فقط منها صحيح ، ظلل في ورقة الإجابة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة:

(4) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 2}$ يساوي

(a) $1$ (b) $0$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{3}$

(5) لتكن الدالة $f$ : $f(x) = \sqrt{x^2 + 7}$ ، $g$ : $g(x) = x^2 - 3$ فإن: $(fog)(0)$ يساوي:

(a) $4$ (b) $-4$ (c) $1$ (d) $-1$

(6) عدد النقاط الحرجة للدالة : $y = 3x^3 - 9x - 4$ على الفترة $(0, 2)$ هو:

(a) $3$ (b) $2$ (c) $1$ (d) $0$

(7) للدالة $f$ : $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ مماس رأسي معادلته

(a) $x = 0$ (b) $x = 1$ (c) $y = 0$ (d) $y = 1$

8) الدالة : $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على :

(a) $(-\infty, \frac{1}{2}]$ (b) $(5\ ,\ \infty)$

(c) $R$ (d) $(-5\ ,\ 5)$

---

9) إذا كانت : $y = \frac{1}{x} + 5\sin x$ فإن $\acute{y}$ تساوي :

(a) $\frac{1}{x^2} + 5\cos x$ (b) $-\frac{1}{x^2} - 5\cos x$

(c) $\frac{1}{x^2} - 5\cos x$ (d) $-\frac{1}{x^2} + 5\cos x$

---

10) مستطيل مساحته $36cm^2$ فإن أبعاده التي تعطي أصغر محيط

(a) $6\ cm\ ,6\ cm$ (b) $12\ cm\ ,3\ cm$

(c) $9\ cm\ ,4\ cm$ (d) $18\ cm\ ,2\ cm$

---

*انتهت الأسئلة *

## ورقة إجابة البنود الموضوعية

| السؤال | الاجابة | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1 ) | ⓐ | ⓑ | | |
| ( 2 ) | ⓐ | ⓑ | | |
| ( 3 ) | ⓐ | ⓑ | | |
| ( 4 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 5 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 6 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 7 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 8 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 9 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 10 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |

## القسم الأول – أسئلة المقال

### أجب عن جميع أسئلة المقال موضحاً خطوات الحل

**السؤال الأول:**

(a) أوجد $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

**الحـل:**

بالتعويض المباشر عن $x=2$ نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

بالضرب في مرافق البسط

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{2x-3}-1)}{x-2} \times \frac{(\sqrt{2x-3}+1)}{(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{2x-3}+1)} \quad , x \neq 2$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} 2}{\lim\limits_{x \to 2}(\sqrt{2x-3}+1)} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

شرط الجذر

نهاية ما تحت الجذر $\geq 0$

$$\lim_{x \to 2}(2x-3) = 2(2)-3 = 1 \geq 0$$

نهاية الجذر

$$\lim_{x \to 2}\sqrt{2x-3} = \sqrt{\lim_{x \to 2}(2x-3)} = \sqrt{1} = 1$$

شرط المقام

$$\lim_{x \to 2}(\sqrt{2x-3}+1) = \lim_{x \to 2}\sqrt{2x-3} + \lim_{x \to 2} 1 = 1+1 = 2 \neq 0$$

إعداد: أ. حسام بيومي



**تابع السؤال الأول:**

(b) لتكن $f$ :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & : \quad x \ge 1 \\ 5x - 1 & : \quad x < 1 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة $f$ عند $x = 1$

**الحـل:**

$5x-1$ ←——— 1 ———→ $x^2+3x$

$f(1) = 1^2 + 3(1) = 4 \longrightarrow (1)$

النهاية من جهة اليمين

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (x^2+3x) = 1^2 + 3(1) = \boxed{4}$$

النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} (5x-1) = 5(1) - 1 = \boxed{4}$$

$$\because \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = 4$$

$$\therefore \lim_{x\to1} f(x) = 4 \longrightarrow (2)$$

من (1) ، (2) نستنتج أن

الدالة متصلة عند $x = 1$

**السؤال الثاني:**

**(a)** **تعطي الدالة** $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ **حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها** $h$.

a) **أوجد الارتفاع** $h(cm)$ **للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.**

b) **ما قيمة هذا الحجم؟**

**الحـل:**

$V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h) \quad , \quad h \in (0, \infty)$

$V'(h) = 2\pi(-3h^2 + 36)$

بوضع $V'(h) = 0$

$V'(h) = 0 \Rightarrow -3h^2 + 36 = 0$

$\frac{\cancel{-3}h^2}{\cancel{-3}} = \frac{-36}{-3} \Rightarrow h^2 = 12 \Rightarrow h = \pm 2\sqrt{3}$

$h = -2\sqrt{3} \notin (0, \infty)$

$h = 2\sqrt{3} \in (0, \infty)$

اختبار المشتقة الثانية

$V''(h) = 2\pi(-6h)$

$V''(2\sqrt{3}) = 2\pi(-6(2\sqrt{3}))$

$\simeq -130.6 < 0$

∴ قيمة $h = 2\sqrt{3}$ هي قيمة عظمى مطلقة

∴ أكبر حجم للأسطوانة عند $h = 2\sqrt{3}\ cm$

ويكون الحجم

$V(2\sqrt{3}) = 2\pi\left(-(2\sqrt{3})^3 + 36(2\sqrt{3})\right) \simeq 522.37\ cm^3$

**تابع السؤال الثاني:**

**(b)** أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الاناث 25 والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 18.4$ باستخدام مستوى ثقة 95 %

1- أوجد هامش الخطأ.

2- أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي $\mu$.

3- فسّر فترة الثقة.

**الحـل:**

$\sigma = 3.6$ ، $\bar{X} = 18.4$ $n = 25$

① ∵ مستوى الثقة 95%

∴ القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

∵ $\sigma$ معلومة يكون هامش الخطأ

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{3.6}{\sqrt{25}} = 1.4112$$

② فترة الثقة للمتوسط الحسابي $\mu$

$$(\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (18.4 - 1.4112, 18.4 + 1.4112)$$

$$= (16.99, 19.81)$$

③ التفسير

عند اختيار 100 عينة عشوائية حجم كل منها $n=25$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحتوى على القيمة الحقيقية لـ $\mu$.

**السؤال الثالث:**

(a) أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1, 1)$

**الحــل:**

باستخدام الاشتقاق الضمني

$$2x - 2yy' + y'x + y = 0$$

$$-2yy' + y'x = -2x - y$$

$$y'(-2y + x) = -2x - y$$

$$y' = \frac{-2x - y}{-2y + x}$$

لايجاد الميل نعوض بالنقطة $(1,1)$

$$m = y'|_{(1,1)} = \frac{-2(1) - (1)}{-2(1) + (1)} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$m = 3$$

∴ ميل المماس = 3

تابع السؤال الثالث:

(b) لتكن $f$ :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & : \quad x \le 2 \\ 3x - 2 & : \quad x > 2 \end{cases}$$

ابحث قابلية الدالة $f$ للاشتقاق عند $x = 2$

الحــل:

$-\infty$ ، $x^2 - 4x$ ، $2$ ، $3x - 2$ ، $\infty$

نبحث اتصال الدالة $f$ عند $x = 2$

$$f(2) = 2^2 - 4 = 0$$

النهاية من جهة اليمين

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3x - 2)$$

$$= 3(2) - 2 = \boxed{4}$$

النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - 4x)$$

$$= 2^2 - 4(2) = \boxed{-4}$$

$$\because \lim_{x \to 2^-} f(x) \ne \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

$\therefore \lim_{x \to 2} f(x)$ غير موجودة

$\therefore$ الدالة $f$ غير متصلة عند $x = 2$

$\therefore$ الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x = 2$

**السؤال الرابع:**

(a) أوجد:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x \tan x - 2x \cos x}{3x}$$

الحــــل:

$$= \lim_{x \to 0} \left( \frac{\cos x \tan x}{3x} - \frac{2\cancel{x}\cos x}{3\cancel{x}} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left( \frac{\cos x}{3} \cdot \frac{\tan x}{x} - \frac{2}{3}\cos x \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{3} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{2}{3}\cos x$$

$$= \frac{1}{3} \times 1 - \frac{2}{3} \times 1$$

$$= -\frac{1}{3}$$

**تابع السؤال الرابع:**

**(b)** ادرس تغير الدالة $f$ : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها

**الحل:**

① المجال: الدالة f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $R$

② النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^3) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$$

③ النقاط الحرجة

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

بوضع $f'(x)=0$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

$$x = 3 \qquad x = 1$$

$$f(3) = -4$$

$$f(1) = 0$$

النقاط الحرجة هي

$(1, 0)$ , $(3, -4)$

④ تكوين الجدول

| الفترات | $-\infty$ إلى $1$ | $1$ إلى $3$ | $3$ إلى $\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | + | − | + |
| سلوك $f(x)$ | تزايد | تناقص | تزايد |

- الدالة f متزايدة على الفترات $(-\infty, 1)$ , $(3, \infty)$
- الدالة f متناقصة على الفترة $(1, 3)$

للدالة f قيمة عظمى محلية عند $x=1$ وقيمة صغرى محلية عند $x=3$

$$f''(x) = 6x - 12$$

بوضع $f''(x)=0$

$$6x - 12 = 0 \Rightarrow 6x = 12$$

$$x = 2 \Rightarrow \boxed{f(2) = -2}$$

⑤ نقطة الانعطاف هي $(2, -2)$

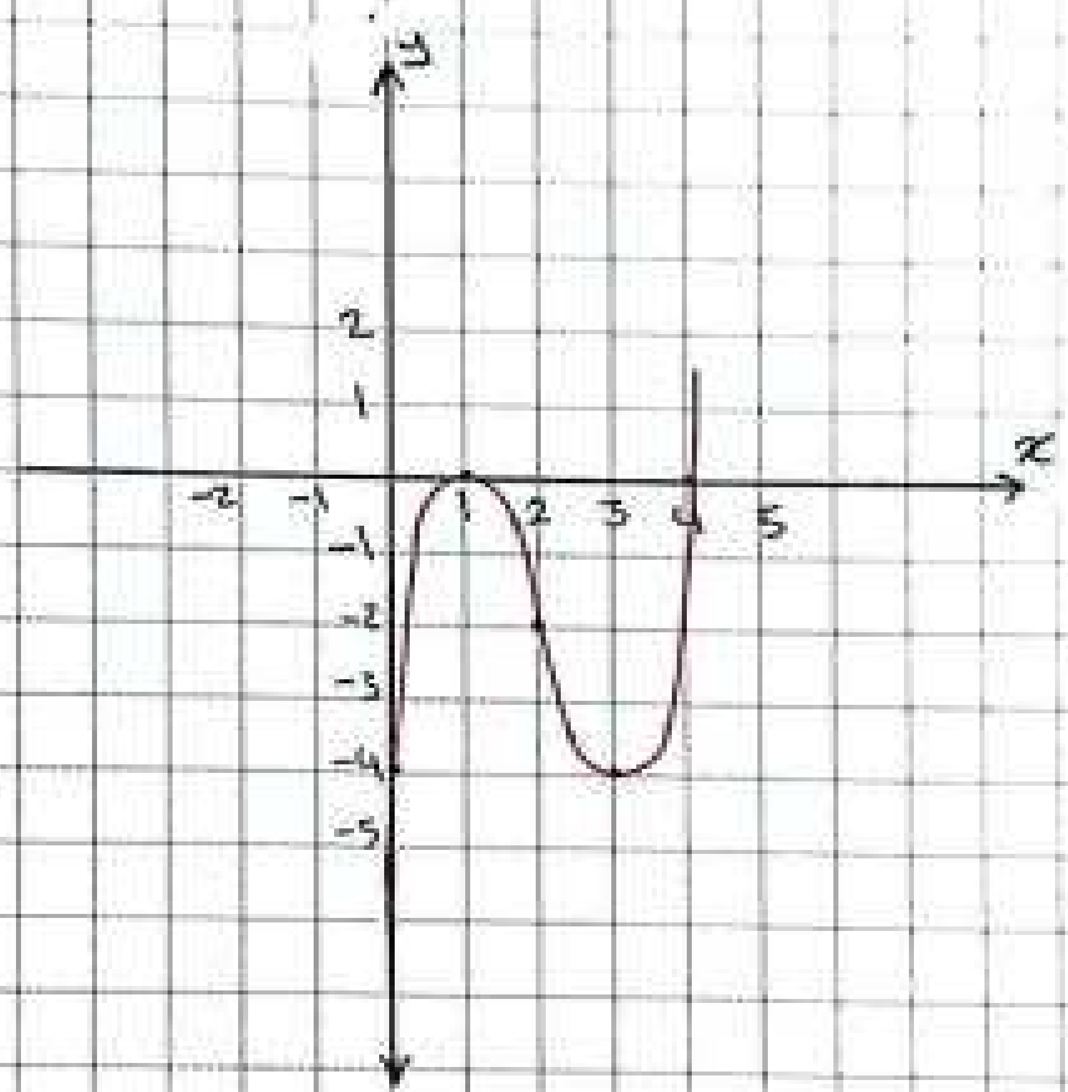
| الفترات | $-\infty$ إلى $2$ | $2$ إلى $\infty$ |
|---|---|---|
| إشارة $f''(x)$ | − | + |
| بيان $f(x)$ | $\cap$ | $\cup$ |

منحنى الدالة f مقعر لأعلى على الفترة $(2, \infty)$

منحنى الدالة f مقعر لأسفل على الفترة $(-\infty, 2)$

مطلوبة عليها — نقاط اضافية

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | -4 | 0 | -2 | -4 | 0 |



## القسم الثاني: البنود الموضوعية

أولاً في البنود من ( 1 – 3 ) عبارات ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة (b) إذا كانت العبارة خاطئة

| | | |
|---|---|---|
| 1 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\lvert 2x-3\rvert}=\dfrac{1}{2}$ | | a |
| 2 إذا كانت الدالة $f(x)=\sqrt{x+3}$ فإن $f'(1)=\dfrac{1}{4}$ | b | |
| 3 الدالة $f$ : $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & x\ge 1\\ 4x-1 & x<1\end{cases}$ فإن مجال $f'$ هو $R$ | b | |

ثانيا : في البنود من (4) إلى (10) لكل بند من البنود التالية أربع اختيارات ، واحدة فقط منها صحيح ، ظلل في ورقة الإجابة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة:

4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=$

(a) $0$ (b) $-\dfrac{1}{4}$ (c) $\dfrac{1}{4}$ (d) غير موجودة

5) إذا كانت الدالة : $f(x)=\sqrt{x^2-a}$ ، متصلة عند $x=3$ فإن $a$ يمكن أن تساوي

(a) 4 (b) 9 (c) 16 (d) 25

6) عدد النقاط الحرجة للدالة : $y=3x^3-9x-4$ على الفترة $(0,2)$ هو:

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

7) ميل الناظم لمنحنى الدالة: $y=x^3-3x+1$ عند النقطة $(2,3)$ تساوي :

(a) 9 (b) 3 (c) $-\dfrac{1}{3}$ (d) $-\dfrac{1}{9}$

8) الدالة $f$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$ متصلة عند $x = 0$

فإن $a$ تساوي

a) $4$

b) $\frac{-1}{4}$

c) $-4$

d) $\frac{1}{4}$

---

9) إن الدالة $f$ : $f(x) = x + \sqrt{x^2} + 2$ ليست قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ والسبب هو

a) ناب

b) ركن

c) مماس عمودي

d) انفصال

---

10) أي من الدوال التالية ليس لها نقطة انعطاف

a) $f(x) = x^3 - 5x$

b) $f(x) = 4x^2 - 2x^4$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = (x-2)^4$

---

*انتهت الأسئلة *

ورقة إجابة البنود الموضوعية

| السؤال | الاجابة | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1 ) | ⓐ | ⓑ | | |
| ( 2 ) | ⓐ | ⓑ | | |
| ( 3 ) | ⓐ | ⓑ | | |
| ( 4 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 5 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 6 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 7 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 8 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 9 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 10 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |

## القسم الأول – أسئلة المقال

**أجب عن جميع أسئلة المقال موضحاً خطوات الحل**

**السؤال الأول:**

(a) لتكن: $y = u^2 + 4u - 3 \quad , \quad u = 2x^3 + x$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

الحـل:

$\because y = u^2 + 4u - 3$

$\frac{dy}{du} = 2u + 4$

$u = 2x^3 + x$

$\frac{du}{dx} = 6x^2 + 1$

بالتعويض

$\therefore y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (2u + 4)(6x^2 + 1)$

$= (2(2x^3 + x) + 4)(6x^2 + 1)$

$= (4x^3 + 2x + 4)(6x^2 + 1)$

$= 24x^5 + 4x^3 + 12x^3 + 2x + 24x^2 + 4$

$= 24x^5 + 16x^3 + 24x^2 + 2x + 4$

**تابع السؤال الأول:**

(b) أوجد: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-3}{\sqrt{4x^2+5x+6}}$

الحـــل:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{-x\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}} \quad , x \neq 0$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2-\frac{3}{x}}{-\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}$

$= \dfrac{\lim\limits_{x \to -\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}$

$= \dfrac{2-0}{-2} = \boxed{-1}$

$\sqrt{x^2} = |x|$

عندما $x \to -\infty$

يكون $|x| = -x$

شرط الجذر

نهاية ما تحت الجذر $> 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} 4 + \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5}{x} + \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{6}{x^2}$

$= 4 + 0 + 0 = 4$

شرط المقام

$\lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}$

$= -\sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty}\left(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}$

$= -\sqrt{4} = -2 \neq 0$

**السؤال الثاني:**

**(a)** أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ، علماً بأن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.

إذا كان لدينا $n = 13 \quad , \quad s = 0.3 \quad , \quad \bar{x} = 8.4$

**الحـل:**

∵ σ غير معلومة ، $n \le 30$

∴ نستخدم توزيع t

درجات الحرية $n - 1 = 13 - 1 = 12$

∵ مستوى الثقة:

$1 - \alpha = 0.95$

$\alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

من جدول التوزيع t نجد أن

$t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.179$

هامش الخطأ

$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.179 \times \frac{0.3}{\sqrt{13}} \simeq 0.1813$

∴ فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ:

$(\bar{x} - E , \bar{x} + E) = (8.4 - 0.1813 , 8.4 + 0.1813)$

$= (8.2187 , 8.5813)$

**تابع السؤال الثاني:**

**(b)** لتكن الدالة $f$ : $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

أوجد $D_f$ ( مجال الدالة $f$ ) ثم ادرس اتصال الدالة $f$ على $[6, 10]$

**الحـل:**

نفرض أن $f(x) = \sqrt{g(x)}$

$g(x) = x^2 - 7x + 10$

أولاً المجال $g(x) \geq 0$

$x^2 - 7x + 10 \geq 0$

المعادلة الصفرية :

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x-2)(x-5) = 0$

$x = 2$ ، $x = 5$

$-\infty$ + 2 − 5 + $\infty$

∴ مجال الدالة هو $(-\infty, 2] \cup [5, \infty)$

ثانياً الاتصال

الدالة g كثيرة حدود متصلة على R

∴ الدالة g متصلة على $[6, 10]$ → ①

$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty, 2] \cup [5, \infty)$

∵ $[6, 10]$ مجموعة جزئية من $D_f$

∴ $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [6, 10]$ → ②

من ①، ② نجد أن

الدالة f متصلة على $[6, 10]$

**السؤال الثالث:**

(a) أوجد معادلة المماس والعمودي عند النقطة $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ لمنحنى الدالة $f$ حيث

$$f(x) = \tan x$$

**الحــل:**

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$$f'(x) = \sec^2 x$$

$$m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$m = 2$$

معادلة المماس [?]

$$m = 2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$$

معادلة العمودي

$$\frac{-1}{m} = \frac{-1}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$$

**تابع السؤال الثالث:**

**(b)** لتكن الدالة $f$ :
$$f(x) = \begin{cases} x+5 & : \ x \le 3 \\ x^2 - 1 & : \ x > 3 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن $f'(3)$

**الحــل:**

$f(3) = 3 + 5 = \boxed{8}$

$f'(3) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ إن وجدت

المشتقة من جهة اليمين

$f'_+(3) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 1 - 8}{x - 3}$

$= \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

$= \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}$

$= \lim\limits_{x \to 3^+} (x+3) = 3 + 3 = 6$

$f'_+(3) = 6$

المشتقة من جهة اليسار

$f'_-(3) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x + 5 - 8}{x - 3}$

$= \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{\cancel{x-3}}{\cancel{x-3}} = 1$

$f'_-(3) = 1$

$\because f'_-(3) \neq f'_+(3)$

$\therefore f'(3)$ غير موجودة

**السؤال الرابع:**

(a) إذا كانت $y = \sqrt{1-2x}$ فأثبت أن $yy'' + (y')^2 = 0$

**الحــل:**

$y = \sqrt{1-2x}$ بتربيع الطرفين

$y^2 = 1 - 2x$

$\frac{2y}{2} y' = \frac{-2}{2}$

$\underbrace{y y'}_{\text{ضرب}} = -1$

$y' y' + y y'' = 0$

$y y'' + (y')^2 = 0$ وهو المطلوب

**تابع السؤال الرابع:**

**(b)** ادرس تغير الدالة $f:\quad f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها

**الحل:**

* الدالة $f$ كثيرة حدود مجالها $R$ متصلة على $R$ وقابلة للاشتقاق على $R$

* النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x)) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (-x^3) = -\infty$$

* نوجد النقاط الحرجة

$$f'(x) = -3x^2$$

نضع $f'(x) = 0$

$$-3x^2 = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

$\therefore$ $(0, 1)$ نقطة حرجة

* نكون الجدول

| الفترات | $-\infty$ إلى $0$ | $0$ إلى $\infty$ |
|---|---|---|
| إشارة $f'(x)$ | + | − |
| سلوك $f(x)$ | ↘ متناقصة | ↘ متناقصة |

الدالة $f$ متناقصة على الفترات $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$

لا توجد نقاط محلية عظمى أو صغرى محلية

$$f''(x) = -6x$$

نضع $f''(x) = 0$

$$-6x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 1$$

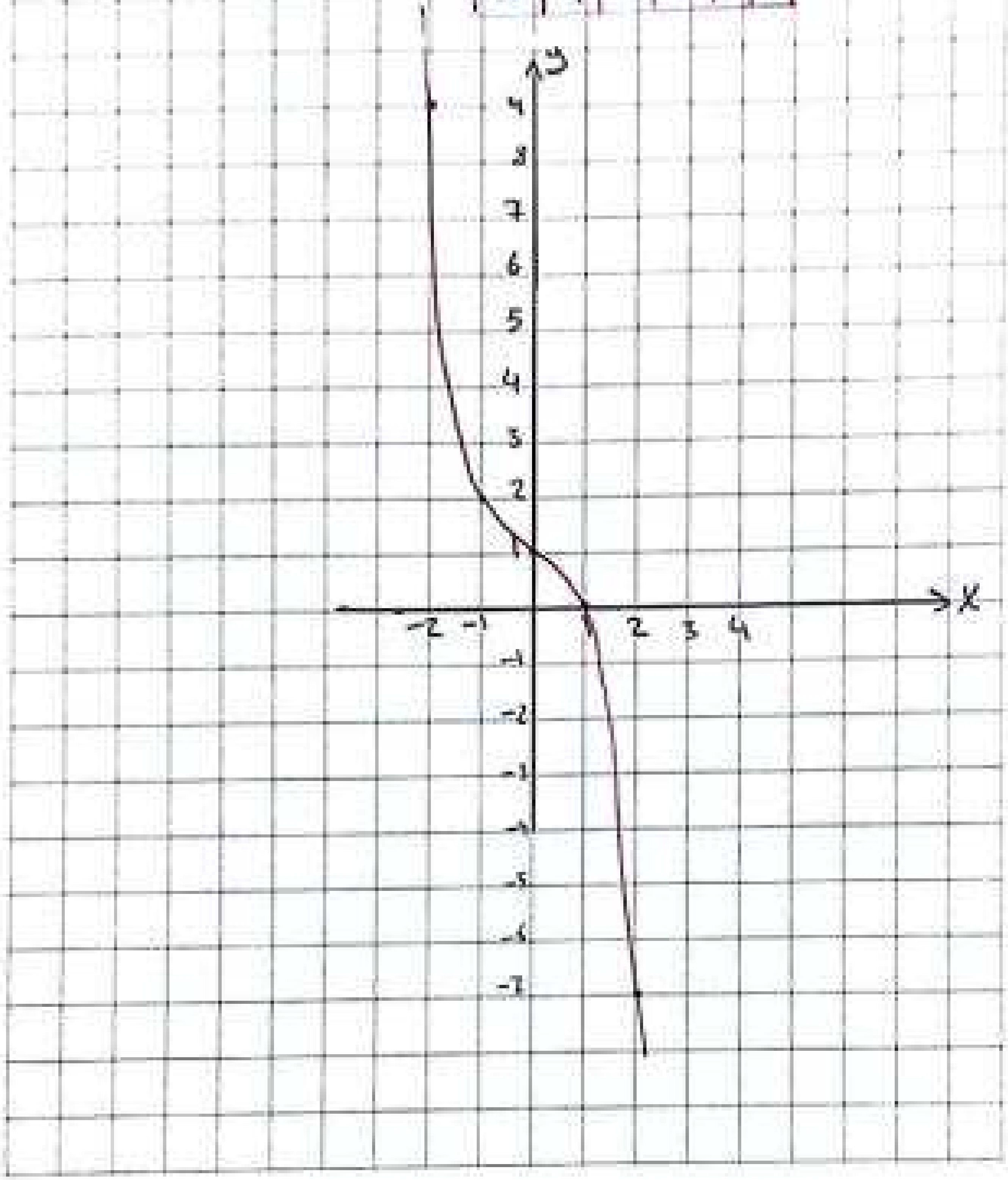
| | $-\infty$ إلى $0$ | $0$ إلى $\infty$ |
|---|---|---|
| إشارة $f''(x)$ | + | − |
| بيان $f(x)$ | ∪ تقعر لأعلى | ∩ تقعر لأسفل |

منحنى الدالة $f$ مقعر لأعلى على $(-\infty, 0)$

منحنى الدالة $f$ مقعر لأسفل على $(0, \infty)$

$(0, 1)$ نقطة انعطاف

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $y$ | 9 | 2 | 1 | 0 | -7 |



إعداد: أ. حسام بيومي

@HOSSAMBAYOUMI199

## القسم الثاني: البنود الموضوعية

أولاً في البنود من ( 1 – 3 ) عبارات ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة (b) إذا كانت العبارة خاطئة

| | | |
|---|---|---|
| (1) $\lim_{x\to1^+} (2x-\lvert x\rvert+2)=3$ | b | a |
| (2) الدالة $f$ $\quad f(x)=\frac{\sqrt[3]{3x-1}}{x^2}$ متصلة عند $x=3$ | b | a |
| (3) أصغر محيط لمستطيل مساحته $16\ cm^2$ هو $16\ cm$ | b | a |

ثانيا : في البنود من (4) إلى (10) لكل بند من البنود التالية أربع اختيارات ، واحدة فقط منها صحيح ، ظلل في ورقة الإجابة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة:

(4) $\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin x}$ يساوي

(a) $0$ (b) $\infty$ (c) $-2$ (d) $2$

---

(5) إذا كانت الدالة $f$ متصلة عند $x=-2$ وكان $\lim_{x\to-2}\left(x^2+f(x)\right)=7$

فإن : $f(-2)$ تساوي

(a) $3$ (b) $5$ (c) $9$ (d) $11$

---

(6) عدد النقاط الحرجة للدالة : $y=3x^3-9x-4$ على الفترة $(0\,,2)$ هو:

(a) $3$ (b) $2$ (c) $1$ (d) $0$

---

(7) الدالة $f$ $\quad f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على :

(a) $(-\infty,\frac{1}{2})$ (b) $(5,\infty)$ (c) $R$ (d) $(-5\,,5)$

8) إذا كانت : $f(x) = (1 + 6x)^{\frac{2}{3}}$ فإن $f''(x)$ تساوي :

(a) $\frac{8}{27}(1 + 6x)^{\frac{-4}{3}}$

(b) $8(1 + 6x)^{\frac{-4}{3}}$

(c) $-8(1 + 6x)^{\frac{-4}{3}}$

(d) $-64(1 + 6x)^{\frac{-4}{3}}$

---

9) إذا كانت : $y = \frac{1}{x} + 5\sin x$ فإن $\acute{y}$ تساوي

(a) $\frac{1}{x^2} + 5\cos x$

(b) $-\frac{1}{x^2} - 5\cos x$

(c) $\frac{1}{x^2} - 5\cos x$

(d) $-\frac{1}{x^2} + 5\cos x$

---

10) أي من الدوال التالية ليس لها نقطة انعطاف

(a) $f(x) = x^3 - 5x$

(b) $f(x) = 4x^2 - 2x^4$

(c) $f(x) = x^3$

(d) $f(x) = (x - 2)^4$

---

* انتهت الأسئلة*

## ورقة إجابة البنود الموضوعية

| السؤال | الاجابة | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1 ) | ⓐ | ⓑ | | |
| ( 2 ) | ⓐ | ⓑ | | |
| ( 3 ) | ⓐ | ⓑ | | |
| ( 4 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 5 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 6 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 7 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 8 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 9 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 10 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |

## القسم الأول – أسئلة المقال

### أجب عن جميع أسئلة المقال موضحاً خطوات الحل

**السؤال الأول:**

(a) أوجد: $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$

الحـل:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1} \times \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x (\cos x + 1)}{\cos^2 x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x (\cos x + 1)}{-\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} -\frac{x}{\sin x} \cdot (\cos x + 1)$$

$$= -\left(\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}\right) \cdot \left(\lim_{x \to 0} \cos x + \lim_{x \to 0} 1\right)$$

$$= -(1) \times (1 + 1) = 1 \times 2 = 2$$

تذكر

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$

**تابع السؤال الأول:**

**(b)** أوجد:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x-2)^3 - 8}{x}$$

**الحــل:**

بالتعويض المباشر عن $x = 0$ نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x+2-2)\left((x+2)^2 + 2(x+2) + 4\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(x^2 + 4x + 4 + 2x + 4 + 4)}{\cancel{x}}, \quad x \neq 0$$

$$= \lim_{x \to 0} (x^2 + 6x + 12) = 0^2 + 6(0) + 12 = 12$$

**السؤال الثاني:**

(a) ابحث اتصال الدالة $f$ عند $x=0$: $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x}{|x|} & : x\neq 0\\ -3 & : x=0\end{cases}$

**الحـل:**

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x}{x} & ; x>0\\ -3 & ; x=0\\ \frac{x^2-3x}{-x} & ; x<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{\cancel{x}(x-3)}{\cancel{x}} & ; x>0\\ -3 & ; x=0\\ \frac{\cancel{x}(x-3)}{-\cancel{x}} & ; x<0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}x-3 & ; x>0\\ -3 & ; x=0\\ -(x-3) & ; x<0\end{cases}$$

$-\infty$ $-(x-3)$ | $0$ | $(x-3)$ $\infty$

$f(0)=-3 \rightarrow (1)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} -(x-3)=-(0-3)=\boxed{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-3)=0-3=\boxed{-3}$$

$\because \lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة

$\therefore$ الدالة $f$ ليست متصلة عند $x=2$

**تابع السؤال الثاني:**

**(b)** لتكن الدالة $f$: $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & : \ x\leqslant 1 \\ 2x+1 & : \ x>1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f'(x)$ إن أمكن

**الحـل:**

$-\infty \quad x^2+2 \quad 1 \quad 2x+1 \quad \infty$

$D_f=(-\infty,1]\cup(1,\infty)=\mathbb{R}$

$f'(x)=\begin{cases} 2x & ; \ x<1 \\ \text{تُبحث} & ; \ x=1 \\ 2 & ; \ x>1 \end{cases}$

$f(1)=1^2+2=\boxed{3}$

أولاً: $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+2-3}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=1+1$

$=\boxed{2}$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+1-3}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}2=\boxed{2}$

$f'_-(1)=f'_+(1)=2 \Rightarrow f'(1)=2$

$f'(x)=\begin{cases} 2x & ; \ x<1 \\ 2 & ; \ x=1 \\ 2 & ; \ x>1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x & , \ x\leq 1 \\ 2 & , \ x>1 \end{cases}$

ومنه

## السؤال الثالث:

(a) ( 1 ) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة المتصلة $f$ : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[0, 3]$.

**الحــل:**

∵ الدالـــة متصلة على ____ $[-2, 1]$

∴ الدالة لها قيم قصوى مطلقة في هذه الفترة

أولاً النقاط الطرفية

$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = \boxed{-1}$

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = \boxed{-1}$

ثانياً النقاط الحرجة

$f'(x) = 3x^2 - 3$

بوضع $f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0$

$3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \begin{cases} 1 \notin (-2, 1) \\ -1 \in (-2, 1) \end{cases}$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = \boxed{3}$

من أولاً وثانياً فإن أكبر قيمة للدالة $f$ هي ____ 3 ∴ 3 قيمة عظمى مطلقة

أصغر قيمة للدالة $f$ هي ____ $-1$ ∴ $-1$ قيمة صغرى مطلقة

---

( 2 ) عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن ما العددان؟

الفرض

نفرض العددين $x$ ، $y$

مجموعهم $= x + y = 100$

$y = 100 - x$

حيث : $0 < x < 100$

$f(x) =$ مجموع مربعيهما $= x^2 + y^2$

$\therefore f(x) = x^2 + (100 - x)^2$

$f'(x) = 2x + 2(100 - x)'(-1)$

مشتقة ما بداخل القوس

$\therefore f'(x) = 2x + (200 - 2x)(-1)$

$= 2x - 200 + 2x$

$= 4x - 200$

نضع $f'(x) = 0$

$4x - 200 = 0$

$4x = 200 \quad \div 4$

$x = 50 \in (0, 100)$

∴ النقطة الحرجة : $(50, f(50))$

اختبار المشتقة الثانية

$f''(x) = 4$

$\therefore f''(50) = 4 > 0$

∴ توجد قيمة صغرى مطلقة عند $x = 50$

∴ العدد الأول $= x = 50$

العدد الثاني $= y = 100 - 50 = 50$

∴ العددان هما : 50 ، 50

**تابع السؤال الثالث:**

**(b)** بيّنت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو $\mu = 1800\ kg$ مع انحراف معياري $\sigma = 150\ kg$. ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الاسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك و تأكيدًا على ذلك تمّ اختبار عينة من 40 سلكًا. فتبيّن أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي $1840\ kg$ هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$؟

**الحــل:**

1. صياغة الفروض

فرض العدم $H_0: \mu = 1800$ مقابل $H_1: \mu \neq 1800$ فرض البديل

2. المقياس الإحصائي ∵ $\sigma$ معلومة نستخدم المقياس

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1840-1800}{\frac{150}{\sqrt{40}}} \simeq 1.686$$

3. ∵ مستوى الثقة $95\%$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

4. منطقة القبول $(-1.96, 1.96)$

5. القرار ∵ $1.686 \in (-1.96, 1.96)$

∴ القرار قبول فرض العدم $\mu = 1800$

**السؤال الرابع:**

**(a)** للمنحنى الذي معادلته $2\sqrt{y}+y=x$ أوجد $y'$ ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3\,,\,1)$

**الحـــل:**

(1) بالاشتقاق الضمني $\because 2\sqrt{y}+y=x$

$$\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{y}}\cdot y'+y'=1$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}}+y'=1$$

عامل مشترك $\leftarrow$

$$y'\left(\frac{1}{\sqrt{y}}+1\right)=1$$

$$y'\left(\frac{1+\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\right)=\frac{1}{1} \quad \Rightarrow y'=\frac{\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}$$

(2)

$$\text{ميل المماس}=m=y'\Big|_{(3,1)}=\frac{\sqrt{1}}{1+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$$

**تابع السؤال الرابع:**

**(b** لتكن $f$: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

a) أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة $f$

b) أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة $f$

**الحل:**

## القسم الثاني: البنود الموضوعية

أولاً في البنود من ( 1 – 3 ) عبارات ظلل (a) إذا كانت العبارة صحيحة (b) إذا كانت العبارة خاطئة

| | | |
|---|---|---|
| 1 $\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x^2}-x}{x}=-2$ | b | ● |
| 2 الدالة $f$ : $f(x)=x\|x\|$ غير قابلة للاشتقاق $\forall x\in R$ | ● | a |
| 3 إذا كانت $f''(c)=0$ فإن لمنحنى الدالة $f$ نقطة انعطاف هي $(c\,,f(c))$ | ● | a |

ثانيا : في البنود من (4) إلى (10) لكل بند من البنود التالية أربع اختيارات ، واحدة فقط منها صحيح ، ظلل في ورقة الإجابة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة:

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+3}$ يساوي

(a) $\infty$ (b) $-\infty$ ● $1$ (d) $0$

5) إذا كانت الدالة : $f(x)=\sqrt{x^2-a}$ ، متصلة عند $x=3$ فإن $a$ يمكن أن تساوي

● $4$ (b) $9$ (c) $16$ (d) $25$

6) إن الدالة $f$ : $f(x)=x+\sqrt{x^2}+2$ ليست قابلة للاشتقاق عند $x=0$ والسبب هو

(a) ناب ● ركن (c) مماس عمودي (d) غير متصلة

7) ميل الخط العمودي على المماس ( الناظم ) عند النقطة $A(3\,,2\,)$ على المنحنى $x^2-y^2-2xy=-7$ هو

● $-5$ (b) $\frac{-1}{5}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $5$

إعداد: أ. حسام بيومي

HOSSAMBAYOUMI199



8) إذا كان $f`(x) = x^2$ فإن الدالة $f(x)$

a) متناقصة على مجال تعريفها
b) متزايدة على مجال تعريفها
c) متناقصة على الفترة $(0, \infty)$
d) متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$ فقط

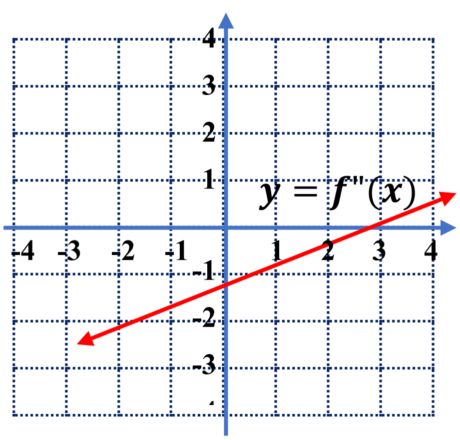
---

9) إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{ax^2+b\,x+3}{2x+5} = 3$ فإن قيم $a$ ، $b$ تساوي

a) $a = 0\ , b = 6$
b) $a = 0\ , b = -6$
c) $a = 6\ , b = 0$
d) $a = -6\ , b = 0$

---

10) إذا كانت $f$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة والشكل المقابل يوضح بيان $f''$ فإن منحنى الدالة $f$ مقعر للأسفل في الفترة




a) $(-1\ ,\ 4]$
b) $(3\ ,\ \infty)$
c) $(-\infty\ ,3)$
d) $(3\ ,\ 5)$

---

*انتهت الأسئلة*

## ورقة إجابة البنود الموضوعية

| السؤال | الاجابة | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1 ) | ⓐ | ⓑ | | |
| ( 2 ) | ⓐ | ⓑ | | |
| ( 3 ) | ⓐ | ⓑ | | |
| ( 4 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 5 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 6 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 7 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 8 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 9 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ( 10 ) | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |